Aplicaciones lineales

5.1 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x-y,\ 2x-y^2)$

f no es lineal ya que:

$$3f(0,2) = 3(-2,-4) = (-6,-12)$$

$$f(3\cdot(0,2)) = f(0,6) = (-6,-36)$$

$\ne$

b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z,u) = (x-y,\ u+z,\ z,\ 2x-y)$

f sí es lineal porque:

$(*)$ $f\big((x_1,y_1,z_1,u_1)+(x_2,y_2,z_2,u_2)\big) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2,\ u_1+u_2) =$

$= (x_1+x_2-y_1-y_2,\ u_1+u_2+z_1+z_2,\ z_1+z_2,\ 2x_1+2x_2-y_1-y_2) =$
$= (x_1-y_1,\ u_1+z_1,\ z_1,\ 2x_1-y_1) + (x_2-y_2,\ u_2+z_2,\ z_2,\ 2x_2-y_2) =$
$= f(x_1,y_1,z_1,u_1) + f(x_2,y_2,z_2,u_2)$

$(**)$ $f(\lambda(x,y,z,u)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda u) =$

$= (\lambda x - \lambda y,\ \lambda u + \lambda z,\ \lambda z,\ 2\lambda x - \lambda y) = \lambda(x-y,\ u+z,\ z,\ 2x-y) =$

$= \lambda f(x,y,z,u)$

5.2 $f: V \to V$ $\quad \beta = \{u_1, u_2\}$

$f(u_1) = u_2 \qquad f(u_2) = u_1 \qquad g(u_1) = -u_1 \qquad g(u_2) = u_2$

Veamos qué pasa con $f \circ g$ aplicada a los vectores de β:

$$f \circ g(u_1) = f(-u_1) = -f(u_1) = -u_2$$

$$f \circ g(u_2) = f(u_2) = u_1$$

Y ahora $g \circ f$ aplicada a β:

$$g \circ f(u_1) = g(u_2) = u_2$$

$$g \circ f(u_2) = g(u_1) = -u_1$$

Como $f \circ g(u_1) \neq g \circ f(u_1)$ las aplicaciones son diferentes.

5.3 $f: V \to V$ lineal

$\mathrm{Inv}\, f = \{ v \in V \text{ tq } f(v) = v \}$ es un subespacio vectorial

Demostración:

(*) Sea $u, v \in \mathrm{Inv}\, f \Rightarrow f(u) = u$ y $f(v) = v$

$$f(u+v) \overset{f \text{ lineal}}{=} f(u) + f(v) = u+v \Rightarrow u+v \in \mathrm{Inv}(f)$$

(**) Sea $u \in \mathrm{Inv}\, f$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow f(u) = u$

$$f(\lambda u) \underset{f \text{ lineal}}{=} \lambda f(u) = \lambda u \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{Inv}(f)$$

De (*) y (**) deducimos que $\mathrm{Inv}(f)$ es un subespacio vectorial de V.

5.4 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal

$v, w \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow v+w \in \operatorname{Ker} f$

Demostración:

f lineal

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow v+w \in \operatorname{Ker} f$$

5.5 $f: V \to V$ $\qquad f \circ f = f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$

Demostración

"$\Rightarrow$" Tenemos que demostrar que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Sea $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$, entonces $\vec{v} = f(\vec{u})$ para algún $\vec{u} \in V$ y

$f(\vec{v}) = f(f(\vec{u})) = f^2(\vec{u}) = 0$, es decir $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$

"$\Leftarrow$" Tenemos que ver ahora que $f^2 = 0$. Sea $u \in V$, entonces:

$$f^2(u) = f(f(u)) \text{ y como } f(u) \in \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$$

entonces $f(f(u)) = \vec{0}$.

5.6 $D: P_4[x] \longrightarrow P_3[x]$

$$D(p(x)) = p'(x)$$

a) $\circledast$ $D(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x) =$

$$D(p(x)) + D(q(x))$$

$(**)$ $D(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda D(p(x))$

Así que $(*) + (**) \Rightarrow D$ lineal.

b) $M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(D)$ $\quad \beta_c^4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

$\beta_c^3 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$D(1) = 0$; $D(x) = 1$; $D(x^2) = 2x$; $D(x^3) = 3x^2$; $D(x^4) = 4x^3$

Así que:

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $\beta = \{(1+x)^4, (1+x)^3 x, (1+x)^2 x^2, (1+x) x^3, x^4\}$

$M_{\beta \beta_c^3}(D) = ?$

$$D\left((1+x)^4\right) = 4(1+x)^3 = 4(1+3x+3x^2+x^3)$$

$$D\left((1+x)^3 x\right) = 3(1+x)^2 \cdot x + (1+x)^3 = (1+x)^2(3x+1+x) =$$

$$= (1+2x+x^2)(1+4x) = 1+2x+x^2+4x+8x^2+4x^3$$

$$= 1+6x+9x^2+4x^3$$

$$D\left((1+x)^2 x^2\right) = 2(1+x)x^2 + (1+x)^2 \cdot 2x = (1+x)\left[2x^2+(1+x)2x\right]$$

$$= (1+x)(4x^2+2x) = 4x^2+2x+4x^3+2x^2 =$$

$$= 4x^3+6x^2+2x$$

$$D\left((1+x)x^3\right) = x^3+(1+x)3x^2 = 4x^3+3x^2$$

$$D(x^4) = 4x^3$$

$$M_{\beta\beta_c^3}(D) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

5.8

a)

$$M_{\beta_1 \beta_8}(g) = M_{\beta_8 \beta_6} \, M_{\beta_1 \beta_6}(g) \, M_{\beta_1 \beta_1}$$

b)

$$M_{\beta_3 \beta_5}(g) = M_{\beta_5 \beta_8} \, M_{\beta_1 \beta_8}(g) \, M_{\beta_1 \beta_3}$$

5.10 $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$g(-1,1,3) = (6,-4,16)$ $\qquad$ $g(-2,1,1) = (-2,-5,1)$

$g(3,2,-1) = (1,14,-12)$

1. Matriz de g respecto de las bases canónicas.

Como tenemos que calcular las imágenes de la base canónica, calcularemos los vectores de esta base como combinación lineal de $\beta = \{\underset{v_1}{(-1,1,3)}, \underset{v_2}{(-2,1,1)}, \underset{v_3}{(3,2,-1)}\}$

Omitimos los cálculos (que se reducen a resolver sistemas de ecuaciones):

$$(1,0,0) = \frac{3}{17} v_1 - \frac{7}{17} v_2 + \frac{2}{17} v_3$$

$$(0,1,0) = \frac{-1}{17} v_1 + \frac{8}{17} v_2 + \frac{5}{17} v_3$$

$$(0,0,1) = \frac{7}{17} v_1 - \frac{5}{17} v_2 - \frac{1}{17} v_3$$

$$g(1,0,0) = \frac{3}{17} g(v_1) - \frac{7}{17} g(v_2) + \frac{2}{17} g(v_3) = (2,3,1)$$

$$g(0,1,0) = \frac{-1}{17} g(v_1) + \frac{8}{17} g(v_2) + \frac{5}{17} g(v_3) = (-1,2,-4)$$

$$g(0,0,1) = \frac{7}{17} g(v_1) - \frac{5}{17} g(v_2) - \frac{1}{17} g(v_3) = (3,-1,7)$$

Así que:

$$M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Ecuaciones de Ker g y base

Sea $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow \quad g(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como $|A| = 0$ y las dos últimas filas no son proporcionales, se tiene que $rg(A) = 2$ y $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - rg(A) = 3-2=1$

$$\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z) : 3x+2y-z = x-4y+7z = 0\}$$

$$\beta_{\operatorname{Ker} g} = \{(5,-11,-7)\}$$

3. Ecuacions y base de Im g.

Como $\dim \operatorname{Im} g = rg\, M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(g) = 2$ y la $\operatorname{Im}(g)$ viene generada por las columnas de la matriz $M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(g)$, obtenemos:

$$\beta_{\operatorname{Im} g} = \{(2,3,1), (-1,2,-4)\}$$

El número de ecuaciones que necesitamos para defimir a Im g es $\dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}\, g = 3-2=1$. Sea $(x,y,z) \in \mathrm{Im}\, g$, entonces:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7(z+y-2x) = 0 \implies$$

$$z+y-2x=0$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{Im}\, g = \{(x,y,z) : z+y-2x=0\}$$

3. $\underline{rg(g)} = \dim \mathrm{Im}(g) = 2$.

5.9 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = (x_2 + x_3) e_1 + (x_1 + x_3) e_2 + (x_2 - x_1) e_3$$

a)

$$f(e_1) = e_2 - e_3 = (0, 1, -1)$$

$$f(e_2) = e_1 + e_3 = (1, 0, 1)$$

$$f(e_3) = e_1 + e_2 = (1, 1, 0)$$

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(x, y, z)_B \in Inv(f) \Leftrightarrow$

$f((x, y, z)_B) = (x, y, z)_B$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \cancel{-1} \cancel{-1} \cancel{+1} - (\cancel{1} \cancel{-1} \cancel{-1}) = 0$$

Así que $rg(A) = 2$ (porque tiene dos filas no proporcionales y $|A| = 0$)

Por lo tanto $\dim(Inv(f)) = 3 - 2 = 1$ y:

$\mathrm{Inv}(f) = \{ (x,y,z) : -x+y+z = x-y+z=0 \}$

$\beta_{\mathrm{Inv}(f)} = \{ (1,1,0) \}$

c) $\boxed{\mathrm{Ker}\, f}$ $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|B| = 0-1+1-(0+0+0) = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}\, B = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = 3-2 = 1$

$\mathrm{Ker}\, f = \{ (x,y,z) : y+z = y-x = 0 \}$

$\beta_{\mathrm{Ker} f} = \{ (1,1,-1) \}$

$\boxed{\mathrm{Im}\, f}$ $\dim \mathrm{Im}\, f = 3 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 3-1 = 2$

$\beta_{\mathrm{Im}\, f} = \{ (1,0,1), (1,1,0) \}$

Si $(x,y,z) \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow (x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) \Rightarrow$

$$0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = z + y - x$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f = \{ (x,y,z) : x-y-z = 0 \}$

d) $\beta^{*} = \{ \underbrace{(1,\overset{w_1}{1},-1)}_{\in\, \mathrm{Ker}\, f}, (1,\overset{w_2}{0},0), (0,\overset{w_3}{1},0) \}$

e)

$f(w_1) = 0$

$f(w_2) = f(e_1) = e_2 - e_3 = (0,1,-1) = w_1 - w_2$

$f(w_3) = f(e_2) = e_1 + e_3 = (1,0,1) = w_1 - w_3$

$$M_{\beta^*\beta^*}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f) $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$

5.12 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad A = M_{B_c^4 B_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $$f(x,y,z,t) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right]^t = (x,\ x-y+z+2t)$$

b) $\boxed{\operatorname{Ker} f}$ $\qquad (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \iff x = x-y+z+2t = 0$

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x,y,z,t) \text{ tq } x = -y+z+2t = 0 \}$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \operatorname{rg} A = 4-2 = 2$$

$$B_{\operatorname{Ker} f} = \{ (0,1,1,0),\ (0,2,0,1) \}$$

$\boxed{\operatorname{Im} f}$ $\qquad \dim \operatorname{Im} f = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 2 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y

$$B_{\operatorname{Im} f} = \{ (1,0),(0,1) \}$$

c) $B = \{ u_1 = (1,1,1,0),\ u_2 = (1,1,0,0),\ u_3 = (1,0,0,0),\ u_4 = (1,1,1,1) \}$

$$B' = \{ \overset{w_1}{(1,1)},\ \overset{w_2}{(0,2)} \}$$

$$f(u_1) = \left[A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^t = (1,1) = (1,0)_{B'}$$

$$f(u_2) = (1,0) = w_1 - \frac{1}{2} w_2 = \left(1, \frac{-1}{2}\right)_{B'}$$

$$f(u_3) = (1,1) = w_1 = (1,0)_{B'}$$

$$f(u_4) = (1,3) = w_1 + w_2 = (1,1)_{B'}$$

$$M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 2.$

e) Encontrar bases, β_1 de $\mathbb{R}^4$ y β_2 de $\mathbb{R}^2$, tales que

$$M_{\beta_1\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos esas bases $\beta_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y $\beta_2 = \{t_1, t_2\}$. Entonces:

$f(s_1) = (1,0)_{\beta_2} = t_1$ (R_1)

$f(s_2) = (0,1)_{\beta_2} = t_2$ (R_2)

$f(s_3) = (0,0)_{\beta_2} \Rightarrow s_3 \in \operatorname{Ker} f$

$f(s_4) = (0,0)_{\beta_2} \Rightarrow s_4 \in \operatorname{Ker} f$

Tomamos $s_3 = (0,1,1,0)$; $s_4 = (0,2,0,1)$

Ahora elegimos $s_1, s_2 \notin \operatorname{Ker} f$ y de forma que β_1 sea base:

$s_1 = (1,0,0,0)$, $s_2 = (0,1,0,0)$ y está claro que

β_1 es una base porque:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

(R_1) y (R_2) fijan el valor de t_1 y t_2:

$$t_1 = f(s_1) = (1, 1)$$

$$t_2 = f(s_2) = (0, -1)$$

Además B_2 es una base porque t_1 y t_2 son l. independientes.

5.13 $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$

$*$ $M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(g\circ f) = M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(g)\, M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 6 \\ 6 & -5 & 0 & -2 \\ -10 & 3 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

No se puede calcular el espacio invariante porque los espacios de partida y llegada, no coinciden.

$*$ $\mathrm{Ker}\,(g\circ f) = \{ (x,y,z,t) \text{ tq } f(x,y,z,t) = \vec{0} \} =$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \text{ tq } \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 6 \\ 6 & -5 & 0 & -2 \\ -10 & 3 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

Así que $\dim (g\circ f) = 4 - \mathrm{rg}\, M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(g\circ f) = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 6 \\ 6 & -5 & 0 & -2 \\ -10 & 3 & 0 & 14 \end{pmatrix} \underset{F_3 - 5F_1}{\overset{F_2 + 3F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & -16 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{8}F_2}{\overset{F_3 + F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\,(g\circ f) = \{ (x,y,z,t) : -2x - y + 6t = -y + 2t = 0 \}$

$\beta_{\mathrm{Ker}(g\circ f)} = \{ (2,2,0,1), (0,0,1,0) \}$

* $\mathrm{Im}(g \circ f)$

Como $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) + \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = 2$

$$\beta_{\mathrm{Im}(g \circ f)} = \{(-1,-5,3), (-1,3,-5)\}$$

Si $(x,y,z) \in \mathrm{Im}(g \circ f) \Rightarrow$

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ -5 & 3 & y \\ 3 & -5 & z \end{vmatrix} \underset{C_3+xC_1}{\overset{C_2-C_1}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & y-5x \\ 3 & -8 & z+3x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & y-5x \\ -8 & z+3x \end{vmatrix}$$

$$\overset{F_2+F_1}{=} - \begin{vmatrix} 8 & y-5x \\ 0 & z+y-2x \end{vmatrix} = -8(z+y-2x) = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(g \circ f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z+y-2x=0\}$

5.14

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x+y, y, 0)$$

a) f es lineal porque:

(1) $f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') =$

$= (x+x'+y+y', y+y', 0) =$

$= (x+y, y, 0) + (x'+y', y', 0) = f(x,y,z) + f(x',y',z')$

(2) $f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha y, \alpha y, 0) =$

$= \alpha(x+y, y, 0) = \alpha f(x,y,z)$

b) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) : x+y = y = 0\} = \{(x,y,z) : x = y = 0\}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1 \qquad \beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(0,0,1)\}$

$\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \operatorname{Ker} f = 2$

$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle (1,0,0), (1,1,0), (0,0,0) \rangle$

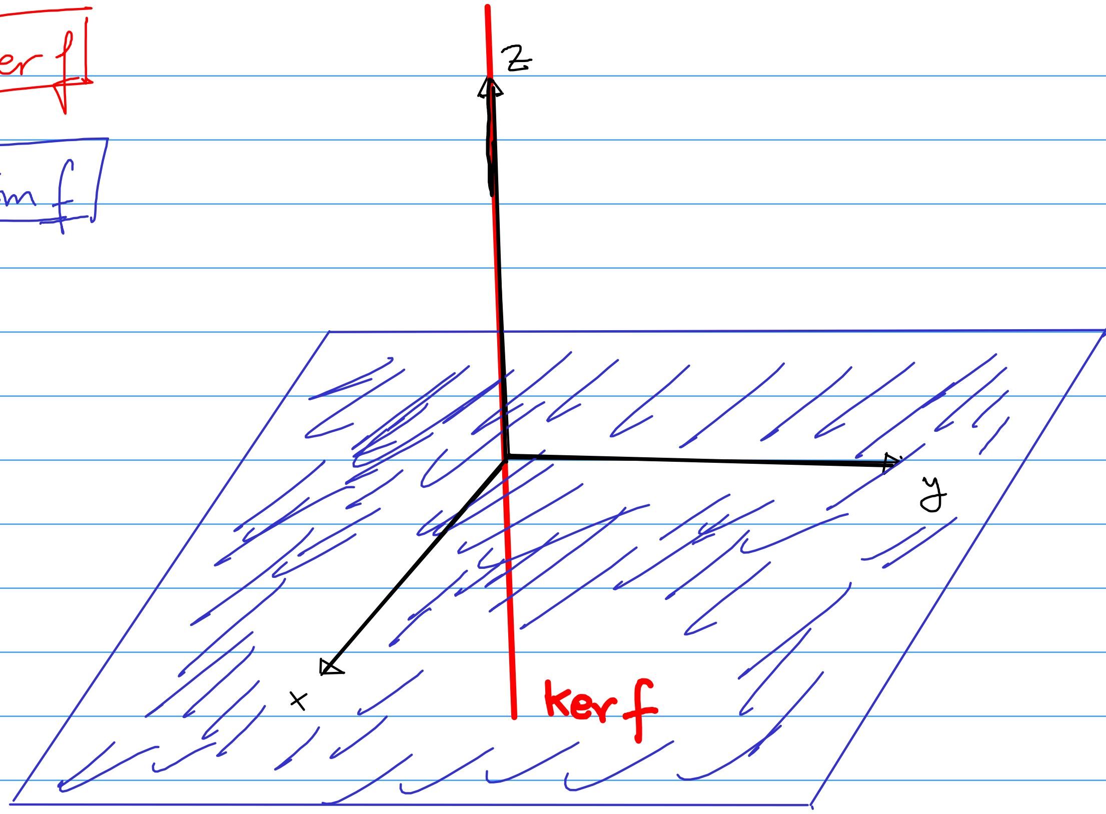
$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0,0), (1,1,0)\}$

Si $(x,y,z) \in \operatorname{Im} f \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = z \Rightarrow$

$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = 0\}$

c) $\boxed{\ker f}$

$\boxed{\operatorname{Im} f}$



5.15

a) $f: V \to V$ $\quad f(v) = f(-v) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} v = 0$

Esto es falso, basta con tomar

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to y-x$$

Para esta aplicación lineal $f(5,5) = f(-5,-5) = 0$ y $(5,5) \neq (0,0)$

b) $f: V \to V$ $\quad \dim(\operatorname{Ker} f) > 0$ entonces f^{-1} es una aplicación.

Esto es falso porque si $\dim \operatorname{Ker} f > 0$ entonces f no es inyectiva y por lo tanto no es biyectiva. Así que f^{-1} no existe.

c) $f: V \to W$ suprayectiva entonces $\dim V \geq \dim W$

Esto es cierto porque f suprayectiva $\Rightarrow \operatorname{Im} f = W$. Por otro lado $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V \Rightarrow$

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim W = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim W \leq \dim V$$

d) $f: V \to V$ entonces $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

Esto es falso. Basta tomar

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (y,0)$$

$$M_{\beta_c^2 \beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{\ker f} = \{(1,0)\} \\ \beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0)\} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \ker f \Rightarrow \text{la suma no es directa}$$

e)

Si las dos matrices, A y B, representan al mismo endomorfismo deben tener el mismo determinante:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$M_{\beta\beta}(f) = A \quad \text{y} \quad M_{\beta^*\beta^*}(f) = B$$

$$\Rightarrow \quad M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta^*} M_{\beta^*\beta^*}(f) \quad M_{\beta^*\beta}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = |M_{\beta\beta^*}| \quad B \quad |M_{\beta^*\beta}| =$$

$$= |M_{\beta\beta^*}| \, |M_{\beta\beta^*}^{-1}| \cdot |B| = |B|$$

Ahora bien:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3-C_1}{\overset{C_2+C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -10-30 = -40$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15-3 = -18$$

5.11 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$f(1,1,1,1) = (0,0,1)$ $\qquad$ $f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$

$f(1,1,1,0) = (0,0,-1)$ $\qquad$ $f(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$

Llamaremos $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,1,1,0)$, $v_3 = (1,0,1,0)$ y

$v_4 = (-1,-2,0,0)$.

3→ a) $f(1,0,0,0) = f(-v_4 - 2e_2) = -f(v_4) - 2f(e_2) = (-1,-1,-1) + (2,2,0)$
$= (1,1,-1)$

1→ $f(0,1,0,0) = f(v_2 - v_3) = f(v_2) - f(v_3) = (-1,-1,0)$

4→ $f(0,0,1,0) = f(v_3 - e_1) = f(v_3) - f(e_1) = (1,1,-1) - (1,1,-1) = (0,0,0)$

2→ $f(0,0,0,1) = f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = (0,0,2)$

Así que:

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\boxed{\text{Ker } f}$

$\text{Ker } f = \{(x,y,z,t) \text{ tq } f(x,y,z,t) = \vec{0}\} =$

$\left\{(x,y,z,t) \text{ tq } M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} =$

$\{(x,y,z,t) \text{ tq } x - y = -x + 2t = 0\}$

Por lo tanto:

$$* \ \dim \operatorname{Ker} f = 4 - rg\, M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) = 4-2=2$$

$$* \ \beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,0,\tfrac{1}{2}),\ (0,0,1,0)\}$$

$\boxed{\operatorname{Im} f}$

Como $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$, tenemos que $\dim \operatorname{Im} f = 2$ y necesitamos $\dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ ecuación para definir este subespacio.

$$\operatorname{Im} f = \langle (1,1,-1),\ (-1,-1,0),\ (0,0,0),\ (0,0,2) \rangle$$

columnas de $M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f)$

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(0,0,1),\ (1,1,0)\}$$

Si $(x,y,z) \in \operatorname{Im} f \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x+y$

Así que:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \text{ tq } y-x=0\}$$

c) $\beta = \{w_1=(1,1,1), w_2=(1,0,1), w_3=(1,1,0)\}$

Podemos recurrir a la fórmula:

$$M_{\beta_c^4 \beta}(f) = M_{\beta \beta_c^3}\ M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f)\ M_{\beta_c^4 \beta_c^4}$$

No obstante es más sencillo recurrir a la definición:

$f(e_1) = (1,1,-1) = w_1 - 2e_3 = w_1 - 2(w_1 - w_3) = -w_1 + 2w_3 = (-1,0,2)_\beta$

$f(e_2) = (-1,-1,0) = -w_3 = (0,0,-1)_\beta$

$f(e_3) = (0,0,0) = (0,0,0)_\beta$

$f(e_4) = (0,0,2) = 2(w_1 - w_3) = 2w_1 - 2w_3 = (2,0,-2)_\beta$

Así que:

$$M_{\beta_c^4 \beta}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f = \langle (-1,0,2)_\beta, (0,0,-1)_\beta, (0,0,0)_\beta, (2,0,-2)_\beta \rangle$

$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0,-1)_\beta, (0,0,1)_\beta\}$

Si $(x,y,z)_\beta \in \operatorname{Im} f \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y \Rightarrow y = 0$

Así que:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z)_\beta : y = 0\}$$

d) $\beta_1 = \{ s_1 = (1,1,1,0),\ s_2 = (1,1,0,0),\ s_3 = (1,0,0,0),\ s_4 = (1,1,1,1) \}$

$\beta_2 = \{ t_1 = (1,1,1),\ t_2 = (0,1,1),\ t_3 = (0,0,1) \}$

Recurrimos a la definición, aunque se podría utilizar la fórmula:

$$M_{\beta_1\beta_2}(f) = M_{\beta_2 \beta_c^3}\, M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f)\, M_{\beta_c^4 \beta_1}$$

$$f(s_1) = f(1,1,1,0) = \left[M_{\beta_c^4\beta_c^3}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^t = (0,0,-1) = -t_3 = (0,0,-1)_{\beta_2}$$

$$f(s_2) = f(1,1,0,0) = (0,0,-1) = (0,0,-1)_{\beta_2}$$

$$f(s_3) = f(1,0,0,0) = (1,1,-1) = t_1 - 2t_3 = (1,0,-2)_{\beta_2}$$

$$f(s_4) = f(1,1,1,1) = (0,0,1) = t_3 = (0,0,1)_{\beta_2}$$

Finalmente:

$$M_{\beta_1\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $(x,y,z,t)_{\beta_1} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \vec{0} = f((x,y,z,t)_{\beta_1}) = \left[M_{\beta_1\beta_2}(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right]^t =$

$= (z, 0, -x-y-2z+t)$

Así que $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t)_{\beta_1} : z = -x-y-2z+t = 0\}$

- Observa que $\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(0,0,1)_{\beta_2}, (1,0,-2)_{\beta_2}\}$, por lo tanto si $(x,y,z)_{B_2} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = y$

$\operatorname{Im} f = \{ (x,y,z)_{B_2} : y = 0 \}$

e) $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 2.$

5.16

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) : x+y+z=0 = x-y+2z\}$

$f(1,0,0) = (-1,2,0) \qquad f(0,1,0) = (1,1,0)$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = 3-2 = 1$

$B_{\operatorname{Ker} f} = \{(-3,1,2)\}$

Calculamos $f(0,0,1)$:

$f(0,0,1) = f\left(\frac{1}{2}\left[(-3,1,2) + 3e_1 - e_2\right]\right) =$

$= \frac{1}{2} f(-3,1,2) + \frac{3}{2} f(e_1) - \frac{1}{2} f(e_2) = \frac{1}{2}\left[(0,0,0) + (-3,6,0) - (1,1,0)\right]$

$= \left(-2, \frac{5}{2}, 0\right)$

Finalmente:

$f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) =$

$= x(-1,2,0) + y(1,1,0) + z\left(-2, \frac{5}{2}, 0\right) =$

$= \left(-x + y - 2z, 2x + y + \frac{5}{2}z, 0\right)$

Ejercicio $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^5}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Encontrar bases β y β' tales que

$$M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $\qquad$ $\beta' = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

$f(v_1) = (1,0,0,0,0)_{\beta'} = w_1$

$f(v_2) = w_2$

$f(v_3) = w_3$

$f(v_4) = \vec{0} \Rightarrow v_4 \in \operatorname{Ker} f$

Elegimos $v_4 = (x,y,z,t)$ imponiendo que pertenezca a $\operatorname{Ker} f$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x+3y+6z+t&=0 \\ y+3z+2t&=0 \\ z+3t&=0 \end{aligned}$$

Tomamos $t=1$, entonces:

$z=-3$, $y=7$, $x=-21+18-1=-4$

$$v_4 = (-4, 7, -3, 1)$$

Ahora elegimos v_1, v_2 y v_3 formando junto a v_4 una base y de manera que no pertenezcan a $\ker f$:

$v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$.

Se verifica que $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Estos valores de v_1, v_2 y v_3 determinan w_1, w_2 y w_3:

$w_1 = f(v_1) = (1,0,0,0,0)$

$w_2 = f(v_2) = (3,1,0,0,0)$

$w_3 = f(v_3) = (6,3,1,0,0)$

Ahora basta con elegir w_4 y w_5 formando una base junto con w_1, w_2, w_3:

$$w_4 = (0,0,0,1,0)$$

$$w_5 = (0,0,0,0,1)$$

β' es base porque:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$