Transparencias de MATEMÁTICAS (primer cuatrimestre)

Gabriel Soler López

Documento compilado con LaTeX el 21 de septiembre de 2011

Índice general

Capítulo 1

Nociones básicas

1. Conjuntos

Definiciones.

Llamaremos *conjunto* a cualquier colección de objetos. Cada uno de esos objetos se llamará *elemento* del conjunto.

Usualmente se denotarán a los conjuntos con letras mayúsculas y a sus elementos con minúsculas.

Un conjunto *A se dirá contenido en otro B* y se denotará por $A \subseteq B$ cuando todo elemento de A pertenece también a B.

Dos conjuntos, A y B , se dirán *iguales* si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

La pertenencia de un objeto a a un conjunto A se denotará por $a \in A$ y la no pertenencia por $a \notin A$.

Llamaremos *conjunto vacío*, $\emptyset$, al conjunto que no tiene elementos.

Diremos que un conjunto es *finito* si sólo contiene una cantidad finita de elementos.

El cardinal de un conjunto A es el número de elementos que éste contiene, pudiendo ser infinito. Lo denotaremos por $\mathrm{Card}\, A$.

Notación

$\{x : x \text{ satisface } \mathcal{P}\}$ denota al conjunto cuyos elementos satisfacen la propiedad $\mathcal{P}$.

1.1. Operaciones con conjuntos

Dados los conjuntos A, B y U tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$:

1. La *unión* de A y B es el conjunto: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$.

2. La *intersección* de A y B es el conjunto: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.

3. La *diferencia* de A y B es el conjunto: $A \backslash B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

4. El *complementario* de A en U es el conjunto: $A^c = U \backslash A$.

5. El *producto cartesiano* de A y B es el conjunto de pares: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

1.2. Propiedades de estas operaciones

Dados dos conjuntos, A y B, contenidos en el conjunto U, se tiene:

1. Propiedad conmutativa de la unión y la intersección: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

2. Propiedad asociativa de la unión y la intersección: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. Propiedad distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

6. $A \backslash B = A \cap B^c$.

7. Leyes de Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2. Conjuntos "famosos": los naturales, los enteros y los racionales

No introduciremos axiomáticamente a estos conjuntos, nos limitaremos a comentar algunas de sus propiedades.

Los números naturales, $\mathbb{N}$. Dentro de ellos hay definida una suma, una multiplicación y un orden, así como la propiedad básica que da lugar al *principio de inducción*:

Proposición 1.1. *Si un subconjunto de los números naturales S verifica que $1 \in S$ y la propiedad "$n \in S$ implica $n+1 \in S$", entonces $S = \mathbb{N}$.*

Proposición 1.2 (Principio de Induccción)**.** *Dada una familia $\{P(n) : n \in \mathbb{N}\}$, de forma que cada $P(n)$ es una propiedad dependiendo del correspondiente número natural, tal que:*

1. *$P(n_0)$ es cierta para un cierto $n_0 \geq 1$;*

2. *si asumimos que $P(n)$ es cierta para un $n \geq n_0$ (*hipótesis de inducción*), podemos probar que $P(n+1)$ es cierta;*

entonces se verifica $P(n)$ para todo número natural $n \geq n_0$.

Ejercicio 1.3.

Demostrar las siguientes propiedades:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2. Demostrar que los para cualquier número natural n el número $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$es un múltiplo de 11;

3. Demostrar que para todo número natural a, si $n + \frac{1}{n}$ es un número natural entonces $n^a + \frac{1}{n^a}$.

4. Demuestra que el número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos es 2^n.

5. Demuestra que el número de subconjuntos de j elementos que tiene un conjunto de n elementos es $\binom{n}{j}$.

6. Demuestra que el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$. ¿Por qué $n(n-3)$ es par?

Los números enteros, $\mathbb{Z}$, y los racionales, $\mathbb{Q}$.

El conjunto del los *números enteros es:*

$\mathbb{Z} := \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

y el conjunto de los *números racionales:*

$$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$$

.

Propiedades de la suma en $\mathbb{Z}$:

1. *Conmutativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ se verifica $a + b = b + a$.
2. *Asociativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ se verifica $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Existe un *elemento neutro para la suma* que es el número 0 y que verifica $a+0 = 0+a = a$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}$.
4. Para cada elemento $a \in \mathbb{Z}$ existe su *elemento opuesto*, que se denota por $-a$ y que verifica $a + (-a) = -a + a = 0$.

Propiedades del producto en $\mathbb{Z}$:

1. *Conmutativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ se verifica $ab = ba$.
2. *Asociativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ se verifica $(ab)c = a(bc)$.
3. Existe un *elemento neutro para el producto* que es el número 1 y que verifica $1a = a$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}$.

Propiedad de la suma respecto del producto:

1. *Distributiva:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ se verifica $a(b + c) = ab + ac$.

Propiedades de la suma en $\mathbb{Q}$:

1. *Conmutativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{Q}$ se verifica $a + b = b + a$.
2. *Asociativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ y $c \in \mathbb{Q}$ se verifica $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Existe un *elemento neutro para la suma* que es el número 0 y que verifica $a+0 = 0+a = a$ para cualquier $a \in \mathbb{Q}$.
4. Para cada elemento $a \in \mathbb{Q}$ existe su *elemento opuesto*, que se denota por $-a$ y que verifica $a + (-a) = -a + a = 0$.

Propiedades del producto en $\mathbb{Q}$:

1. *Conmutativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{Q}$ se verifica $ab = ba$.
2. *Asociativa:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ y $c \in \mathbb{Q}$ se verifica $(ab)c = a(bc)$.
3. Existe un *elemento neutro para el producto* que es el número 1 y que verifica $1a = a$ para cualquier $a \in \mathbb{Q}$.
4. Para cada elemento $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ existe su *elemento inverso*, que se denota por a^{-1} y que verifica $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Propiedad de la suma respecto del producto:

1. *Distributiva:* para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ y $c \in \mathbb{Q}$ se verifica $a(b + c) = ab + ac$.

Señalaremos las diferencias esenciales de ambos conjuntos:

1. El *supremo* (menor de las cotas superiores, es decir, de los números que son mayores o iguales que todos los del conjunto) de un conjunto, $S \subset \mathbb{Q}$, puede no existir en $\mathbb{Q}$, por ejemplo $E = \{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y no tiene supremo. En cambio, en los números enteros, todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.

   Ejemplo

   El conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < \sqrt{2}\}$ no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

   El conjunto $B = \{a \in \mathbb{Z} : a < \sqrt{2}\}$ tiene supremo en $\mathbb{Z}$ y es ....

2. Los números enteros no tienen inverso, mientras que los racionales, menos cero, sí lo tienen.
3. En general no existen raíces cuadradas en ambos conjuntos.

3. Aplicaciones

Definiciones

Una *aplicación entre dos conjuntos A y B* es una ley que envía cada elemento de A a un elemento de B.

Las aplicaciones suelen denotarse por letras minúsculas.

Para denotar que es una aplicación entre A y B se suele escribir $f : A \to B$.

$f(a) = b$ significa que f envía el elemento a al elemento b.

El conjunto A se llama *dominio* de la aplicación f.

El conjunto $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ se llama conjunto *imagen* de f.

La *aplicación identidad en el conjunto A* es la aplicación $Id_A : A \to A$ que verifica $Id(a) = a$ para todo $a \in A$.

Operación entre aplicaciones

Dadas dos aplicaciones, $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se define la *composición de f y g* como la aplicación:

$$\begin{array}{cccc} g \circ f : & A & \longrightarrow & C \\ & a & \to & g(f(a)). \end{array}$$

Tipos de aplicaciones

Dada una aplicación $f : A \to B$ se dice que f es:

1. *inyectiva* cuando, si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$,
2. *suprayectiva* cuando $f(A) = B$,
3. *biyectiva* cuando es a la vez inyectiva y suprayectiva.

Para una aplicación biyectiva, $f : A \to B$, se puede definir su *aplicación inversa:*

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} : & B & \longrightarrow & A \\ & b & \to & f^{-1}(b) = a / \ f(a) = b. \end{array}$$

Es claro ahora que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Ejercicio

Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

Solución.

Si f no fuera inyectiva existirían $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$. Pero ahora también tendríamos $g(f(a)) = g(f(b))$, lo que contradice la inyectividad de $g \circ f$. Así que f debe ser inyectiva.

Observación a este ejercicio

Podemos poner un contraejemplo a la afirmación "si $g \circ f$ es inyectiva entonces g es inyectiva".

En efecto, basta con tomar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. En este caso tendríamos que g no es inyectiva y sin embargo $g \circ f(x) = e^{2x}$ que sí es inyectiva porque es estrictamente creciente.

Ejercicio

Demostrar que no existe una aplicación biyectiva entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Solución.

Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que existe tal aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ahora definimos el subconjunto de números naturales $T = \{n : n \notin f(n)\}$, dicho subconjunto tendrá una antiimagen mediante f, pongamos que $f(m) = T$ y llegamos a una contradicción porque m ni está en T ni no está en T:

- Si $m \in T$ entonces satisface la propiedad de los elementos que están en T, es decir, $m \notin f(m) = T$; una contradicción.
- El otro caso es que $m \in T = f(m)$, pero en este caso m no satisface la condición de los elementos de T, así que $m \notin T$; otra contradicción.

Por lo tanto no es cierto que haya una aplicación biyectiva entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ejercicio

Construir una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

4. Leyes de composición. Estructuras algebraicas

Definición 1.4 (Leyes de composición)**.** *Una* ley de operación interna o ley de composición interna *sobre un conjunto A es una aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \to & *(a,b) = a * b. \end{array}$$

Dados dos conjuntos, A y B, una ley de operación externa *sobre el conjunto A es una* *aplicación del tipo:*

$$\begin{array}{rccl} \wedge: & A \times B & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \to & \wedge(a,b) = a \wedge b. \end{array}$$

Propiedades que pueden verificar las leyes de composición. Fijado un conjunto A y una ley de operación interna $*$, se tiene:

1. La ley de composición interna $*$ es *conmutativa* si y sólo si $a * b = b * a$ para cualesquiera a y b de A.

2. La ley de composición externa $*$ es *asociativa* si y sólo si $a * (b * c) = (a * b) * c$ para cualesquiera a, b y c de A.

3. Se dice que un elemento $e \in A$ es *elemento neutro* para la operación $*$ si y sólo si $a * e = e * a = a$.

4. Se dice que el elemento $a \in A$ es *simétrico* de $b \in A$ si y sólo si $a * b = b * a = e$ (elemento neutro).

Observación

Los elementos simétricos y neutros son únicos.

Definición 1.5 (Grupo)**.** *Dado el conjunto G y una operación definida sobre él, $*$, diremos que el par $(G, *)$ es un* grupo *si se tiene que la operación $*$ es asociativa, tiene elemento neutro y cualquier elemento de G tiene simétrico.*

Si además la operación $*$ es conmutativa, estaremos ante un grupo conmutativo *o* abeliano.

Ejemplos

$(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano.

$(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

$(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo abeliano.

$(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

$(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

$(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ no es un grupo abeliano.

$(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo abeliano.

$(\mathbb{N}, \cdot)$ no es un grupo abeliano.

$(\mathbb{Z}_4, +)$ es un grupo abeliano, donde $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ y la ley de operación interna $+$ viene definida por la siguiente tabla:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$(\mathbb{Z}_4 \backslash \{0\}, \cdot)$ no es un grupo abeliano, donde $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ y la ley de operación interna $\cdot$ viene definida por la siguiente tabla:

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Definición 1.6 (Anillo). *Dado el conjunto G y dos operaciones internas definidas sobre él, $*$ y $+$, diremos que la terna $(G, +, *)$ es un* anillo *si $(G, +)$ es un grupo abeliano, la operación $*$ es asociativa y además para cualesquiera a, b y c de A, se tiene que $a * (b + c) = a * b + a * c$ y $(a + b) * c = a * c + b * c$.*

Si además la operación $*$ es conmutativa, estaremos ante un anillo conmutativo*. Por otro lado, si la operación $*$ tiene elemento neutro diremos que el* anillo tiene unidad*.*

Ejemplos

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ no es un anillo.

$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 1.7 (cuerpo). *Dado el conjunto $\mathbb{K}$ y dos operaciones internas definidas sobre él, $*$ y $+$, diremos que la terna $(\mathbb{K}, +, *)$ es un* cuerpo *si es un anillo con unidad, 1, y además $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, *)$ es un grupo abeliano, siendo $0 \in \mathbb{K}$ el elemento neutro de la operación $+$. Adicionalmente se debe exigir $1 \neq 0$.*

Ejemplos

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un cuerpo, siendo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ y las operaciones definidas por:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

5. Los números reales

Llamaremos *cuerpo de los números reales* a un conjunto, denotado por $\mathbb{R}$, dotado de dos leyes de operación interna, $+$ y $\cdot$, y una relación binaria de orden $\leq$, de forma que:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

2. $\leq$ es un orden total, es decir, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ o bien $x \leq y$ o $y \leq x$.

3. $\leq$ es compatible con las operaciones, es decir, para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$:

   - Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$.
   - Si asumimos que $0 \leq z$ y $x \leq y$ entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$.

4. Axioma de completitud: todo subconjunto, S de $\mathbb{R}$, acotado superiormente (resp. inferiormente) tiene un supremo (resp. ínfimo) en $\mathbb{R}$.

Asumiremos la existencia de un conjunto dotado de estas propiedades y que contiene a los números racionales, puesto que la construcción es bastante técnica, difícil y larga.

Propiedades de $\mathbb{R}$.

Proposición 1.8 (Propiedad arquimediana)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ (es decir, $x \geq 0$ y $x \neq 0$) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.*

Proposición 1.9 (Parte entera de un número real)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z - 1 \leq x < z$. El número $z - 1$ recibe en nombre de parte entera de x.*

Proposición 1.10 (Densidad de los racionales)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x \leq q \leq y$ (el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, también es denso en $\mathbb{R}$).*

Principio de los intervalos encajados de Cantor.

Una familia de intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots,$ se dice que constituyen una familia decreciente de *intervalos encajados* si verifican la relación: $\cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq I_2 \subseteq I_1$.

Teorema 1.11 (Cantor)**.** *Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familida decreciente de intervalos encajados, cerrados. Entonces:*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{I_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

6. Los números complejos

Llamaremos *números complejos* al conjunto:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

y definiremos sobre él las siguientes dos operaciones:

1.
$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a + bi, c + di) & \to & (a + c) + (b + d)i, \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a + bi, c + di) & \to & (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{array}$$

Con estas dos operaciones se puede ver que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, llamado *cuerpo de los números complejos*.

$\mathbb{R}$ es un subconjunto de los números complejos, en efecto, el número real a se puede identificar con el número complejo $a + 0i$.

Para cada número real $z = a + bi$, llamaremos *parte real* de z a a y *parte imaginaria* a b.

Llamaremos *unidad imaginaria* a i, que normalmente se identifica con $\sqrt{-1}$, ya que $i^2 = -1 + 0i = -1$.

Se define el *conjugado* de un número complejo $z = a + bi$ y se denota por $\overline{z}$ como:

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Ejercicio

Demostrar que para cada par de números complejos, z_1 y z_2:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$,
- $z_1\overline{z_1} \in \mathbb{R}$, además $z_1\overline{z_1} > 0$ si $z_1 \neq 0$.

Observación

Los números complejos es que aseguran la existencia de raíces para cualquier polinomio, cosa que en $\mathbb{R}$ no sucede, sin ir más lejos el polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales y sin embargo tiene raíces en $\mathbb{C}$.

Observación

Cualquier polinomio real $r(x)$ se descompone como producto de polinomios de primer y segundo grado, los primeros asociados a las raíces reales de $r(x)$ y los segundos a las raíces complejas.

En efecto, si un polinomio real $r(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$ tiene raíces reales $a_1, a_2, \dots a_k$ (con multiplicidades respectivas $m_1, m_2, \dots, m_k$), raíces complejas (puras) $b_1 + c_1 i, b_2 + c_2 i, \dots b_t + c_t i$ (con multiplicidades respectivas $n_1, n_2, \dots, n_t$) y sus conjugadas $b_1 - c_1 i, b_2 - c_2 i, \dots b_t - c_t i$ (también con multiplicidades respectivas $n_1, n_2, \dots, n_t$), entonces se descompone como sigue:

$$\begin{aligned} r(x) &= A_n \prod_{i=j}^{k} (x - a_j)^{m_j} \cdot \prod_{j=1}^{t} \{[x - (b_j + c_j i)][x - (b_j - c_j i)]\}^{n_j} \\ &= A_n \prod_{i=j}^{k} (x - a_j)^{m_j} \cdot \prod_{j=1}^{t} \{[x^2 - 2b_j + (b_j^2 + c_j^2)]\}^{n_j} \end{aligned}$$

Ejemplo

Vamos a descomponer el polinomio $x^4 + 1$.

Es fácil darse cuenta que este polinomio no tiene raíces reales porque para cualquier número real x se tiene que $x^4 + 1 \geq 1 > 0$. Las raíces del polinomio verifican $x^4 = -1 = e^{i\pi + 2k\pi}$ para cualquier entero k, así que $x = \sqrt[4]{e^{i\pi+2k\pi}}$ y $x = e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}}$. Finalmente tenemos que las cuatro raíces (complejas) del polinomio son:

$$x_1 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ x_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ x_3 = \overline{x_2} = e^{i\frac{5\pi}{4}},\ x_4 = \overline{x_1} = e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_3 = \overline{x_2} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ x_4 = \overline{x_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i. \end{aligned}$$

Descomponemos seguidamente el polinomio:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x - x_1)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

6.1. Representación módulo argumental de los números complejos.

El *módulo de un número complejo z* es el número real dado por la raíz cuadrada positiva de $z\overline{z}$.

La expresión $e^{i\theta}$ representa el número complejo de módulo 1 $cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Aquí θ tiene un significado geométrico, es el ángulo que el vector $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ forma con el semieje positivo Ox.

Cualquier número complejo z se puede expresar como el producto $me^{i\theta}$, donde m es el módulo de z y $e^{i\theta}$ es el complejo de módulo 1 dado por $\frac{z}{\sqrt{z\overline{z}}}$.

Operaciones entre números dados en representación módulo argumental

Dados $z_1 = m_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = m_2e^{i\theta_2}$ y $r \in \mathbb{Q}$, se tiene:

1. $z_1z_2 = m_1e^{i\theta_1}m_2e^{i\theta_2} = m_1m_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{m_1e^{i\theta_1}}{m_2e^{i\theta_2}} = \frac{m_1}{m_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$,

3. $z_1^r = \left(m_1e^{i\theta_1}\right)^r = m_1^re^{r\theta_1}$.

7. Ejercicios resueltos

Ejercicio

Demostrar la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

siendo n un número natural mayor o igual que 1.

Demostraremos la fórmula por inducción.

Para $n=1$ la fórmula se satisface ya que:

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^j b^{1-j} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$$

Ahora deducimos la fórmula para $n+1$ partiendo de la fórmula para n :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\
&= a\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} + b\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} = \\
= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 &+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \right] + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Así que la fórmula del binomio de Newton vale para cualquier número natural n.

Ejercicio

Da contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

   Solución.

   Esta afirmación es falsa, basta con tomar $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ahora se tiene:

   $$(A \cap B)^c = \{3, 4\}^c = \{1, 2, 5, 6, 7\} \neq \emptyset = \{5, 6, 7\} \cap \{1, 2\} = A^c \cap B^c$$

2. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

   Solución.

   Esta afirmación también es falsa, basta con tomar $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ahora se tiene:

   $$(A \cup B)^c = \emptyset \neq \{1, 2, 5, 6, 7\} = \{5, 6, 7\} \cup \{1, 2\} = A^c \cup B^c$$

Ejercicio

Demostrar la siguiente igualdad del producto cartesiano:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Solución.

Demostramos la inclusión $\subseteq$: sea $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$, así que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in C \times D$; por lo tanto $x \in A, y \in B$ y $x \in C, y \in D$. Ahora se ve claro que $x \in A \cap C$ y que $y \in B \cap D$, por lo tanto $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ y la inclusión está demostrada.

Demostramos ahora la inclusión $\supseteq$: sea $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$, así que $x \in A \cap C$ e $y \in B \cap D$, es decir $x \in A, x \in C, y \in B, y \in D$. Ahora se ve claro que $(x, y) \in A \times B$ y que $(x, y) \in C \times D$, por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Ejercicio

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres aplicaciones, demostrar que se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.

   Solución.

   Tenemos que demostrar que tomados elementos $a, c \in A$ tales que $a \neq c$ entonces $g \circ f(a) \neq g \circ f(c)$. Por ser $a \neq c$ y f inyectiva tenemos que $f(a) \neq f(c)$. Ahora aplicamos la inyectividad de g y entonces: $g \circ f(a) = g(f(a)) \neq g(f(c)) = g \circ f(c)$. Así que $g \circ f$ es inyectiva.

2. Si f y g son suprayectivas entonces $g \circ f$ es suprayectiva.

   Solución.

   En efecto, dado $c \in C$, por la suprayectividad de g sabemos que existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Ahora la suprayectividad de f implica la existencia de un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto $g(f(a)) = g \circ f(a) = c$ y esto demuestra que todo elemento de C es imagen de algún elemento de A, es decir $g \circ f$ es suprayectiva.

3. Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.

   Solución.

   Es consecuencia de la demostración de los dos apartados anteriores.

4. Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

   Solución.

   Si f no fuera inyectiva existirían $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$. Pero ahora también tendríamos $g(f(a)) = g(f(b))$, lo que contradice la inyectividad de $g \circ f$. Así que f debe ser inyectiva.

Ejercicio

Demuestra que si un conjunto A tiene n elementos entonces el número de subconjuntos de j elementos que se pueden formar con los elementos de A es $\binom{n}{j}$.

Solución.

Fijamos n y hacemos la demostración por inducción en j.

Para $j = 0$ el único subconjunto con 0 elementos es el conjunto vacío, así que tenemos un único subconjunto. Por otro lado $\binom{n}{0} = 1$, así que la propiedad se verifica.

Supongamos que la propiedad se verifica para un número j, es decir:

"el número de subconjuntos de j elementos que se pueden formar con n elementos es $\binom{n}{j}$"

De esta hipótesis de inducción tendremos que deducir que la propiedad se verifica para $j+1$, es decir:

"el número de subconjuntos de $j+1$ elementos que se pueden formar con n elementos es $\binom{n}{j+1}$"

Para deducir esto pensamos que los subconjuntos de $j+1$ elementos los puedo formar con los subconjuntos de j elementos añadiéndoles los $n-j$ elementos que no están en el subconjunto. No obstante un mismo subconjunto construido así, por ejemplo

$$S_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_j\}$$

estará contado $j+1$ veces porque se puede construir añadiendo el último elemento cualquiera de los del subconjunto.

Así que el número de subconjuntos de $j+1$ elementos que se pueden formar con n elementos es:

$$\binom{n}{j}\frac{n-j}{j+1} = \frac{n!(n-j)}{(n-j)!j!(j+1)} = \frac{n!}{(n-j-1)!(j+1)!} = \binom{n}{j+1}$$

y la propiedad queda demostrada.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$

Desarrolla los binomios $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ y $(a+b)^5$.

Solución.

Utilizaremos el triángulo de Tartaglia:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

Recordamos que este triángulo nos da los números combinatorios:

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

Con estos datos podemos calcular los binomios solicitados:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

REPASO DE PRIMITIVAS

8. Consideraciones generales

El cálculo de primitivas es el proceso contrario al de derivación. Dada una función real de variable real $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entendemos por *primitiva* de f a una función $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable y tal que $F'(c) = f(c)$ para todo $c \in (a,b)$.

Observación 1.12.

- *La primitiva de una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ no es única.*
- *Dos primitivas de una misma función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, F y G difieren en una constante. La prueba de esta segunda parte de la observación consisten en ver que la función $H(x) = F(x) - G(x)$ es una función constante, lo cual se consigue demostrando que la derivada de H es 0.*

  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = 0$, *luego H es constante.*

8.1. Primitivas inmediatas

Sólo sabiendo derivar podemos conocer la primitiva de una amplia variedad de funciones, el conocimiento de dichas primitivas (elementales) junto con algunas técnicas serán suficientes para poder calcular primitivas de una amplia variedad de funciones.

1. $\int a^x \ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1, I = (-\infty, +\infty),$
2. $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty)$
3. $\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1, I = (0, +\infty),$
4. $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \log x + K, \qquad I = (0, +\infty),$
5. $\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
6. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + K = \frac{\pi}{2} - \arccos x + K, \qquad I = (-1, +1),$
8. $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
9. $\int (1 + \tan^2 x) \, \mathrm{d}x = \int \sec^{-2} x \, \mathrm{d}x = \tan x + K, \qquad I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$
10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} x + K, \qquad I = (0, \pi),$

A continuación se relacionan algunas propiedades útiles para calcular primitivas de otras funciones partiendo de las anteriores.

8.2. Utilizar la regla de la cadena para las primitivas

Proposición 1.13. *Sean f y g funciones derivables definidas en el intervalo (a, b). Entonces se verifica la fórmula:*

$$\int f'(g(x))g'(x) \, \mathrm{d}x = f \circ g(x) + K.$$

Esta proposición permite ampliar la relación de primitivas dadas anteriormente. En efecto, para cualquier función derivable f se tienen las siguientes primitivas:

1. $\int a^{f(x)} f'(x) \ \mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1,$

2. $\int e^{f(x)} f'(x) \, \mathrm{d}x = e^{f(x)} + K,$

3. $\int f(x)^r f'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1,$

4. $\int f(x)^{-1} f'(x) \, \mathrm{d}x = \log f(x) + K,$

5. $\int \operatorname{sen} f(x) f'(x) \, \mathrm{d}x = -\cos f(x) + K,$

6. $\int \cos f(x) f'(x) \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} f(x) + K,$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} f(x) + K = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} f(x) + K,$

8. $\int \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x) \, \mathrm{d}x = \arctan f(x) + K,$

9. $\int (1 + \tan^2 f(x)) f'(x) \, \mathrm{d}x = \int \sec^{-2} f(x) \, \mathrm{d}x = \tan f(x) + K,$

10. $\int f'(x) \operatorname{cosec}^2 f(x) \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} \, f(x) + K,$

Ejemplo 1.14. *La integral de la función tangente se encuentra en la situación de la proposición anterior. En efecto:*

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\log|\cos x| \textit{ en todo intervalo tal que } \cos x \neq 0.$$

8.3. Integración de sumas y por partes

Proposición 1.15. *Dadas funciones $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ y un número real λ, se verifica:*

- $\int (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x,$
- $\int \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\ \mathrm{d}x.$

Ejemplo 1.16 (Integración de polinomios)**.**

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_p x^p)\ \mathrm{d}x = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots a_p \frac{x^{p+1}}{p+1} + K.$$

Proposición 1.17 (Regla de derivación por partes)**.** *Dadas funciones $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, se verifica:*

$$\int f(x) g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 1.18.

$\int \operatorname{sen}^2 x\ \ \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} x(-\cos x)'\ \ \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x)' \cos x\ \ \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\ \mathrm{d}x,$

de donde:

$\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\ \mathrm{d}x.$

Por lo tanto:

$2 \int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + x$ *y*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.}$$

Ejercicio 1.19.

Obtener una fórmula de recurrencia para calcular la primitiva $\int \frac{1}{(1+x^2)^r}\ \mathrm{d}x$.

Ejemplo 1.20. *Calcula la primitiva $I = \int e^{-3x} \operatorname{sen}(2x) dx$.*

Procedemos por el método de integración por partes haciendo $u = e^{-3x}$ y $dv = \operatorname{sen}(2x) dx$, así que $du = -3e^{-3x} dx$ y $v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

$$I = -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos(2x) - 3\frac{1}{2} \int \cos(2x) e^{-3x} dx.$$

Volvemos a hacer partes poniendo ahora $u_1 = e^{-3x}$ *y* $dv_1 = \cos(2x)dx$*, así que* $du_1 = -3e^{-3x}dx$ *y* $v_1 = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(2x)$*. Por lo tanto:*

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos(2x) - 3\frac{1}{2}\int \cos(2x)e^{-3x}dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos(2x) - \frac{3}{2}\left(e^{-3x}\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(2x) + 3\frac{1}{2}\int e^{-3x}\mathrm{sen}\,(2x)dx\right) \\ &\Rightarrow I = -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos(2x) - \frac{3}{4}e^{-3x}\mathrm{sen}\,(2x) - \frac{9}{4}I \\ &\Rightarrow \frac{13}{4}I = -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos(2x) - \frac{3}{4}e^{-3x}\mathrm{sen}\,(2x) \\ &\Rightarrow I = -\frac{2}{13}e^{-3x}\cos(2x) - \frac{3}{13}e^{-3x}\mathrm{sen}\,(2x). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.21. *Calcula la primitiva* $I = \int x \arctan x dx$*.*

Procedemos por el método de integración por partes haciendo $u = \arctan x$ *y* $dv = xdx$*, así que* $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ *y* $v = \frac{x^2}{2}$*.*

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\arctan x + K \end{aligned}$$

9. Integración por cambio de variable

Supongamos que queremos encontrar la primitiva de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. En este apartado se trata de ver cómo simplificar dicho cálculo a través de un cambio de variable. Supongamos que $t(x)$ denota una función invertible y derivable y calculemos su derivada $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t'(x)$, que *formalmente* podemos escribir como $\mathrm{d}t = t'(x)\,\mathrm{d}x$.

A través de unos cálculos justificativos que el alumno puede seguir en el Libro de J. A. Fernández Viña (Análisis matemático, tomo 1, página 254) se puede obtener la igualdad:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\frac{1}{t'(x)}\,\mathrm{d}t,$$

donde en el segundo miembro de la igualdad una ver hecha la primitiva hay que substituir t por $t(x)$.

Ejemplo 1.22. *Vamos a calcular mediante un cambio de variable la primitiva* $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$, *consideraremos el cambio* $t = \sqrt{x}$.

Efectuando el cambio, tendremos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \frac{2}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t = 2\arctan \sqrt{x}.$$

10. Primitivas de fracciones racionales

El método para calcular primitivas de fracciones racionales se basa en la descomposición de una fracción racional en fracciones simples. Recordemos que una *fracción racional* en la variable x no es más que un cociente de polinomios en la variable x. En cambio, una *fracción racional simple* o una *fracción simple* es una fracción racional de una de las dos formas siguientes:

1. una fracción racional cuyo numerador es una constante y cuyo denominador es un polinomio de grado 1,

2. una fracción racional cuyo numerador es un polinomio de grado 1 y cuyo denominador es un polinomio de grado 2 sin raíces reales.

Teorema 1.23. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k}{(x-a_n)^k},$$

donde los a_i *son las raíces de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades. Finalmente los* A_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Teorema 1.24. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k^1}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k^n}{(x-a_n)^k} +$$
$$\sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_k^1 x + C_k^1}{\{[x-(b_1+c_1 i)][x-(b_1-c_1 i)]\}^k}$$
$$+ \cdots + \sum_{k=1}^{\beta_l} \frac{B_k^l x + C_k^l}{\{[x-(b_l+c_l i)][x-(b_l-c_l i)]\}^k},$$

donde los a_i *son las raíces reales de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades de dichas raíces, los* $b_j + c_j i$ *son las raíces complejas de* $Q(x) = 0$ *y* β_j *son las multiplicidades de dichas raíces. Finalmente los* A_i, B_i *y* C_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Apoyándose en el teorema anterior se puede deducir un método para hacer primitivas de fracciones racionales. El método consistirá en obtener la descomposición anterior y calcular primitivas sumando a sumando.

Ejercicio

Calcula la primitiva $\int \frac{1}{x^4+1} dx$.

11. Primitivas de expresiones que contienen $\frac{ax+b}{cx+d}$

Sea F una fracción racional del tipo:

$$F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right),$$

de forma que n es el mínimo común múltiplo de los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Entonces el cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

transforma la primitiva $\int F\, dx$ en la primitiva de una fracción racional en la variable t.

Ejercicio 1.25.

Resolver las primitivas[1]:

[1]Indicación: los cambios necesarios serán tomar t igual a $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt{1-x}$ y $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,

2. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$,

3. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x$.

12. Las funciones hiperbólicas

Recordamos que las funciones seno y coseno se introducen utilizando la función exponencial compleja de la forma que sigue:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}.$$

Si en vez de considerar la exponencial compleja consideramos la exponencial real obtendremos las *funciones coseno y seno hiperbólicos* definidas concretamente como siguen:

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2},$$

es fácil ver que ambas funciones son continuas y están definidas sobre todo $\mathbb{R}$. Además, la función coseno hiperbólico es siempre mayor que cero ya que la exponencial siempre es mayor que cero. Por lo tanto podemos dividir la función seno hiperbólico por la función coseno hiperbólico y obtenemos la función tangente hiperbólica, continua y definida sobre todo $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}.$$

A partir de estas definiciones se pueden obtener sin dificultad las propiedades básicas de las funciones hiperbólicas, propiedades análogas (que no iguales) a las de las funciones trigonométricas:

Teorema 1.26.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\,(-x) &= \mathrm{Ch}\,x & \cos(-x) &= \cos x\\
\mathrm{Sh}\,(-x) &= -\mathrm{Sh}\,x & \mathrm{sen}\,(-x) &= -\mathrm{sen}\,x\\
\mathrm{Th}\,(-x) &= -\mathrm{Th}\,(x) & \tan(-x) &= -\tan x\\
\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x &= 1 & \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x &= 1\\
1 - \mathrm{Th}^2 x &= \frac{1}{\mathrm{Ch}^2} & 1 + tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\\
\mathrm{Ch}\,(x+y) &= \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,y & \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \mathrm{sen}\,x\mathrm{sen}\,y\\
\mathrm{Ch}\,(2x) &= \mathrm{Ch}^2 x + \mathrm{Sh}^2 x & \cos(2x) &= \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x\\
\mathrm{Ch}\,(x-y) &= \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,y & \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \mathrm{sen}\,x\mathrm{sen}\,y\\
\mathrm{Sh}\,(x+y) &= \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Sh}\,y & \mathrm{sen}\,(x+y) &= \mathrm{sen}\,x\cos y + \cos x\mathrm{sen}\,y\\
\mathrm{Sh}\,(2x) &= 2\mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,x & \mathrm{sen}\,(2x) &= 2\mathrm{sen}\,x\cos x\\
\mathrm{Sh}\,(x-y) &= \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Sh}\,y & \mathrm{sen}\,(x-y) &= \mathrm{sen}\,x\cos y - \cos x\mathrm{sen}\,y\\
\mathrm{Th}\,(x+y) &= \frac{\mathrm{Th}\,x + \mathrm{Th}\,y}{1 + \mathrm{Th}\,x\mathrm{Th}\,y} & \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}\\
\mathrm{Th}\,(x-y) &= \frac{\mathrm{Th}\,x - \mathrm{Th}\,y}{1 - \mathrm{Th}\,x\mathrm{Th}\,y} & \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}
\end{aligned}$$

Además de estas propiedades que dependen únicamente de la definición de las funciones hiperbólicas, por la propia definición estas funciones son derivables, viniendo recogidas sus propiedades en lo que sigue:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}'x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{Ch}\,x,\\
\mathrm{Ch}'x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{Sh}\,x,\\
\mathrm{Th}'x = \left(\frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x}\right)' &= \frac{\mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\mathrm{Sh}'x = \mathrm{Ch}\,x, \quad \mathrm{Ch}'x = \mathrm{Sh}\,x, \quad \mathrm{Th}'x = \tfrac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}.}$$

Ahora que conocemos las derivadas de las funciones hiperbólicas se puede ver fácilmente que $\mathrm{Sh}'x$ y $\mathrm{Th}'x$ son números reales estrictamente mayores que cero, luego ambas funciones son

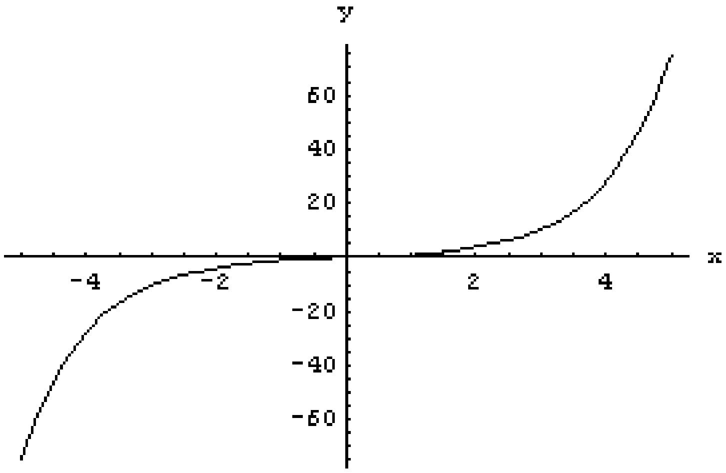

Figura 1.1: Función seno hiperbólico

estrictamente crecientes y por lo tanto aplicaciones inyectivas. Estudiando los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ conoceremos entre qué intervalos ambas funciones son biyectivas.

Observación 1.27.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Sh} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Sh} x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Th} x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Th} x = -1.$$

Teorema 1.28. *Las funciones:*

$$\begin{array}{rcccc} \operatorname{Sh} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \to & \operatorname{Sh} x \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcccc} \operatorname{Th} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & (-1,1) \\ & x & \to & \operatorname{Th} x \end{array}$$

son biyectivas.

Sin embargo, la función coseno hiperbólico no es una aplicación biyectiva cuando la consideramos definida sobre todo $\mathbb{R}$, es más, mediante el uso de las derivadas de la función Ch se puede ver que dicha función tiene un mínimo en $x = 0$.

12.1. Los argumentos hiperbólicos de las funciones hiperbólicas

Hemos visto ya que las funciones seno y tangente hiperbólicas son invertibles, con lo cual nos podemos plantear la búsqueda de sus funciones inversas, éstas funciones se llamarán *argumento del seno hiperbólico* y *argumento de la tangente hiperbólica.*

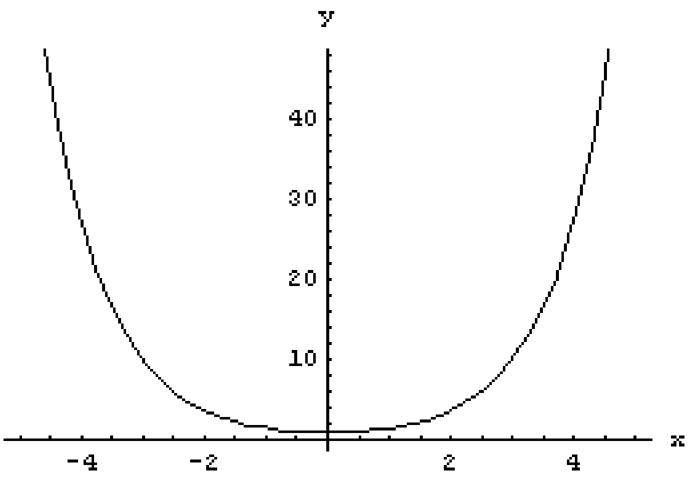

Figura 1.2: Función coseno hiperbólico

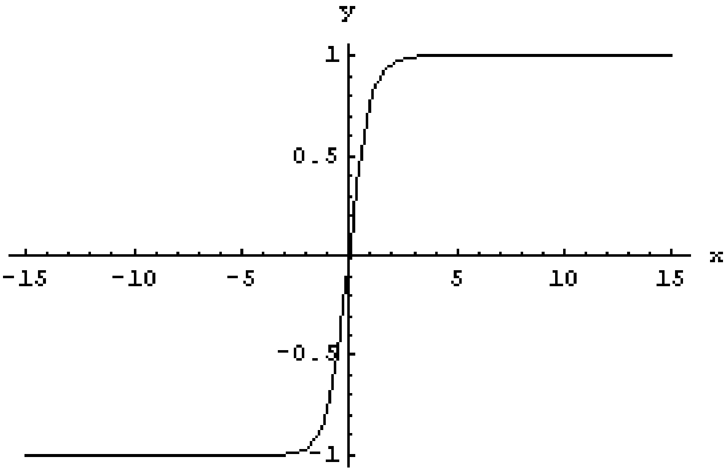

Figura 1.3: Función tangente hiperbólica

Aunque la función coseno hiperbólico no sea una biyección, si la consideramos definida sólo sobre la semirrecta positiva o negativa, sí que es un biyección y tiene sentido buscar el *argumento del coseno hiperbólico.*

$\boxed{\text{Argumento del seno hiperbólico}}$

Partiendo de la igualdad $y = \operatorname{Sh} x$, encontrar el argumento del seno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello seguimos los siguientes pasos:

$$\operatorname{Sh} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh} x = e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \\ \Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora hay que observar que el signo menos anterior no tiene sentido ya que para él, z sería negativo, sin embargo z debe ser positivo por ser igual a e^x. Entonces:

$$\operatorname{ArgSh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Argumento del coseno hiperbólico

Partiendo ahora de la igualdad $y = \operatorname{Ch} x$, encontrar el argumento del coseno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello procedemos como antes:

$$\operatorname{Ch} x = y \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch} x = e^x + e^{-x} = 2y \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \\ \Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}. \end{aligned} \tag{3}$$

En este caso el signo menos sí tiene sentido porque no hace que z sea negativo. Entonces:

$$\operatorname{ArgCh} y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

Argumento de la tangente hiperbólica

Observemos para empezar que la tangente hiperbólica sólo estará definida en el intervalo $(-1, 1)$, ya que la tangente hiperbólica sólo toma valores en dicho intervalo. Partimos de la igualdad $y = \operatorname{Th} x$ y hacemos en los cálculo que siguen el cambio de variable $z = e^x$:

$$\operatorname{Th} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = (z + \frac{1}{z})y \Rightarrow \frac{z^2 - 1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z}y$$
$$\Rightarrow (y - 1)z^2 = -1 - y \Rightarrow z^2 = \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow x = \log \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{ArgTh} y = \log \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

12.2. Las derivadas de las funciones hiperbólicas y sus análogas trigonométricas

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sh}' x &= \operatorname{Ch} x, & \operatorname{sen}' x &= \cos x \\
\operatorname{Ch}' x &= \operatorname{Sh} x, & \cos' x &= -\operatorname{sen} x \\
\operatorname{Th}' x &= \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}, & \tan' x &= \frac{1}{\cos^2} \\
\operatorname{ArgSh}' x &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, & \operatorname{arcsen}' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}} \\
\operatorname{ArgCh}' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}, & \arccos' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}} \\
\operatorname{ArgTh}' x &= \frac{1}{1 - x^2}, & \arctan' x &= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

13. Primitivas de expresiones que contienen $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$

En esta sección vamos a analizar cómo obtener primitivas del estilo $\int f(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx$, donde f es una fracción racional y el intervalo donde queremos calcular la primitiva será $(-\pi, \pi)$.

13.1. El cambio de variable $x = 2 \arctan t$

El cambio de variable $x = 2 \arctan t$, es decir, $t = \tan \frac{x}{2}$, pone en correspondencia el intervalo $(-\pi, \pi)$ con toda la recta real. Al realizar este cambio será de utilidad tener en cuenta las relaciones trigonométricas usuales que dan las siguientes igualdades:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{5}$$

Al realizar este cambio de variable y tener en cuenta las relaciones anteriores convertiremos la primitiva inicial en la de una fracción racional en la variable t:

$$\int f(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aunque este cambio nos asegura el éxito en la resolución de primitivas, otros pueden conllevar una resolución más simple. Veámoslo.

13.2. El cambio $t = \operatorname{sen} x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\operatorname{sen} x)\cos x$ entonces el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ nos lleva a una resolución más sencilla. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\cos x$ nos quedan sólo potencias pares de $\cos x$, pues basta poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

13.3. El cambio $t = \cos x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\cos x)\operatorname{sen} x$ entonces el cambio de variable $t = \cos x$ nos lleva a una resolución más sencilla que utilizando el primer cambio de la tangente del ángulo mitad. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\operatorname{sen} x$ nos quedan sólo potencias pares de $\operatorname{sen} x$, pues basta poner $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

13.4. El cambio $t = \tan x$

En el caso en el que la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea del estilo $f_1(\tan x)$ entonces se hace el cambio $\tan x = t$ y la primitiva $\int f_1(\tan x)\,\mathrm{d}x$ queda como

$$\int \frac{f_1(\tan x)}{1+\tan^2 x}(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Estaremos en este caso si al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $\cos x \tan x$ en la expresión $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ nos quedan sólo cosenos elevados a exponentes pares, pues basta poner entonces $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.

13.5. Casos particulares

Un caso interesante de las primitivas de funciones trigonométricas son las de la forma

$$\int \cos^n x \operatorname{sen}^m x \, \mathrm{d}x,$$

donde los exponentes m y n son naturales. Utilizando las fórmulas de trigonometría puede expresarse $\cos^n x$ como una suma en la que intervienen cosenos múltiplos de x, y $\operatorname{sen}^m x$ como una suma en la que intervienen cosenos y senos múltiplos de x. Al efectuar la multiplicación de dichas sumas aparecerán productos de la forma $\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)$ y productos de la forma $\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)$. Para calcular las integrales de estos productos se descomponen en sumas utilizando las fórmulas:

$$2\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) = \operatorname{sen}[(\alpha+\beta)x] + \operatorname{sen}[(\alpha-\beta)x] \tag{6}$$

$$2\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x] \tag{7}$$

Por otro lado, otra situación interesante es aquella en la que disponemos de una fracción racional en las variables $\cos(r_1 x), \cos(r_2 x), \dots, \cos(r_n x), \operatorname{sen}(s_1 x), \operatorname{sen}(s_2 x), \dots, \operatorname{sen}(s_m x)$, siendo los números $r_1, r_2, \dots, r_n$, $s_1, s_2, \dots, s_m$ son racionales. Tomemos el mínimo común múltiplo de los denominadores de dichos números, p, y hagamos el cambio $x = pt$. Con lo que obtendremos una primitiva donde intervienen cosenos y senos múltiplos enteros de t. Finalmente, cada una de las funciones anteriores se puede expresar como un polinomio de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, con lo que hemos pasado al primer caso de este apartado.

Ejercicio 1.29.

Resuelve:

1. $\int \frac{1}{5+4\cos x}\, \mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan(x/2) = t$,
2. $\int \frac{1+\cos^2 x}{cos x(1+\operatorname{sen}^2 x)}\, \mathrm{d}x$ usando el cambio $\operatorname{sen} x = t$,
3. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan x = t$.

14. Primitivas de expresiones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

En esta sección se estudian las primitivas del estilo $\int f(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\ \mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

En estas primitivas siempre hay que tener en cuenta la identidad:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a},$$

lo cual sugiere hacer el cambio de variable $t = x + b/a$ transformándose la primitiva de partida en:

$$\int f(t-b/a, \sqrt{at^2+d})\ \mathrm{d}t.$$

En el caso que d sea cero, a debe ser positivo y la primitiva toma la forma $\int f(t-b/a, \sqrt{a}t)\ \mathrm{d}t$, que no plantea dificultades. Por lo tanto consideraremos que estamos en el caso $d \neq 0$ y veremos la forma de proceder distinguiendo tres casos.

1. $d < 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{a}{-d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva

$$\int f(\sqrt{\frac{-d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{-d}\sqrt{u^2-1})\ \mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2-1})\ \mathrm{d}u,$$

donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{Ch} v$.

2. $d > 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{-a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva

$$\int f(\sqrt{\frac{d}{-a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{1-u^2})\ \mathrm{d}u = \int f_2(u, \sqrt{1-u^2})\ \mathrm{d}u,$$

donde f_2 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} v$.

3. $d > 0$ y $a > 0$. En este último caso se hace el cambio $\sqrt{\frac{a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva

$$\int f(\sqrt{\frac{d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{u^2+1})\ \mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2+1})\ \mathrm{d}u,$$

donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{Sh} v$.

Capítulo 2

Matrices y determinantes

1. Definición de matriz. Tipos de matrices

Definición (Matriz).

Una *matriz* de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es una colección de $m\,n$ elementos de $\mathbb{K}$ ordenados en una tabla de m filas y n columnas de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$.

Notación.

- Al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se le denota por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- Denotaremos a las matrices con letras mayúsculas A, B, C, $\ldots$.
- Los elementos de las matrices se denotarán con minúsculas a, b, c, $\ldots$.
- Si denotamos a una matriz por la letra A, entonces el elemento de dicha matriz que está en la fila i y columna j se le denota genéricamente por $a_{i,j}$, así que $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$.

Tipos de matrices y más notación.

1. $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$ es *cuadrada* si el número de sus filas es igual al de columnas, es decir, si $m = n$.

2. $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$ es una *matriz fila* si $m = 1$.

3. $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$ es una *matriz columna* si $n = 1$.

4. Los elementos de la *diagonal* de A son $\{a_{ii}\}_{i\in\{1,\ldots,\text{mín}(m,n)\}}$.

5. S i A tiene todos los elementos por encima (respectivamente por debajo) de la diagonal igual a 0 se dice que A es *triangular inferior* (resp. *triangular superior*), es decir, si $a_{i,j} = 0$ para todo $j > i$ (resp. $a_{i,j} = 0$ para todo $j < i$).

6. Una matriz es *diagonal* si y sólo si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.

7. Dos matrices A y B son *iguales* si y sólo si tienen el mismo tamaño, por ejemplo $m \times n$, y además para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots n\}$ se tiene que $a_{i,j} = b_{i,j}$.

2. Operaciones con matrices

2.1. Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos la *matriz traspuesta de A* como:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

es decir, es la matriz que se obtiene al poner las filas de A como columnas y las columnas como filas.

Definición (matrices simétricas y antisimétricas).

A es *simétrica* si y sólo si $A = A^t$

A es *antisimétrica* cuando $A = -A^t$

Ejercicio.

Comprobar que $(A^t)^t = A$

2.2. Suma de matrices

Dentro del conjunto de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definimos la ley de operación interna *suma*

$$\begin{array}{rccc} +: & M_{m\times n}(\mathbb{K}) \times M_{m\times n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & (A,B) & \to & C = A+B, \end{array}$$

de forma que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $(i,j) \in \{1,\dots m\} \times \{1,\dots,n\}$.

Proposición.

- $(M_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano.
- $(A+B)^t = A^t + B^t$.

2.3. Producto de matrices

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & M_{m\times n}(\mathbb{K}) \times M_{n\times h}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{m\times h}(\mathbb{K}) \\ & (A,B) & \to & C = A\cdot B = AB, \end{array}$$

$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$ para todo $(i,j) \in \{1,\dots m\} \times \{1,\dots,h\}$.

Proposición

Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, B, $C \in M_{n\times h}(\mathbb{K})$ y $D \in M_{h\times p}(\mathbb{K})$, se tiene:

1. $(AB)D = A(BD)$.
2. $A(B+C) = AB + AC$.
3. $(AB)^t = B^tA^t$.

4. $AI_n = A = I_mA$; donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, I_k es la matriz de tamaño $k \times k$ que tiene unos en su diagonal y ceros fuera de ella.

5. Cuando el tamaño de las matrices permite hacer el producto BA, en general se tiene que $AB \neq BA$.

Definición (matriz invertible).

Una matriz $A \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ es *invertible* si existe $B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_m$. La matriz B se dice que es la *inversa* de A y se denota $B = A^{-1}$.

2.4. Producto de matrices por escalares

Dado el cuerpo $\mathbb{K}$ y el conjunto de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la siguiente ley:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times M_{m\times n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & (\alpha, A) & \to & B = \alpha \cdot A = \alpha A \end{array}$$

donde $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots n\}$.

Proposición

Si $\alpha\,,\beta \in \mathbb{K}$, $A\,,B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in M_{n\times h}(\mathbb{K})$, entonces:

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

4. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

5. $\alpha(AC) = (\alpha A)C$.

3. Rango de una matriz

A cada matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ le vamos a asociar un número natural perteneciente al conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, \text{mín}(m,n)\}$. Es decir, lo que vamos a hacer es definir una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{rg}: & M_{m\times n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \{0,1,2,\ldots,\mathrm{mín}(m,n)\} \\ & A & \to & \mathrm{rg}\, A. \end{array}$$

3.1. Transformaciones elementales por filas

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos definir sobre ella tres tipos de transformaciones elementales por filas:

1. *Intercambiar la fila i con la fila j:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{ij}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. *Multiplicar la fila i por un escalar $\alpha \neq 0$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_i(\alpha)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. *Sumar a la fila j la fila i multiplicada por un escalar α:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_j^i(\alpha)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}+\alpha a_{i1} & a_{j2}+\alpha a_{i2} & \cdots & a_{jn}+\alpha a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.2. Transformaciones elementales por columnas

Son análogas a las que hemos introducido por filas, dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos tres transformaciones elementales por columnas:

1. *Intercambiar la columna i con la columna j:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{ij}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. *Multiplicar la columna i por un escalar $\alpha \neq 0$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \overset{C_i(\alpha)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. *Sumar a la columna j la columna i multiplicada por un escalar α:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \overset{C_j^i(\alpha)}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+\alpha a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+\alpha a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.3. Matrices equivalentes

Definición (matrices equivalentes).

Diremos que dos matrices A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ son *equivalentes* si B se puede obtener a partir de A haciendo sobre ella un número finito de operaciones elementales

Teorema

Dada una matriz no nula $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, mediante una serie de transformaciones elementales por filas y columnas se puede llegar a una matriz (única) de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Definición (rango).

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, si $A = 0_{m\times n}$ definimos $\operatorname{rg} A = 0$, en otro caso diremos que $\operatorname{rg} A = r$ si y sólo si A es equivalente a

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Proposición

Dada una matriz no nula $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, A es equivalente a:

$$\left(\begin{array}{c|c} N_r & P_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right),$$

donde N_r es una matriz triangular superior con todos los elementos de la diagonal no nulos y $P_{r\times(n-r)}$ es una matriz cualquiera. En este caso $\operatorname{rg} A = r$.

Definición (Matriz de rango completo).

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es de *rango completo* si y sólo si $\operatorname{rg} A = \min\{m, n\}$.

Proposición

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times h}(\mathbb{K})$, se tiene:

1. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t$,
2. $\operatorname{rg}(A + B) \neq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$ en general.
3. Si $A \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ entonces: A es invertible si y sólo si A es de rango completo (es decir, tiene rango m).
4. Dos matrices, A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, son equivalentes si y sólo existen matrices invertibles $P \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ y $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tales que $B = PAQ$.

Ejercicio

Calcula el rango de las matrices:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$

4. Matrices Cuadradas

Definición (matriz inversa).

Dada una matriz cuadrada $A \in M_m(\mathbb{K})$, diremos que es *invertible* si existe una matriz B tal que $AB = BA = I_m$.

A la matriz B se le llama *inversa de A* y se le denota por B^{-1}.

Proposición

Si $A \in M_m(\mathbb{K})$ y A es invertible entonces A es una matriz de rango completo.

4.1. Cálculo de la inversa de una matriz utilizando transformaciones elementales por filas

El método consiste en transformar con operaciones elementales sólo por filas hasta obtener la matriz identidad.

Esas mismas operaciones se le aplican a la matriz identidad y la matriz que se obtiene es la inversa deseada.

Ejercicio

Usando este método comprueba que la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2^1(2) \\ F_3^1(-1) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3^2(2) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3(2) \\ F_2(5) \\ F_1(10) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1^3(-10) \\ F_2^3(-10) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -10 & 0 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1^2(-2) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1(\frac{1}{10}) \\ F_2(\frac{-1}{5}) \\ F_3(\frac{1}{10}) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

Así que la inversa de la matriz A es la matriz:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. Determinantes

Notación.

Dada $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, denotaremos por M_{ij}^B (o simplemente, si no hay confusión por M_{ij}) a la matriz de tamaño $(m-1)\times(n-1)$ que se obtiene eliminando de B la fila i y la columna j.

Definición (Determinante).

Dada una matriz $A \in M_m(\mathbb{K})$ le vamos a asociar un escalar de $\mathbb{K}$ que llamaremos *determinante de la matriz* que definimos por inducción sobre m:

1. Si A tiene tamaño 1×1, es decir $A = (a)$, entonces $\det A = |A| = a$.

2. Si ahora A es de tamaño $m \times m$ y suponemos definido el determinante para todas las matrices de tamaño $(m-1)\times(m-1)$ $(\Delta_{ij} = \det M_{ij}^A)$, entonces: $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

Observación

El determinante de la matriz A es independiente de la fila i que elijamos para calcularlo.

Propiedades

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22})$

Proposición

Dadas $A, B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, se tiene:

1. $\det F_i(\alpha)(A) = \alpha \det A$ y $\det C_i(\alpha)(A) = \alpha \det A$, es decir, el valor del determinante de A queda multiplicado por α si multiplicamos una de sus filas o columnas por α .

2. $\det F_{ij}(A) = -\det A$ y $\det C_{ij}(A) = -\det A$, es decir, si intercambiamos dos filas o columnas entre sí, el determinante cambia de signo.

3. $\det F_i^j(\alpha)(A) = \det A$ y $\det C_i^j(\alpha)(A) = \det A$, es decir, si sumamos a una fila (resp. columna) otra multiplicada por un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, el determinante no cambia de valor.

4. Si una fila o columna de A es combinación lineal de las demás, entonces $|A| = 0$.

5. $\det A = \det A^t$.

6. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 & \dots & c_m+d_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Proposición

Dadas $A, B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ se tiene:

1. $\det(AB) = \det A \det B$.

2. Una matriz es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$, en dicho caso $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

4.3. Inversa de una matriz II

Fijamos una matriz invertible A.

Definición (Adjunto de orden i, j de A).

El adjunto de orden i, j de A es el escalar $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Definición (matriz adjunta de A).

La *matriz adjunta de A* será la matriz de tamaño $m \times m$ que tiene en la posición i, j al adjunto de orden i, j, a esta matriz se le denotará por $\operatorname{Adj} A$.

En la sección anterior se ha visto que si una matriz A es invertible entonces su determinante es no nulo. Además se verifica:

$$\boxed{A^{-1} = |A|^{-1}(\operatorname{Adj} A)^t.}$$

Demostración

Probaremos que

$$A|A|^{-1}(\operatorname{Adj} A)^t = I$$

$$A|A|^{-1}(\operatorname{Adj} A)^t = |A|^{-1}A(\operatorname{Adj} A)^t$$

$$= |A|^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & A_{3i} & \dots & A_{ji} & \dots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz producto tiene en la posición (i, j) el valor:

$$c_{ij} = |A|^{-1}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn})$$

Ahora distinguimos dos casos:

- Si $i = j$ entonces $c_{ii} = |A|^{-1}|A| = 1$

- Si $i \neq j$ entonces $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$ es el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \text{(fila j)} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

  así que $c_{ij} = |A|^{-1}0 = 0$.

Ejercicio

Usando este método comprueba que la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Calcula por los dos métodos explicados la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$.

Ejercicio

De los dos métodos explicados para calcular la inversa de una matriz ¿Cuál requiere un número menor de operaciones?

Si $A(n)$ y $G(n)$ denotan el número de operaciones que deben de realizarse para calcular la inversa de una matriz de tamaño $n \times n$ por los métodos de los determinantes y Gauss respectivamente, se tiene:

$$A(n) = n\, n! + n^2[(n-1)\ (n-1)! - 1] + 1$$

$$G(n) = 2n^2 + 2(3n + 4n^2)(n-1) + 2\sum_{j=1}^{n-1} -6jn - 3j + 2j^2.$$

<u>Casos concretos</u>

n	$A(n)$	$G(n)$
2	5	26
3	46	92
4	369	220
5	2976	430
6	25885	742
7	246912	1176
8	2580417	1752
9	29393200	2490
10	362879901	3410
1000	$4{,}02387260077 \times 10^{2573}$	3334331000

Para acabar pensemos que si un ordenador tarda una millonésima de segundo en hacer una operación entonces le costaría 55,5722 minutos invertir una matriz de tamaño 1000×1000. En cambio necesitaría $1{,}2759616314 \times 10^{2558}$ siglos para invertirla por el método de la matriz adjunta.

5. Ejercicios resueltos

I. Calcular el rango de la siguiente matriz en función de los valores de a y b:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Solución.

Utilizando el método de transformaciones elementales por filas y columnas, tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ a & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \overset{b\neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ a & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & -a^2/b & 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & 0 & a^3/b^2 & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & 0 & 0 & b - a^4/b^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & 0 & 0 & b - a^4/b^3 \end{pmatrix}$$

Así que si $b \neq 0$ se tienen las siguientes posibilidades:

- Si $b^4 = a^4$ entonces $\operatorname{rg} A = 3$. Además

$$b^4 = a^4 \Leftrightarrow \pm b^2 = \pm a^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow b = \pm a.$$

- Si $b \neq \pm a$ entonces $\operatorname{rg} A = 4$.

Cuando $b = 0$ tenemos $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y por lo tanto:

- si $a = 0$ entonces $\operatorname{rg} A = 0$
- si $a \neq 0$ entonces $\operatorname{rg} A = 4$

II. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Calcular las sucesivas potencias de A.

Solución. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $n \geq 4$.

(b) Sea $B = I_4 + A$, expresar B^n en función de I_4, A, A^2 y A^3.

Solución. Usando el binomio de Newton tenemos que

$$B^n = (I_4 + A)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} A^j I^{n-j}$$

Ahora suponemos que $n \geq 3$ y simplificamos la expresión anterior:

$$B^n = \sum_{j=0}^{3} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} A^j I^{n-j} = I_4 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} A^3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 & 0 \\ 2n + 2(-1+n)n & 2n & 1 & 0 \\ 2n + 4(-1+n)n + \frac{4}{3}(-2+n)(-1+n)n & 2n + 2(-1+n)n & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $n = 1$ entonces $B^1 = I_4 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $n = 2$ entonces $B^2 = (I_4 + A)^2 = I_4^2 + A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Demostrar que la inversa de B es $I_4 - A + A^2 - A^3$.

Solución. Se trata de ver que $B(I_4 - A + A^2 - A^3) = I_4 = (I_4 - A + A^2 - A^3)B$. En efecto:

- $B(I_4 - A + A^2 - A^3) = (I_4 + A)(I_4 - A + A^2 - A^3) = I_4 - A + A^2 - A^3 + A - A^2 + A^3 - A^4 = I_4 - A^4 = I_4$.
- $(I_4 - A + A^2 - A^3)B = (I_4 - A + A^2 - A^3)(I_4 + A) = I_4 - A + A^2 - A^3 + A - A^2 + A^3 - A^4 = I_4 - A^4 = I_4$.

(d) Expresar B^{-3} en función de I_4, A, A^2 y A^3.

Solución. $B^{-3} = (I_4 - A + A^2 - A^3)^3 = (I_4 - A + A^2 - A^3)^2(I_4 - A + A^2 - A^3) = (I_4 - 2A + 3A^2 - 4A^3)(I_4 - A + A^2 - A^3) = I_4 - 3A + 6A^2 - 10A^3$.

III. Hallar la potencia n–ésima de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ poniendo $A = I_3 + B$, siendo B una matriz a determinar.

Solución.

La matriz B será $B = A - I_{3=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.Como la matriz identidad conmuta con cualquier otra matriz podemos utilizar el binomio de Newton para calcular la potencia $A^n = (B + I_3)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$, así que tenemos que calcular las potencias de la matriz B.

$$B^0 = I_3 \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^4 = 0$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^n = 0 \quad \forall n \geq 4$$

Hacemos notar que $A^1 = A$ y que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Y ahora calculamos A^n para $n \geq 3$ siguiendo el binomio de Newton:

$$\begin{aligned} A^n = (B + I_3)^n &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \dots \binom{n}{n-1} B^{n-1} + \binom{n}{n} B^n \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV. De las afirmaciones siguientes, demostrar las verdaderas y dar un contraejemplo para las falsas:

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Solución. Esta afirmación es falsa, para verlo tómense $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La misma afirmación es cierta cuando las matrices A y B conmutan. En cualquier caso sí que se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

(b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Solución. Esta igualdad también es falsa y se puede ver con las mismas matrices que en el ejercicio anterior.

(c) $A^{n+1} - I_n = (A - I_n)(I_n + A + A^2 + ... + A^n)$.

Solución. En este caso la igualdad es cierta ya que $(A-I_n)(I_n+A+A^2+...+A^n) = A + A^2 + \cdots + A^n + A^{n+1} - I_n - A - A^2 + ... - A^n = A^{n+1} - I_n$.

(d) Si P es una matriz regular, entonces $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$.

Solución. La igualdad es cierta porque

$$(PAP^{-1})^n =$$
$$\underbrace{PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1}\ldots PAP^{-1}}_{\text{n-veces}}$$
$$= PA^nP^{-1}.$$

(e) Si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.

Solución. Verdadero. Puesto que A es antisimétrica se tiene que $A^t = -A$, entonces $(A^2)^t = (AA)^t = A^tA^t = (-A)(-A) = A^2$, es decir, A^2 es simétrica.

(f) Si A es antisimétrica y B es simétrica, entonces AB es antisimétrica si y sólo si $AB = BA$.

Solución. Verdadero. Por ser A antisimétrica y B simétrica se tiene que $A^t = -A$ y que $B^t = B$.

Demostramos primero que si AB es antisimétrica entonces $AB = BA$. En efecto, por ser AB antisimétrica tenemos que $-AB = (AB)^t = B^tA^t = B(-A) = -BA$ e igualando el primer y último miembro y dividiendo por -1 se tiene que $AB = BA$.

Finalmente hay que ver que si $AB = BA$ entonces AB es antisimétrica.

(g) Si $|AB| = 0$, entonces $|A| = 0$ ó $|B| = 0$.

Solución. Esta afirmación es cierta ya que si $|AB| = 0$ entonces $|AB| = |A||B| = 0$ y por lo tanto o bien $|A| = 0$ o bien $|B| = 0$.

(h) $|A + B| = |A| + |B|$.

Solución. Se puede comprobar fácilmente que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son un contraejemplo para esta igualdad.

(i) $|2A| = 2\,|A|$.

Solución. Se puede comprobar con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que la igualdad no se satisface.

V. Demostrar que si a, b, c son números reales se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 .$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{F_1^2(1);F_1^3(1)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1^2(-1)}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a+b+c & b-c-a & 2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$-(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c)^2(-a-b-c) = (a+b+c)^3$$

VI.

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1^2(1), C_1^3(1), C_1^4(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2+2ab+b^2 & ab & ab & b^2 \\ a^2+2ab+b^2 & a^2 & b^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2 & b^2 & a^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{F_2^1(-1), F_3^1(-1), F_4^1(-1)}{=} \begin{vmatrix} a^2+2ab+b^2 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2-ab & b^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+2ab+b^2) \begin{vmatrix} a^2-ab & b^2-ab & ab-b^2 \\ b^2-ab & a^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^2(a^2-b^2) \begin{vmatrix} a^2-ab & b^2-ab \\ b^2-ab & a^2-ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^3(a-b)[(a^2-ab)^2-(b^2-ab)^2]$$

$$= (a+b)^3(a-b)(a^2+b^2-2ab)(a^2-b^2)$$

$$= (a+b)^4(a-b)^4 = (a^2-b^2)^4$$

VII.

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4 - b^4$$

VIII. Sin desarrollar los determinantes, demostrar que:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{C_3^2(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+a+c \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3^1(-1)}{=}$$

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Si a, b, c son las tres diferentes de 0, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1/b & b & b^2 \\ 1/c & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{C_1(abc)}{=} \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Supongamos ahora que una de ellas es 0, por ejemplo $a = 0$, en este caso se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} bc \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2 \\ 0 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

IX.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F_4^3(-a) \\ F_3^2(-a) \\ = \\ F_2^1(-a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F_3^2(-b) \\ = \\ F_2^1(-b) \end{array} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

X. Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de esta matriz realizando operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2^1(-1) \\ F_3^1(-2) \\ F_4^1(-4) \\ F_5^1(-3) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2^1(-1) \\ F_3^1(-2) \\ F_4^1(-4) \\ F_5^1(-3) \\ \sim \end{matrix}$$

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Definiciones básicas

Definición (sistema de ecuaciones lineales).

Fijado un cuerpo $\mathbb{K}$, que como ya dijimos siempre será $\mathbb{R}$ y eventualmente $\mathbb{C}$, y fijados numeros naturales m y n, un *sistema de m ecuaciones y n incógnitas sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ es un conjunto de expresiones del estilo:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} (S)$$

donde los elementos a_{ij} pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$ y los elementos x_j son las incógnitas que queremos encontrar.

Convenio

Cuando $m = 1$, en vez de llamar a la expresión $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ sistema de 1 ecuación con n incógnitas, la llamaremos simplemente *ecuación lineal de con n incógnitas*.

El sistema (S) se puede reescribir en forma matricial como:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Notación.

La matriz A se llamará *matriz asociada al sistema (S)*,

$B = (A|\mathbf{b})$ es la *matriz ampliada asociada al sistema (S)*

Los b_j son *términos independientes del sistema (S)*.

Definición (Resolución y discusión de un sistema).

Resolver el sistema (S) es encontrar un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{K}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y *discutirlo* consiste en clasificarlo en uno de los siguiente tipos:

1. *Sistema compatible determinado (S.C.D.)*: es aquél que tiene una única solución.

2. *Sistema compatible indeterminado (S.C.I.)*: es aquél que tiene múltiples soluciones.

3. *Sistema incompatible (S.I.)*: es aquel sistema que no tiene solución.

2. Teorema de Rouché-Frobenius

Dado el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se tiene:

1. si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b})$ entonces el sistema es compatible. Además:

   a) cuando $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b}) = n$ el sistema es compatible determinado,

   b) y si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b}) \neq n$ el sistema es compatible indeterminado.

2. si $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A|\mathbf{b})$ entonces el sistema es incompatible.

Definición (sistema homogéneo).

si todos los elementos b_i son 0, el sistema se dice que es *homogéneo* y siempre tiene solución.

3. Resolución de sistemas, método de Gauss

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right\} (S)$$

le asociaremos su sistema matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y el método consiste en:

1. Realizar transformaciones elementales por filas en la matriz $(A|\mathbf{b})$ hasta obtener una matriz del estilo:

$$\left(\begin{array}{c|c} C & \mathbf{d} \\ \hline E & \mathbf{f} \end{array}\right)$$

   siendo la matriz C de rango completo y triangular superior, la matriz E de ceros y tanto $\mathbf{d}$ como $\mathbf{f}$ son matrices columna.

2. Si $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ entonces el sistema es compatible. Además, si $\operatorname{rg}(C) =$número de incógnitas se tiene que (S) es compatible determinado. En caso contrario es compatible indeterminado.

3. Si $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ entonces el sistema (S) es incompatible.

Resolución efectiva

Se considera ahora el sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ya que va a tener las mismas soluciones que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (son equivalentes). El sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ puede estar en dos situaciones diferentes:

1. Si $k = \operatorname{rg}(C) < n$ entonces (S) es compatible indeterminado. En este caso damos a las incógnitas $x_{k+1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ los valores indeterminados (parámetros) $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ y resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k & = & d_1 - c_{1,k+1}\alpha_{k+1} - \cdots - c_{1,n}\alpha_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k & = & d_2 - c_{2,k+1}\alpha_{k+1} - \cdots - c_{2,n}\alpha_n \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kk}x_k & = & d_k - c_{k,k+1}\alpha_{k+1} \cdots - c_{k,n}\alpha_n \end{array}$$

2. Si $\mathrm{rg}\,(C) = n$ el sistema es compatible determinado y lo resolvemos fácilmente de abajo hacia arriba sin necesidad de introducir parámetros.

4. Método de Cramer

Este método se puede utilizar cuando los sistemas tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\mathrm{rg}\,(A) = n$ (A es invertible).

$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)^t\mathbf{b}$.

Para cada $1 \leq k \leq n$ se tiene $x_k = \frac{1}{|A|}(\sum_{j=1}^n A_{jk}b_j)$, de donde:

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_2 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Justificamos la fórmula anterior y concluimos el tema:

$$x_k = \frac{1}{|A|}(\textstyle\sum_{j=1}^n A_{jk}b_j) = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk})$$

$$= \frac{1}{|A|}\left((-1)^{k+1}b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + b_n(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_2 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Ejercicios resueltos

I. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $Ax = b$, que admite solución única, entonces ésta es $x = A^{-1}b$.

Solución. Falso, por ejemplo se puede verificar que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 52 \\ 78 \end{pmatrix}$$

tiene como solución única a $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$. Sin embargo no existe la inversa de la matriz asociada al sistema por no ser cuadrada.

(b) Si los sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$ son compatibles, entonces lo es $Ax = b$ donde $b = b_1 + b_2$.

Solución. En efecto, si ambos son compatibles existirán soluciones respectivas x_1 y x_2 tales que $Ax_1 = b_1$ y $Ax_2 = b_2$.Por lo tanto $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = b_1 + b_2$. Esto quiere decir que $x_1 + x_2$ es solución de $Ax = b$, donde $b = b_1 + b_2$.

(c) Un sistema con más ecuaciones que incógnitas es siempre incompatible.

Solución. Falso. El contraejemplo del apartado (a) vale para este apartado.

(d) Si un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible determinado, entonces A es una matriz cuadrada.

Solución. Falso, además el contraejemplo del apartado (a) también vale para este apartado.

(e) Si $Ax = b$ es un sistema incompatible con 5 ecuaciones y 4 incógnitas y el $r(A) = 4$ entonces $r(A|b) = 5$.

Solución. Verdadero. En efecto, sabemos que $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|b)$, además al ser el sistema incompatible entonces la desigualdad es estricta. Así que $4 < \operatorname{rg}(A|b)$ y como el tamaño de $(A|b)$ es 5×5 entonces $\operatorname{rg}(A|b) \leq 5$. Por lo tanto $\operatorname{rg}(A|b) = 5$.

II. Discutir el siguiente sistema

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Asociamos al sistema la matriz ampliada y realizamos operaciones de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \overset{F_{1,3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - aF_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$

$$F_3 - (1+a)F_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Ahora discutimos el sistema según los valores del parámetro a:

- Si $a \neq 1$ y $2 - a - a^2 \neq 0$, es decir, si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 3$ y el sistema es compatible y determinado y las soluciones son:
  - $z = \frac{1-a}{-(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}$;
  - $y = \frac{(1-a)\frac{1}{a+2}}{1-a} = \frac{1}{a+2}$;
  - $x = 1 - z - ay = \frac{a+2-1-a}{a+2} = \frac{1}{a+2}$.
- Si $a = 1$ entonces $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 1$ y el sistema es compatible indeterminado, necesitándose 2 parámetros reales para resolverlo, α y β. Las soluciones serían en este caso:
  - $z = \alpha$;

    - $y = \beta$;
    - $x = 1 - \alpha - \beta$.

- Si $a = -2$ entonces $\operatorname{rg} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rg}(A|b)$, por lo tanto el sistema es incompatible.

III. Discutir el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ ax + y + (a-1)\,z = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

Asociamos al sistema la matriz asociada ampliada y realizamos operaciones elementales por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{2,3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - aF_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & -1 & -a^2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 + F_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -1 & -a^2 - a \end{array}\right)$$

Ahora discutimos y resolvemos el sistema según los valores del parámetro a:

- Si $a \neq 1$ entonces $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 3$ y el sistema es compatible determinado, siendo las soluciones:

    a) $z = a(a+1)$;

    b) $y = \frac{-a}{a-1}$;

    c) $x = a + 1 - a(a+1) + \frac{a}{a-1} = -\frac{1-2a-a^2+a^3}{a-1}$.

- Si $a = 1$ entonces $\operatorname{rg} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rg}(A|b)$ y por lo tanto el sistema es incompatible.

IV. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} kx + y + z + t = k \\ x + ky + z + t = k \\ x + y + kz + t = k \\ x + y + z + kt = k \end{cases}$$

Empezamos construyendo la matriz ampliada al sistema y realizando operaciones elementales por filas:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & k \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1 - kF_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 - F_4 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 & k-k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k & k \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \text{intercambio de filas} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 & k-k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 + F_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 & k-k^2 \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k-k^2 & k-k^2 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_4 + F_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 & k-k^2 \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k-k^2 & k-k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2k-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

Ahora discutimos el sistema distinguiendo los siguientes casos:

a) Si $1-k\neq 0$ y $3-2k-k^2\neq 0$ o lo que es lo mismo $k\neq 1$, $k\neq -3$, entonces $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}(A|b)=4$ y el sistema es compatible determinado. Se resuelve desde abajo hacia arriba:

A. $t=\frac{k-k^2}{3-2k-k^2}=\frac{k(1-k)}{-(k+3)(k-1)}=\frac{k}{k+3}$;

B. $z=\frac{k-k^2}{1-k}-\frac{k(2-k-k^2)}{(1-k)(k+3)}=\frac{k}{3+k}$;

C. $y=\frac{k-k^2-(1-k^2)t-(1-k)z}{1-k}=\frac{k}{3+k}$

D. $x=k-kt-z-y=\frac{k}{3+k}$

b) Si $k=1$ entonces

$$(A|b)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & k\\ 0 & 4 & 4 & -8 & -12\\ 0 & 0 & 4 & -4 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

y como $\operatorname{rg} A=3\neq\operatorname{rg}(A|b)=4$ el sistema es incompatible.

Capítulo 4

Espacios vectoriales

1. Definiciones básicas y primeras consecuencias

Un conjunto no vacío V se dice que es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ si está dotado de dos leyes de operación:

O1. Una ley de operación interna,

$$\begin{array}{rccc} +: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \to & \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{array}$$

O2. Una ley de operación externa,

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (k, \mathbf{v}) & \to & k \cdot \mathbf{v} \end{array}$$

Estas leyes deben satisfacer las propiedades que siguen.

P1. Para cualesquiera elementos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ de V, la operación interna satisface:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ *(propiedad conmutativa).*

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ *(propiedad asociativa).*

c) Existe un elemento denotado por $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ *($\mathbf{0}$ es el elemento neutro).*

d) Existe un elemento $\mathbf{c} \in V$ tal que $\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{c}+\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (*$\mathbf{c}$ es el opuesto de $\mathbf{a}$ y usualmente se denota por $-\mathbf{a}$*).

P2. Para cualesquiera elementos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de V y λ, μ de $\mathbb{K}$, la operación externa satisface:

a) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

b) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.

c) $(\lambda\mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a})$.

d) $1_{\mathbb{K}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Notación.

L os elementos de V se llamarán *vectores* y los de $\mathbb{K}$ reciben el nombre de *escalares*, un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se denotará por $V_{\mathbb{K}}$.

Ejemplo

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones siguientes:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & ((x_i)_{i\in N}, (y_i)_{i\in N}) & \to & (x_i + y_i)_{i\in N} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\alpha, (x_i)_{i\in N}) & \to & (\alpha x_i)_{i\in N} \end{array}$$

Aquí $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo

Sea $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X]$ el conjunto de todos los polinomios en la variable x sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y de grado menor o igual que n.

Un elemento de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X]$ tendrá la siguiente forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X]$ con las operaciones que siguen es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

1.
$$\begin{array}{rcl} + : \ \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X] \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X] & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X] \\ (p(x), q(x)) & \to & p(x) + q(x) \end{array}$$

donde $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$, siendo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$

2.
$$\begin{array}{rcl} \cdot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X] & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X] \\ (\lambda, p(x)) & \to & \lambda p(x) \end{array}$$

donde $\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_nx^n$ si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Propiedades

Dado el espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se tiene que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $0_{\mathbb{K}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$,
2. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
3. $(-\alpha)\mathbf{u} = -\alpha\mathbf{u} = \alpha(-\mathbf{u})$,
4. Si $\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ con $\alpha \neq 0$ entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
5. Si $\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \neq 0$ entonces $\alpha = \beta$,
6. $(-\alpha)(-\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$.

2. Combinación lineal, dependencia e independencia lineal, sistema generador, espacio generado y bases

Definición (Combinación lineal).

Dado un espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ y un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, una *combinación lineal de S* es una expresión del tipo:

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n,$$

donde los α_i son elementos de $\mathbb{K}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición (Independencia lineal).

Un conjunto de vectores, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, se dice *libre o linealmente independiente* si para toda combinación lineal de S que sea igual al vector $\mathbf{0}$ implica que los escalares que la forman son 0.

Dicho de otro modo: si $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n = 0$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definición (Dependencia lineal).

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ se dice que es un *sistema ligado o que los vectores son linealmente dependientes* si el sistema S no es libre, es decir, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos que satisfacen:

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n = 0.$$

Definición (Sistema generador).

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que *genera a* V si todo elemento de V se puede expresar como combinación lineal de vectores de S.

Ejemplo

El conjunto de vectores $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, definidos por $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, 1^{(j)}, 0, \ldots, 0)$ genera a V y además es linealmente independiente.

Ejemplo

$S = \{1, x, \ldots, x^n\}$ es un conjunto linealmente independiente y generador de $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}[X]$.

Proposición

1. No todo sistema libre es generador.

2. No todo sistema generador es libre.

3. Si S es generador y T es un conjunto de vectores cualquiera, entonces $S \cup T$ también es generador.

4. Si S es libre y $T \subseteq S$ entonces T es libre.

2.1. Bases de un espacio vectorial. Dimensión

Definición (Base).

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ se dice que es una *base* de un espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ si S genera $V_{\mathbb{K}}$ (es decir $V_{\mathbb{K}} =< S >$) y además S es un sistema libre.

Proposición

Cualquier vector del espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ se expresa de manera única como combinación lineal de los elementos de base elegida.

Definición (Coordenadas).

Dada una base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $V_{\mathbb{K}}$, las coordenadas de un vector $\mathbf{v} \in V_{\mathbb{K}}$ son los únicos escalares $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$.

2.2. Dimensión de un espacio vectorial

Teorema 2.2.A

Todo espacio vectorial finitamente generado[1] posee una base, además el cardinal de cualquier base es un número fijo que lo llamaremos *dimensión del espacio vectorial.*

Convenio

Si $V_{\mathbb{K}} = \{0\}$, entonces $\beta_{V_k} = \emptyset$.

Resultados técnicos que permiten probar el teorema anterior

Proposición 2.2.B

[1] Esta propiedad también es cierta para espacios vectoriales en general

Si S es linealmente independiente y $\mathbf{u} \notin < S >$ entonces $T = S \cup \{\mathbf{u}\}$ es linealmente independiente.

Demostración

Pongamos que el conjunto S está formado por elementos u_i, recorriendo i un conjunto I, es decir: $S = \{u_i\}_{i \in I}$.

Para ver si T es linealmente independiente tomamos una combinación lineal (finita) de vectores de T, la igualamos al vector $\mathbf{0}$ y deducimos que los escalares que aparecen en la combinación lineal son todos cero.

Si

$$\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_k v_{i_k} + \beta v = \mathbf{0}$$

entonces:

1. $\beta = 0_{\mathbb{K}}$ porque en caso contrario:

   $$v = -\beta^{-1} \left(\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_k v_{i_k} \right)$$

   y esto es una contradicción con la hipótesis $v \notin < S >$.

2. Como $\beta = 0_{\mathbb{K}}$ se tiene:

   $$\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_k v_{i_k} = \mathbf{0}$$

   y como S es linealmente independiente entonces:

   $$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0_{\mathbb{K}}.$$

■

Teorema (Steinitz)

Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base del espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ y sea $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Entonces se pueden sustituir m vectores de la base S por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, obteniendo una nueva base. En particular se tiene que $m \leq n$.

Demostración

Haremos la demostración de este teorema por inducción en m.

▶ *Probamos el teorema cuando $m = 1$.* Como S es una base de V existirán escalares $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ tales que

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

Puesto que T es linealmente independiente se tiene que $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ y entonces existe al menos un índice $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para el que $\alpha_l \neq 0$, por lo tanto podemos escribir:

$$\mathbf{u}_l = -\alpha_l^{-1} \left(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_{l-1} \mathbf{u}_{l-1} + \alpha_{l+1} \mathbf{u}_{l+1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n - \mathbf{v}_1 \right).$$

Sustituimos en la base S el vector $\mathbf{u}_l$ por el vector $\mathbf{v}_1$ y obtenemos el conjunto de vectores $R = S \backslash \{\mathbf{u}_l\} \cup \{\mathbf{v}_1\}$. Finalmente probamos que R es una base:

- Vemos primero que *R es linealmente independiente.* Para ello tomamos una combinación lineal de los vectores de R igual al vector $\mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_{l-1} \mathbf{u}_{l-1} + \beta_{l+1} \mathbf{u}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathbf{u}_n + \gamma \mathbf{v}_1 \\
&= \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_{l-1} \mathbf{u}_{l-1} + \beta_{l+1} \mathbf{u}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathbf{u}_n \\
&\qquad + \gamma(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n) \\
&= (\beta_1 + \gamma\alpha_1)\mathbf{u}_1 + (\beta_2 + \gamma\alpha_2)\mathbf{u}_2 + \ldots \\
&\qquad + (\beta_{l-1} + \gamma\alpha_{l-1})\mathbf{u}_{l-1} + \gamma\alpha_l \mathbf{u}_l + (\beta_{l+1} + \gamma\alpha_{l+1})\mathbf{u}_{l+1} + \ldots \\
&\qquad + (\beta_n + \gamma\alpha_n)\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

  Así que:

$$\begin{cases} \beta_j + \gamma\alpha_j = 0_{\mathbb{K}} \text{ para todo } j \in \{1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots n\}, \\ \gamma\alpha_l = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

  Como $\alpha_l \neq 0_{\mathbb{K}}$ entonces de la última ecuación se deduce que $\gamma = 0_{\mathbb{K}}$ y de las restantes: $\beta_j = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots n\}$. Por lo tanto R es linealmente independiente.

- Vemos ahora que *R es generador.* Para ello tomamos un vector $\mathbf{v} \in V$ y vemos que es combinación lineal de los vectores de R. Como S es una base entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \gamma_1\mathbf{u}_1 + \gamma_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \gamma_{l-1}\mathbf{u}_{l-1} + \gamma_l\mathbf{u}_l + \gamma_{l+1}\mathbf{u}_{l+1} + \cdots + \gamma_n\mathbf{u}_n \\
&= \gamma_1\mathbf{u}_1 + \gamma_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \gamma_{l-1}\mathbf{u}_{l-1} \\
&\quad -\gamma_l\alpha_l^{-1}\left(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_{l-1}\mathbf{u}_{l-1} + \alpha_{l+1}\mathbf{u}_{l+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_1\right) \\
&\quad +\gamma_{l+1}\mathbf{u}_{l+1} + \ldots + \gamma_n\mathbf{u}_n \\
&= (\gamma_1 - \gamma_l\alpha_l^{-1}\alpha_1)\mathbf{u}_1 + (\gamma_2 - \gamma_l\alpha_l^{-1}\alpha_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\gamma_{l-1} - \gamma_l\alpha_l^{-1}\alpha_{l-1})\mathbf{u}_{l-1} \\
&\quad -\gamma_l\alpha_l^{-1}\mathbf{v}_1 \\
&\quad +(\gamma_{l+1} - \gamma_l\alpha_l^{-1}\alpha_{l+1})\mathbf{u}_{l+1} + \ldots + (\gamma_n - \gamma_l\alpha_l^{-1}\alpha_n)\mathbf{u}_n,
\end{aligned}
$$

lo que demuestra que R es generador.

▶ *Suponemos ahora que el teorema es cierto para el entero $m-1$ y lo probamos para m.*

Como el conjunto $T_{m-1} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}\}$ es linealmente independiente y estamos suponiendo el resultado cierto para $m-1$, podemos sustituir $m-1$ vectores de S por los vectores de T_{m-1} obteniendo una base

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}\} \cup \{\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \ldots, \mathbf{u}_{i_{n-m+1}}\}$$

donde $1 \leq i_l \leq n$, $l \in \{1, 2, \ldots, n-m+1\}$.

Ahora podemos utilizar el argumento desarrollado en el caso $m = 1$ y sustituir los vectores linealmente independientes de $T' = \{\mathbf{v}_m\}$ por un vector de la base S_1. Además esa sustitución se va a hacer por un vector de la segunda parte del conjunto $\{\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \ldots, \mathbf{u}_{i_{n-m+1}}\}$ *(¿Por qué?)* y se obtiene la prueba del teorema.

■

Ya estamos en condiciones de probar el teorema 2.2.A y el corolario que sigue.

Demostración del teorema 2.2.A.

Fijemos un sistema generador finito del espacio vectorial (que supondremos que no es el formado sólo por el vector $\mathbf{0}$, si lo fuera ya sabemos por el convenio hecho que tiene base)

$$R = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

No es restrictivo suponer que en R no está el vector $\mathbf{0}$, si lo estuviera lo eliminamos y R seguiría siendo generador.

Ahora procedemos a construir la base usando la proposición 2.2.B. Si el conjunto $R_1 = \{\mathbf{w}_1\}$ es generador entonces será una base y hemos terminado.

En caso contrario elegimos el número $n_2 > 1$ más pequeño posible para el que se cumple $\mathbf{w}_{n_2} \notin < R_1 >$. Usando la proposición 2.2.B se tiene que $R_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_{n_2}\}$ es linealmente independiente. Si es generador hemos acabado, en caso contrario repetimos el proceso que tiene que ser finito por serlo R.

Al final habremos conseguido un R_l linealmente independiente y generador, es decir una base.

■

Corolario

Si el espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ tiene una base finita, todas las bases de $V_{\mathbb{K}}$ tienen el mismo número de vectores

Demostración

Supongamos que tenemos dos bases de $V_{\mathbb{K}}$:

$$R = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l\}$$

Usando el teorema de Steiner considerando R base y S linealmente independiente tenemos

$$l \leq k.$$

Ahora por el mismo teorema considerando S base y R linealmente independiente:

$$k \leq l.$$

Así que $k = l$.

■

Definición (Dimensión).

Dado un espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$, diremos que la *dimensión de* V es n si cualquier base tiene n elementos y representaremos la dimensión de $V_{\mathbb{K}}$ por $\dim(V_{\mathbb{K}})$ o $\dim V_{\mathbb{K}}$.

Propiedades

1. La dimensión de un espacio coincide con el número máximo de elementos que puede tener un conjunto linealmente independiente y también con el número mínimo de elementos que puede tener un conjunto generador.

2. Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

2.3. Cambio de bases. Matriz de cambio de base

Suponemos que sobre el espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ tenemos fijadas dos bases, $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $\beta' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Queremos saber la relación entre las coordenadas de un vector $\mathbf{w}$ en β y β'.

Con el fin de determinar esa relación construimos la *matriz de cambio de base* de β a β', para ello, cada vector de la base β' se pone como combinación lineal de los elementos de la base β:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \mathbf{u}_j.$$

Por último construimos la matriz cuadrada

$$M_{\beta\beta'} = A = (\alpha_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}.$$

Detalle de la relación

Tomamos $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$.

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \mathbf{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ji} \right) \mathbf{u}_j,$$

de donde $y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ji}$ y la relación deseada es:

$$\boxed{\mathbf{y} = M_{\beta\beta'} \mathbf{x}.}$$

3. Subespacios vectoriales

Definición (Subespacio vectorial).

Un subconjunto H de un espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ diremos que es un *subespacio vectorial* de $V_{\mathbb{K}}$ si H con las operaciones, $+$ y $\cdot$, de $V_{\mathbb{K}}$ es él mismo un espacio vectorial.

Proposición

Un subconjunto H de $V_{\mathbb{K}}$ es un subespacio vectorial de $V_{\mathbb{K}}$ si y sólo si se verifican:

1. Para cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de H se tiene que $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H$.

2. Para todo α de $\mathbb{K}$ y para todo $\mathbf{u} \in H$ se verifica $\alpha\mathbf{u} \in H$.

Ejemplo

Las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones tiene estructura de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Además $\dim(H) = n - \operatorname{rg}(A)$ (número de parámetros necesarios para resolver el sistema).

Ejemplo

Dado un conjunto de vectores S del espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$, se tiene que el espacio generado por S es un subespacio vectorial de $V_{\mathbb{K}}$.

Ejemplo

Sea $V_{\mathbb{K}}$ un espacio vectorial de dimensión n y sea β una base de $V_{\mathbb{K}}$. Dada una matriz $A \in M_{k\times n}(\mathbb{K})$ se tiene que

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\beta : A(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = \mathbf{0}\}$$

es un subespacio vectorial de $V_{\mathbb{K}}$ de dimensión $n - \operatorname{rg} A$.

3.1. Rango de un conjunto de vectores. Prueba del teorema de Rouché-Frobenius

Definición (Rango).

El *rango de un conjunto de vectores*

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

es la dimensión del espacio vectorial $< S >$.

Propiedades

El rango de una matriz

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

coincide con el rango del conjunto de $\mathbb{K}^n$ $\{\mathbf{v}_i = (a_{ij})_{j=1,\ldots,n}\}_{i=1}^m$ (*vectores fila* de A) y con el rango del conjunto de $\mathbb{K}^m$ $\{\mathbf{w}_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}\}_{j=1}^n$ (*vectores columna* de A).

Demostración del teorema de Rouché-Frobenius

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Escribimos la ecuación 1 de la siguiente manera:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

de donde se sigue:

1. Si $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(A|\mathbf{b})$, entonces el vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de los vectores de $\{\mathbf{w}_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}\}_{j=1}^n$, con lo que existen escalares x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, que verifican la ecuación 2. Por lo tanto, el sistema es compatible. Jugando otra vez con los rangos se ve que si $\text{rg}\,(A) \neq \text{rg}\,(A|\mathbf{b})$ entonces el sistema es incompatible, puesto que $\mathbf{b}$ no es combinación lineal de $\{\mathbf{w}_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}\}_{j=1}^n$.

2. Si $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(A|\mathbf{b}) = n$ entonces la expresión de $\mathbf{b}$ como combinación lineal de los vectores de $\{\mathbf{w}_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}\}_{j=1}^n$ es única, puesto que estos últimos son linealmente independientes. En consecuencia el sistema es compatible determinado.

3.2. Operación con subespacios: intersección, unión y suma

Fijamos un espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$ y subespacios vectoriales H y H'.

Proposición

$H \cap H'$ es un subespacio de $V_{\mathbb{K}}$.

Observación

$H \cup H'$ no es en general un subespacio de $V_{\mathbb{K}}$.

Definición (Suma de subespacios vectoriales).

$H + H' :=< H \cup H' >$, es decir, el subespacio suma es el espacio generado por la unión de los conjuntos H y H'.

Definición (Suma directa).

La suma $H + H'$ se dice que es *directa* cuando para todo vector $\mathbf{v} \in H + H'$, existen únicamente dos vectores $\mathbf{v}_1 \in H$ y $\mathbf{v}_2 \in H'$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Proposición

La suma de H y H' es directa si y sólo si $H \cap H' = \{\mathbf{0}\}$.

Acabamos este apartado con la importante fórmula de Grassmann.

Teorema (Grassman)

$$\dim(H + H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H \cap H').$$

3.3. Ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial

Dado un espacio vectorial $V_{\mathbb{K}}$, un subespacio de él H, y una base $\beta'' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ de $V_{\mathbb{K}}$, las ecuaciones que satisfacen las coordenadas de los vectores de H expresados en la base β'' reciben el nombre de *ecuaciones cartesianas de H respecto de la base β''*.

Procedimiento

✓ Tomamos una base de H, $\beta = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.

✓ Completamos β hasta una base de $V_{\mathbb{K}}$, $\beta' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$.

✓ Elegimos un vector arbitrario $\mathbf{v} \in H$ y tomamos sus coordenadas en β y β'':

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

✓ Calculamos las coordenadas de los vectores $\mathbf{e}_j$ respecto a β': $\mathbf{e}_j = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lj}\mathbf{w}_j$.

Así que:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_{lj}\mathbf{w}_l \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_{lj} \right) \mathbf{w}_l.$$

Y como $\mathbf{v} \in H$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_{lj} = 0 \qquad \forall l \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}.$$

(Ecuaciones cartesianas de H respecto de la base $\beta'' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$)

4. Ejercicios resueltos

Ejercicio

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $S = \{u, v, w\}$ un sistema libre. ¿Es $T = \{u + v + w, v + 3w, 2v + w\}$ un sistema libre de vectores?

Solución.

Veamos que T es linealmente independiente, para ello tomamos una combinación lineal de vectores de S igual al vector $\mathbf{0}$ y demostramos que los coeficientes son todos cero:

$$\begin{aligned} &\alpha(u+v+w)+\beta(v+3w)+\gamma(2v+w) \\ =\ &\alpha u+(\alpha+\beta+2\gamma)v+(\alpha+3\beta+\gamma)w=\mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\overset{S \text{ l.i.}}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha=0, \\ \alpha+\beta+2\gamma=0, \\ \alpha+3\beta+\gamma=0. \end{cases}$$

Como el sistema anterior es compatible y determinado (por tener su matriz asociada rango 3) se tiene que la única solución es $\alpha=\beta=\gamma=0$ y T es un sistema libre.

Ejercicio

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_5$ y sea $\{u,v,w\}$ un conjunto de vectores. ¿Es $\{u+v+w, v+3w, 2v+w\}$ un sistema libre de vectores?

Solución.

Veamos que T es linealmente dependiente y por lo tanto no es libre. Para ello basta con encontrar una combinación lineal de vectores de S igual al vector $\mathbf{0}$ y con no todos sus coeficientes cero:

$$\begin{aligned} &0(u+v+w)+3(v+3w)+1(2v+w) \\ &= 0v+0w=\mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ejercicio

¿Es $(\mathbb{R},+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Solución. Por las propiedades de los números reales sabemos que $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano. Así que los cuatro primeros axiomas de espacio vectorial (los referentes a la suma) se satisfacen.

Veamos ahora que también se cumplen las propiedades referentes al producto. Para ello tomamos escalares cualesquiera $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y vectores $v,w\in\mathbb{R}$. Comprobamos que se satisfacen los cuatro axiomas en los que está involucrado el producto:

1. $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$ se cumple, es la propiedad distributiva de los números reales.

2. $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$, otra vez se trata de la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

3. $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$, esta es la propiedad asociativa de los números reales.

4. $1v = v$ es cierto ya que 1 es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}$.

Así que se satisfacen todos los axiomas de espacio vectorial y por lo tanto $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio

Dados los subespacios de $\mathbb{Z}_5^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 : x = y = 0\}, \\ T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 : x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.

Solución. La matriz asociada al sistema que define S es:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la dimensión de S es $3 - \operatorname{rg} A = 3 - 2 = 1$.

Una base de S estará formada por un vector no nulo y que pertenezca a S:

$$\beta_S = \{(0,0,1)\}$$

.

Ahora calculamos los datos solicitados de T. La matriz asociada al sistema que define T es:

$$(C|d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la dimensión de S es $3 - \operatorname{rg} C = 3 - 1 = 2$.

Una base de T estará formada por dos vectores linealmente independiente que pertenezcan a T:

$$\beta_T = \{(1,0,4), (0,2,3)\}$$

.

(b) Calcular $S \cap T$ y $S + T$, dando una base de dichos subespacios.

Solución.

$$S \cap T$$

La matriz asociada al sistema que define este subespacio (unión de las ecuaciones que define a S y a T) es:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2^1(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3^2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $\dim S \cap T = 3 - \operatorname{rg} A = 0$, $S \cap T = \{(0,0,0)\}$ y $\beta_{S\cap T} = \emptyset$.

$$S + T$$

Utilizando la fórmula de Grassman se tiene: $\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 2 + 1 = 3$.

Por lo tanto $S + T = \mathbb{Z}_5^3$ y $\beta_{S+T} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(c) ¿Es la suma $S + T$ directa?

Solución. Sí porque la intersección $S \cap T = \{(0,0,0)\}$

(d) $\operatorname{Card} \mathbb{Z}_5^3$, $\operatorname{Card} S$ y $\operatorname{Card} T$.

Solución. $\operatorname{Card} \mathbb{Z}_5^3 = 5^3 = 125 = \operatorname{Card} T$.

Ejercicio

Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)\},$$

$$\beta_C = \{w_1 = (1,1,0), w_2 = (0,1,1), w_3 = (0,0,1)\}, \quad B = \{(2,2,1)_{\beta_C}\}$$

y se pide:

1. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$.

   Solución. Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_C respecto a β_A. Calculamos esas coordenadas:

   - $w_1 := (1,1,0) = 2v_1 - v_2 - v_3 = (2,-1,-1)_{\beta_A}$,
   - $w_2 := (0,1,1) = v_2 = (0,1,0)_{\beta_A}$,
   - $w_3 := (0,0,1) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1,1,1)_{\beta_A}$.

   Así que:

$$M_{\beta_A\beta_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$.

   Solución. Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_A respecto a β_C.

   - $v_1 := (1,1,1) = w_1 + w_3 = (1,0,1)_{\beta_C}$,
   - $v_2 := (0,1,1) = w_2 = (0,1,0)_{\beta_C}$,
   - $v_3 := (1,0,1) = w_1 - w_2 + 2w_3 = (1,-1,2)_{\beta_C}$,

   así que:

$$M_{\beta_C\beta_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A.

   Solución. Usando la matriz $M_{\beta_A\beta_C}$ es fácil calcular esas coordenadas:

   - $\left[M_{\beta_A\beta_C}(2,2,1)^t_{\beta_C}\right]^t = (3,1,-1)_{\beta_A}$.

Por lo tanto:

$$B = \{(3, 1, -1)_{\beta_A}\}.$$

4. Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A.

Solución.

Antes de nada tenemos claro que se necesitan dos ecuaciones (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de $< B >$).

Un vector $(x, y, z)_{\beta_A} \in < B >$ si y sólo si

$$(x, y, z)_{\beta_A} = \alpha(3, 1, -1)_{\beta_A} = (3\alpha, \alpha, -\alpha)_{\beta_A}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\alpha, \\ y = \alpha, \\ z = -\alpha \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 0, \\ y + z = 0. \end{array} \right.}$$

Ejercicio

En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S =< (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1) > \quad \text{y} \quad T = \{(x, y, z, t) : x = 0, 2y - z - t = 0\}$$

y se pide:

1. Una base, la dimensión y las ecuaciones de S.

   Solución. Los dos vectores que generan S también son linealmente independientes, por lo tanto son una base de S:

$$\beta_S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}.$$

Ahora calculamos las ecuaciones que debe satisfacer un vector $(x, y, z, t) \in S$:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 1, 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \beta, \\ t = \beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{array} \right.}$$

2. Una base y la dimensión de T.

   Solución. Como la dimensión de T es 2 (dim$\mathbb{R}^4$-número de ecuaciones linealmente independientes que definen a T) bastará con encontrar dos vectores linealmente independientes en T para dar una base:

$$\beta_T = \{(0,0,1,-1),(0,1,2,0)\}.$$

3. Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S \cap T$.

   Solución. Las ecuaciones de $S \cap T$ se obtienen como la unión de las ecuaciones de S con las ecuaciones de T:

$$\begin{cases} x = 0, \\ 2y - z - t = 0, \\ y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 - F_3 - F_4 \\ \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{cases}}$$

   Así que dim$S \cap T = 4 - \text{rg}\, A = 1$ (A es la matriz asociada al sistema que define $S \cap T$).

   Ahora obtenemos la base de $S \cap T$:

$$\beta_{S\cap T} = \{(0,1,1,1)\}.$$

4. Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S + T$.

   Solución.

   Usando la fórmula de Grassman se tiene que:

$$\text{dim}S + T = \text{dim}S + \text{dim}T - \text{dim}S \cap T = 2 + 2 - 1 = 3.$$

   Un conjunto generador de $S + T$ se obtiene uniendo conjuntos generadores de S y de T, es decir:

$$S + T = < (1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,-1),(0,1,2,0) >,$$

de estos cuatro vectores ahora nos quedamos con tres que sean linealmente independientes y tendremos una base de $S+T$. Es fácil darse cuanta que los tres primeros vectores son linealmente independientes, luego:

$$\beta_{S+T} = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,-1)\}.$$

Acabamos dando las ecuaciones que satisface el subespacio $S+T$, para ello tomamos $(x,y,z,t) \in S+T$ y recordamos que necesitamos 1 ecuación ($\dim\mathbb{R}^4 - \dim S+T$), entonces:

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) &= \alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,1,1)+\gamma(0,0,1,-1)\\ &= (\alpha,\beta,\beta+\gamma,\beta-\gamma)\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha, \\ y=\beta, \\ z=\beta+\gamma, \\ t=\beta-\gamma. \end{cases} \Rightarrow \boxed{z+t-2y=0.}$$

5. Dada la base $\beta = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, justifica si el vector $(1,2,3,4)_\beta$ pertenece a alguno de los subespacios $S, T, S\cap T, S+T$.

Solución. Obtenemos fácilmente las coordenadas del vector $(1,2,3,4)_\beta$ en la base canónica:

$$\begin{aligned}(1,2,3,4)_\beta &= (1,0,0,0)+2(1,1,0,0)+3(1,1,1,0)+4(1,1,1,1)\\ &= (10,9,7,4).\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que este vector no satisface las ecuaciones de ninguno de los subespacios dados. Así que $(1,2,3,4)_\beta$ no pertenece a ninguno de los subespacios propuestos.

Ejercicio

Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, estudiar si los siguientes conjuntos de matrices son subespacios vectoriales. En caso de que sean subespacios vectoriales, calcular las ecuaciones cartesianas de estos respecto de la base:

$$\beta = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$$

a) $M_1 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ A \text{ es simétrica}\}$

Solución. M_1 es un subespacio vectorial ya que:

- Si $A, B \in M_1$ entonces $A^t = A$ y $B^t = B$. Por lo tanto $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, es decir, $A + B \in M_1$.
- Si $A \in M_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $A^t = A$ y $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$, es decir, $\alpha A \in M_1$.

Calculamos ahora las ecuaciones de M_1 respecto de la base β: sea $H \in M_1$ con coordenadas en β las que siguen:

$$H = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Como $H^t = H$ entonces $y = z$, es decir, $y - z = 0$. Ésta es la ecuación lineal homogénea que satisfacen las coordenadas de los vectores de M_1 en la base β.

Calculamos ahora una base del subespacio M_1. Si S es la matriz asociada al sistema que define a M_1, la dimensión de M_1 es $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) - \operatorname{rg} S = 4 - 1 = 3$.

Así que basta con dar 3 vectores linealmente independientes de M_1 para tener una base:

$$\beta_{M_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $M_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ A^2 = A\}$

Solución. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$, pero $5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_2$, así que M_2 no es un subespacio vectorial.

c) $M_3 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 0\}$

Solución. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3$, pero $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M_3$, así que M_3 no es un subespacio vectorial.

d) $M_4 = \{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ a \in \mathbb{R} \ \}$

Solución. M_4 es un subespacio vectorial porque:

- Si $A, B \in M_4$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, así que: $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in M_4$.
- Si $A \in M_4$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $\alpha A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha a \end{pmatrix} \in M_4$.

Como cualquier elemento de M_4 es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\beta_{M_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de M_4 al ser un sistema generador y linealmente independiente.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$

Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.

Solución. Es un subespacio vectorial por ser sus elementos las soluciones de un sistema lineal homogéneo. Además la dimensión es 3 menos el rango de la matriz que define el sistema, es decir la dimensión es $3 - 1 = 2$.

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$.

Solución. No es un subespacio vectorial porque $(1, 0, 0) \in W$ pero $2(1, 0, 0) \notin W$.

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$.

Solución. Es un subespacio vectorial por ser sus elementos las soluciones de un sistema lineal homogéneo. Además la dimensión es 3 menos el rango de la matriz que define el sistema, es decir la dimensión es $3 - 2 = 1$.

(d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \ y \ x_3 - x_2 = 0\}$.

Solución. Es un subespacio vectorial por ser sus elementos las soluciones de un sistema lineal homogéneo. Además la dimensión es 3 menos el rango de la matriz que define el sistema, es decir la dimensión es $3 - 2 = 1$.

(e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2^2 = 0\}$.

Solución. No es un subespacio vectorial porque $(-1, 1, 0) \in W$ pero $5(-1, 1, 0) \notin W$.

Ejercicio

Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{Z}_5^3$ son subespacios vectoriales:

(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.

Solución. Por los mismos motivos que en el ejercicio anterior (el mismo apartado) W es un subespacio vectorial. La dimensión sigue siendo la misma por un razonamiento análogo.

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$.

Solución. No es un subespacio vectorial porque $(1, 0, 0) \in W$ pero $2(1, 0, 0) \notin W$.

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 = x_2 = 0\}$.

Solución. Por los mismos motivos que en el ejercicio anterior (el mismo apartado) W es un subespacio vectorial. La dimensión sigue siendo la misma por un razonamiento análogo.

(d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2 = 0 \; y \; x_3 - x_2 = 0\}$.

Solución. Por los mismos motivos que en el ejercicio anterior (el mismo apartado) W es un subespacio vectorial. La dimensión sigue siendo la misma por un razonamiento análogo.

(e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2^2 = 0\}$.

Solución. No es un subespacio vectorial porque $(4, 1, 0) \in W$ pero $2(4, 1, 0) = (3, 2, 0) \notin W$ ya que $3 + 2^2 = 3 + 4 = 2 \neq 0$.

(f) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : x_1(x_1^2 + 2) = 0\}$.

Solución. Busquemos otra descripción del conjunto W. El vector $(x, y, z) \in W$ si y sólo si $x(x^2 - 1) = 0$, así que $x = 0$ ó $x^2 = 1$. Además la ecuación $x^2 = 1$ se satisface para los valores de $x = 1$ y $x = 2$.

Así que $W = \mathbb{Z}_3^3$ y por lo tanto es un subespacio vectorial.

Ejercicio

Sea $A \in M_{k\times n}(\mathbb{K})$ y F_A el conjunto formado por los vectores fila de la matriz A ($F_A \subset \mathbb{K}^n$). Sea B una matriz obtenida de A mediante una operación elemental por filas y F_B el conjunto formado por los vectores fila de la matriz B ($F_B \subset \mathbb{K}^n$).

Entonces $< F_A >=< F_B >$.

Demostración

Para esta demostración hay que distinguir tres casos:

- *B se obtiene de A intercambiando dos filas.* En este caso $F_A = F_B$ y claramente $< F_A >=< F_B >$.
- *B se obtiene de A multiplicando la fila j por un escalar $\alpha \neq 0$.* Si llamamos v_l al vector fila l-ésima de la matriz A entonces:

  $$F_A = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$$

  y

  $$F_B = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, \alpha v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}.$$

  Si $v \in< F_A >$ entonces:

  $$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots \alpha_n v_n$$
  $$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j \alpha^{-1} \alpha v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots \alpha_n v_n,$$

  es decir $v \in< F_B >$. Así que hemos probado $< F_A >\subset< F_B >$.

  Probamos ahora la inclusión contraria. Si $v \in< F_B >$ entonces:

  $$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j \alpha v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots \alpha_n v_n$$

  ,

  así que $v \in< F_A >$. Por lo tanto $< F_B >\subset< F_A >$.

  Hemos probado por lo tanto la igualdad $< F_B >=< F_A >$.
- *B se obtiene de A sumando a la fila i la fila j multiplicada por un escalar $\alpha \neq 0$.* Si llamamos v_l al vector fila l-ésima de la matriz A entonces:

  $$F_A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

y

$$F_B = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_k\}.$$

Si $v \in < F_A >$ entonces:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots \alpha_n v_n \\ \Rightarrow v &= \sum_{l \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{i,j\}}^{n} \alpha_l v_l + \alpha_i (v_i + \alpha v_j) + (\alpha_j - \alpha_i \alpha) v_j, \end{aligned}$$

es decir $v \in < F_B >$. Así que hemos probado $< F_A > \subset < F_B >$.

Probamos ahora la inclusión contraria. Si $v \in < F_B >$ entonces:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{l \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{i,j\}}^{n} \alpha_l v_l + \alpha_i (v_i + \alpha v_j) + \alpha_j v_j \\ &= \sum_{l \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{i,j\}}^{n} \alpha_l v_l + \alpha_i v_i + (\alpha \alpha_i + \alpha_j) v_j \end{aligned}$$

así que $v \in < F_A >$. Por lo tanto $< F_B > \subset < F_A >$.

Hemos probado por lo tanto la igualdad $< F_B > = < F_A >$.

Ejercicio

Sea $P_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que cuatro. Dadas las siguientes bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{x,\ x^2 + 1,\ 2x^4 + x^3,\ x^3 - x^2 + x,\ x^2 + x\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{2x^4 + 1,\ x^3 - 1,\ x^3 + 2x,\ x^2,\ x^3 - x^2\}$$

a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Solución. Recurrimos a la definición y calculamos las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1$. Para simplificar la notación denotaremos a los vectores de ambas bases como sigue:

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}.$$

$$v_1 = 2x^4 + 1 = 3u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - 2u_5 = (3, 1, 1, -1, -2)_{\mathcal{B}_1},$$
$$v_2 = x^3 - 1 = -3u_1 - u_2 + u_4 + 2u_5 = (-3, -1, 0, 1, 2)_{\mathcal{B}_1},$$
$$v_3 = x^3 + 2x = u_4 + u_5 = (0, 0, 0, 1, 1)_{\mathcal{B}_1},$$
$$v_4 = x^2 = -u_1 + u_5 = (-1, 0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}_1},$$
$$v_5 = x^3 - x^2 = -u_1 + u_4 = (-1, 0, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}_1},$$

Así que:

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Halla las coordenadas respecto de dichas bases del polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Solución. Calculamos primero las coordenadas de $p(x)$ en la base $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned} p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 &= \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + 2v_4 + v_5 \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right)_{\mathcal{B}_2} \end{aligned}$$

Ahora para calcular las coordenadas del vector en $\mathcal{B}_1$ basta con hacer la multiplicación:

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right)^t_{\mathcal{B}_2} = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t_{\mathcal{B}_1}$$

Capítulo 5

Aplicaciones lineales

1. Preliminares

Antes de desarrollar los conceptos de este tema conviene aclarar o repasar los conceptos de **aplicación** y enumerar sus **tipos**. ecuación numérica:

Definición 5.1 (Aplicación). *Una aplicación entre dos conjuntos, A y B, es una ley que hace corresponder a cada elemento de A un único elemento de B.*

Para denotar esta ley se le suele denotar por una letra del alfabeto y se utiliza la ***notación*** *$f : A \to B$.*

Si el elemento a de A está relacionado con el elemento b de B se suele escribir $f(a) = b$, también se suele decir que b es la ***imagen*** *de a o que a es una* ***antiimagen*** *de b.*

Definición 5.2 (Conjuntos asociados a una aplicación $f : A \to B$). *Al conjunto A se le suele llamar* **conjunto original** *y al conjunto B* **conjunto final**.

El **conjunto imagen de** *f se denota por $f(A)$ y se define por la igualdad:*

$$f(A) := \{y \in B : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Ejemplo 5.3. *Dada la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$, se tiene:*

- *El conjunto inicial de f es $\mathbb{N}$,*
- *El conjunto final de f es $\mathbb{N}$,*
- *El conjunto imagen es el conjunto de los números naturales pares,*

- 4 *es la antiimagen de* 8*,*

- 3 *no es la imagen de ningún número natural.*

Definición 5.4 (Tipos de aplicaciones)**.** *1. Una aplicación* $f : A \to B$ *se dice* **inyectiva** *si se verifica:*

$$\text{si } f(a) = f(b) \text{ entonces } a = b.$$

2. Una aplicación $f : A \to B$ *se dice* **suprayectiva o exhaustiva** *si se verifica:*

todo elemento de B *tiene una antiimagen.*

3. Una aplicación $f : A \to B$ *se dice* **biyectiva** *si se verifica:*

f *es inyectiva y exhaustiva.*

Ejemplo 5.5. *La aplicación* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2$ *no es inyectiva ni suprayectiva.*

f *no es inyectiva ya que* $f(2) = f(-2) = 4$ *y sin embargo* $2 \neq -2$*.*

f *no es suprayectiva ya que* -1 *no tiene antiimagen.*

Proposición 5.6 (Aplicación inversa)**.** *Si* $f : A \to B$ *es una aplicación biyectiva entonces existe una aplicación* $g : B \to A$ *tal que:*

$$f \circ g = 1_B \qquad g \circ f = 1_A,$$

donde 1_A *y* 1_B *son las siguientes aplicaciones:*

$$\begin{array}{cccc} 1_A : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \to & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1_B : & B & \longrightarrow & B \\ & b & \to & b. \end{array}$$

La aplicación g *se llama* ***inversa de la aplicación*** f**.**

Demostración. La definición de $g : B \to A$ se hace como sigue: para cada elemento $b \in B$ existe una única antiimagen a por f (aplicación biyectiva) tal que $f(a) = b$.

Ahora se define $g(b) = a$ y es rutinario comprobar que g satisface las propiedades enunciadas.

□

2. Introducción de las aplicaciones lineales

Definición 5.7 (Aplicación lineal)**.** *Dados dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W y una aplicación $f : V \to W$ entre ellos, diremos que f es lineal si verifica:*

- $\forall\, u, v \in V \;\; f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ *y* $\forall\, u \in V \;\; f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Ejemplo 5.8. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x) = 2x$. Entonces se tiene que f es lineal, ya que para cada $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$:*

1. $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$
2. $f(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha 2x = \alpha f(x)$

Ejemplo 5.9. *La aplicación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $g(x, y) = (x + y, x - y, x)$ es lineal, ya que:*

$\forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*:*

1. $$\begin{aligned} g(u + v) = g\left((u_1, u_2) + (v_1, v_2)\right) = g\left(u_1 + v_1, u_2 + v_2\right) \\ = (u_1 + u_2 + v_1 + v_2, u_1 - u_2 + v_1 - v_2, u_1 + v_1) \\ = g(u) + g(v) = g\left(u_1, u_2\right) + g\left(v_1, v_2\right) \\ = (u_1 + u_2, u_1 - u_2, u_1) + (v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_1) \end{aligned}$$

2. $g(\alpha(u_1, u_2)) = \alpha g\left(u_1, u_2\right)$ *(demostrar en casa).*

Ejercicio 5.10 (de la hoja distribuida)**.** *Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (x - y, 2x - y^2)$.

2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y, z, u) = (x - y,\ u + z,\ z,\ 2x - y)$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $f(x, y) = (x - y,\ x - 2y,\ 3y)$.

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $f(x, y, z) = (x - z + y,\ 2x - y - 3z,\ z + y)$.

2.1. Propiedades de las aplicaciones lineales

Proposición 5.11. *$f : V \to W$ es lineal si y sólo si $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$.*

Demostración. (⇒) Partimos en este caso de la premisa "f es lineal", por lo tanto usando simultáneamente las dos propiedades que definen una aplicación lineal, se tiene:

$$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

(⇐) Para probar el recíproco tendremos que demostrar dos cosas:

1. Si $u, v \in V$ entonces $f(u + v) = f(u) + f(v)$. La demostración de este hecho es fácil, en efecto:
$$f(u + v) = f(1u + 1v) = 1f(u) + 1f(v) = f(u) + f(v).$$

2. Si $u \in V$ y $\alpha \in V$ entonces $f(\alpha u) = \alpha f(u)$. La demostración de esto es la que sigue:
$$f(\alpha u) = f(\alpha u + 0v) = \alpha f(u) + 0f(v) = \alpha f(u).$$

□

Proposición 5.12. *Si $f : V \to W$ es lineal entonces $f(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$, donde $\mathbf{0_V}$ y $\mathbf{0_W}$ denotan respectivamente los ceros de los espacios vectoriales V y W.*

Demostración. $f(\mathbf{0_V}) = f(\mathbf{0_V} + \mathbf{0_V}) = f(\mathbf{0_V}) + f(\mathbf{0_V})$. Así que $f(\mathbf{0_V}) = f(\mathbf{0_V}) + f(\mathbf{0_V})$ y si sumamos en ambos miembros el opuesto de $f(\mathbf{0_V})$ se obtiene $\mathbf{0_W} = f(\mathbf{0_V})$ como se quería demostrar. □

Proposición 5.13. *1. La composición de dos aplicaciones lineales es lineal,*

2. La inversa de una aplicación lineal es también lineal.

2.2. Tipos de aplicaciones lineales

Definición 5.14. *1.* **Isomorfismo***: es una aplicación lineal biyectiva.*

2. **Epimorfismo***: es una aplicación lineal suprayectiva.*

3. **Monomorfismo***: es una aplicación lineal inyectiva.*

4. Si el espacio de partida y llegada es el mismo, $f : V \to V$*, y* f *es lineal diremos que* f *es un* **endomorfismo***.*

5. Un **endomorfismo** *biyectivo se llamará automorfismo.*

3. Subespacios vectoriales asociados a una aplicación lineal

Definición 5.15 (Kernel e Imagen)**.** *Dada una aplicación lineal* $f : V \to W$*, definimos el* **Kernel** *de dicha aplicación como el subconjunto de* V *definido por:*

$$\operatorname{Ker} f := \{v \in V : f(v) = \mathbf{0_W}\}.$$

Para la misma aplicación f *se define la* ***imagen*** *de* f *como:*

$$\operatorname{Im} f := \{f(v) : v \in V\}.$$

Proposición 5.16. *1.* $\operatorname{Ker} f$ *es un subespacio vectorial de* V *(*$\operatorname{Ker} f \leq V$*).*

2. $\operatorname{Im} f$ *es un subespacio vectorial de* W *(*$\operatorname{Im} f \leq W$*).*

Demostración. 1. Veamos que $\operatorname{Ker} f \leq V$, para ello es necesario comprobar:

a) Si $v, w \in \operatorname{Ker} f$ entonces $v + w \in \operatorname{Ker} f$. En efecto, como $v \in \operatorname{Ker} f$ y $w \in \operatorname{Ker} f$ entonces $f(v) = f(w) = \mathbf{0_W}$ y por ser f lineal:

$$f(v + w) = f(v) + f(w) = \mathbf{0_W} + \mathbf{0_W} = \mathbf{0_W} \Rightarrow v + w \in \operatorname{Ker} f.$$

b) Si $v \in \operatorname{Ker} f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha v \in \operatorname{Ker} f$. Procediendo de forma análoga tenemos que $f(v) = \mathbf{0_W}$ ya que $v \in \operatorname{Ker} f$ y ahora usando la linealidad de f:

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \mathbf{0_W} = \mathbf{0_W} \Rightarrow \alpha v \in \operatorname{Ker} f.$$

2. Probemos ahora que $\operatorname{Im} f \leq W$. Igual que antes hay que probar los siguientes dos apartados.

   a) Si $v, w \in \operatorname{Im} f$ entonces $v + w \in \operatorname{Im} f$. Como $v \in \operatorname{Im} f$ y $w \in \operatorname{Im} f$ entonces existen $v_1, w_1 \in V$ tales que $f(v_1) = v$ y $f(w_1) = w$ y por ser f lineal:

$$f(v_1 + w_1) = f(v_1) + f(w_1) = v + w \Rightarrow v + w \in \operatorname{Im} f.$$

   b) Si $v \in \operatorname{Im} f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha v \in \operatorname{Im} f$. Procediendo de forma análoga tenemos que $f(v_1) = v$ para algún $v_1 \in V$ ya que $v \in \operatorname{Im} f$ y ahora usando la linealidad de f:

$$f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha v \Rightarrow \alpha v \in \operatorname{Im} f.$$

□

Ejercicio 5.17 (de la hoja distribuida)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Se define el* ***conjunto invariante*** *de f, denotado* Inv(f)*, como el conjunto de vectores los vectores v que permanecen invariantes por la aplicación, es decir,*

$$\operatorname{Inv}(f) = \{v \in V : f(v) = v\}$$

Demuestra que el conjunto invariante de una aplicación lineal es un subespacio vectorial.

3.1. Determinación de un monomorfismo por su kernel

Por definición se tiene que la aplicación lineal $f : V \to W$ será exhaustiva si y sólo si el subespacio vectorial $\operatorname{Im} f = W$. Es decir f es un epimorfismo si y sólo si $\operatorname{Im} f = W$.

Ahora nos gustaría saber si hay alguna relación entre que una aplicación sea monomorfismo y su kernel. Dicha relación existe y viene recogida en el siguiente teorema.

Teorema 5.18. *La aplicación lineal $f : V \to W$ es un monomorfismo si y sólo si* $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_V}\}$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Dada una aplicación lineal cualquiera $f: V \to W$ se tiene que $f(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$ y por lo tanto $\mathbf{0_V} \in \operatorname{Ker} f$. Por otro lado si existe algún $v \neq \mathbf{0_V}$ tal que $v \in \operatorname{Ker} f$ tendríamos que $f(v) = f(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$ y se rompería la inyectividad, así que forzosamente $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_V}\}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que tenemos una aplicación lineal que satisface $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_V}\}$ y que además $f(v) = f(w)$. Entonces $\mathbf{0_W} = f(v) - f(w) = f(v - w)$ por lo que $v - w \in \operatorname{Ker} f$. Así que $v - w = \mathbf{0_V}$ y $v = w$, es decir, la aplicación f es inyectiva.

$\square$

Ejercicio 5.19 (de la hoja distribuida)**.** *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabiendo que*

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \}$$

y $f(1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$.

3.2. Un apunte sobre dimensiones que os ayudará en los ejercicios

Proposición 5.20. *Dada una aplicación lineal $f : V \to W$ se satisface:*

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

4. Matrices asociadas a una aplicación lineal

Definición 5.21. *Sean V y W espacios vectoriales sobre los que fijamos respectivamente las siguientes bases:*

$$\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}.$$

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal para la que conocemos las imágenes de los elementos de β expresadas en coordenadas sobre la base β', es decir:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})_{\beta'}$$

La matriz asociada a f respecto de las bases β y β' es:

$$M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{K})$$

Ejercicio 5.22. *Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:*

$$f(1,1,1,1) = (0,0,1) \qquad f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$$

$$f(1,1,1,0) = (0,0,-1) \qquad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$$

Se pide calcular:

1. *La matriz de f respecto a las bases canónicas.*

Solución. □

4.1. Propiedades de las matrices de cambio de base

Proposición 5.23. *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, $v \in V$ y $w = f(v)$ y las coordenadas son $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)_\beta$ y $w = (b_1, b_2, \dots, b_m)_{\beta'}$, entonces:*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{\beta'} = M_{\beta\beta'}(f) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\beta}$$

Ejercicio 5.24. *Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:*

$$f(1,1,1,1) = (0,0,1) \qquad f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$$

$$f(1,1,1,0) = (0,0,-1) \qquad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$$

Se pide calcular:

2. *La dimensión y ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.*

Proposición 5.25 (Matriz de la composición de aplicaciones). *Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son dos aplicaciones lineales entonces $g \circ f : V \to U$ es una aplicación lineal. Además si β, β' y β'' son bases respectivas de V, W y U, se tiene que:*

$$M_{\beta\beta''}(g \circ f) = M_{\beta'\beta''}(g) M_{\beta\beta'}(f)$$

Proposición 5.26 (Relación con matrices de cambio de bases). *Sea V un espacio vectorial, β y β' bases del mismo y $Id : V \to V$ la aplicación identidad. Entonces*

$$M_{\beta\beta'}(Id) = M_{\beta'\beta}.$$

4.2. Matriz asociada a una aplicación lineal f respecto de otras bases

Dados espacios vectoriales V y W, una aplicación lineal $f : V \to W$ y bases respectivas de los anteriores espacios

$$\beta_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \beta_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\},$$

podemos construir la matriz $M_{\beta_V \beta_W}(f)$ como se ha explicado antes.

Suponed ahora que nos dan otras bases:

$$\beta'_V = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\} \qquad \beta'_W = \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_m\}$$

y nos piden la matriz $M_{\beta'_V \beta'_W}(f)$. Para este cálculo hay dos posibilidades:

1. Utilizar la definición de aplicación lineal (ya se ha explicado).

2. Utilizar la matriz $M_{\beta_V \beta_W}(f)$ y las matrices de cambio de base $M_{\beta_V \beta'_V}$ y $M_{\beta_W \beta'_W}$. Para obtener esta relación hacemos notar:

   El diagrama siguiente, donde Id_1 e Id_2 son la aplicación identidad, es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ (V, \beta_V) & \longrightarrow & (W, \beta_W) \\ Id_1 \uparrow & & \downarrow Id_2 \\ & f & \\ (V, \beta'_V) & \longrightarrow & (W, \beta'_W) \end{array}$$

En el diagrama se ve que $f = Id_2 \circ f \circ Id_1$ y utilizando una proposición anterior para calcular la matriz de una composición, se tiene:

$$M_{\beta'_V,\beta'_W}(f) = M_{\beta'_V,\beta'_W}(\underset{2}{Id} \circ f \circ \underset{1}{Id}) =$$
$$M_{\beta_W,\beta'_W}(\underset{2}{Id})M_{\beta_V,\beta_W}(f)M_{\beta'_V,\beta_V}(\underset{1}{Id}) =$$
$$M_{\beta'_W,\beta_W}M_{\beta_V,\beta_W}(f)M_{\beta_V,\beta'_V}$$

Ejercicio 5.27. *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal definida por:*

$$f(1,1,1,1) = (0,0,1) \qquad f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$$
$$f(1,1,1,0) = (0,0,-1) \qquad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$$

Se pide calcular:

3. *La matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base de $\mathbb{R}^3$,*

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$$

así como las ecuaciones de la imagen de f en esta última base.

4. *La matriz de f respecto de las bases de*

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (1,1,1,1)\} \text{ (de } \mathbb{R}^4\text{)}$$

y

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \text{ (de } \mathbb{R}^3\text{),}$$

así como las ecuaciones del núcleo y la imagen de f en estas bases.

5. *El rango de la aplicación.*

5. Ejercicios Resueltos

Ejercicio

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ que verifica:

$$f(1,0,1) = (1,0), \quad f(0,1,1) = (2,3), \quad f(0,0,1) = (1,1).$$

En este ejercicio usaremos la notación β_A para denotar a la base definida en el ejercicio anterior. Además β_C^3 y β_C^2 serán respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Se pide:

1. Decir quiénes son n y k.

   Solución. $n = 3$ y $k = 2$.

2. Calcular $M_{\beta_A \beta_C^2}(f)$.

   Solución. De las imágenes que nos dan de los vectores de β_A obtenemos:

$$M_{\beta_A \beta_C^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcular $M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f)$.

   Solución.

$$M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f) = M_{\beta_C^2 \beta_C^2} M_{\beta_A \beta_C^2}(f) M_{\beta_A \beta_C^3} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$.

   Solución. Un vector (x, y, z) pertenece a $\operatorname{Ker} f$ si y sólo si $M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f)(x, y, z)^t = \mathbf{0}$. Así que:

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

   Por lo tanto $\dim\operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f) = 1$ y $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1, 1, -1)\}$.

5. Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$.

   Solución. Sabemos que

$$\operatorname{Im} f = <(0, -1), (1, 2), (1, 1)> .$$

Como el primer y segundo vector forman un conjunto de vectores linealmente independientes y maximal entonces $\beta_{\mathrm{Im}\, f} = \{(0,-1),(1,2)\}$. Así que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ y no se pueden dar ecuaciones de este subespacio.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

(1.1). Los valores de n y de m *(0,3 puntos)*.

Solución. Los valores de n y de m son respectivamente 2 y 3, es decir, el número de columnas y filas de la matriz A.

(1.2). La expresión analítica de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ *(0,4 puntos)*.

Solución. $f(x,y) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^t = (2x, x+y, 2y).$

(1.3). La matriz de f respecto de las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),\ (1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$

(0,9 puntos).

Solución. Vamos a calcular esta matriz utilizando la definición de la misma. Para ello debemos calcular las imágenes de los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$ por la aplicación f y a calcular las coordenadas de esas imágenes en la base $\mathcal{B}'$:

$$f(1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = (0,0,2)_{\mathcal{B}'},$$
$$f(1,0) = (2,1,0) = (1,0,0) + (1,1,0) = (1,1,0)_{\mathcal{B}'}.$$

Así que la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Responde justificadamente:

(1.4). ¿Se puede hacer la composición $f \circ f$? ¿Qué tamaño tendría la matriz asociada a $f \circ f$? *(0,4 puntos)*.

Solución. No se puede hacer la composición porque el espacio de partida y llegada de f no coinciden.

(1.5). ¿Es la aplicación f invertible? *(0,5 puntos)*.

Solución. No, porque para que sea invertible tiene que ser un endomorfismo.

Ejercicio

En este problema consideraremos los siguientes conjuntos:

$$\beta_1 = \{(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\},$$

$$\beta_2 = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\},$$

$$\beta_3 = \{(1,0,0,a),(1,0,1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\},$$

$$\beta_4 = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,0,1)\},$$

$$\beta_5 = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\},$$

$$\beta_6 = \{(1,0,1),(0,0,-1),(0,1,1)\}$$

y las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ y $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definidas por:

- $f(x,y,z,t)_{\beta_1} = (x+y+z, x, y-t)_{\beta_4}$,
- $M_{\beta_4\beta_5}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $M_{\beta_4\beta_5}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Comprueba que los conjuntos β_1, β_2 y β_3 son bases de $\mathbb{R}^4$.

   Solución. Para ver que estos conjuntos son bases basta con poner los vectores por filas en una matriz y ver que el determinante es diferente de 0.

   Para el conjunto β_1 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

   Para el conjunto β_2 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

   Para el conjunto β_3 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

2. Comprueba que los conjuntos β_4, β_5 y β_6 son bases de $\mathbb{R}^3$.

   Solución. Igual que en el apartado anterior:

   Para el conjunto β_4 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

   Para el conjunto β_5 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

   Para el conjunto β_6 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

3. Calcula las siguientes matrices:

$$M_{\beta_1\beta_2}, M_{\beta_2\beta_3}, M_{\beta_1\beta_3}, M_{\beta_4\beta_5}, M_{\beta_4\beta_6}, M_{\beta_5\beta_6}.$$

Solución.

Antes de empezar a calcular estas matrices adoptaremos la notación siguiente:

- v_i^j será el vector i-ésimo de la base β_j, para valores de i entre 1 y 4 y de j entre 1 y 3.
- w_i^j será el vector i-ésimo de la base β_j, para valores de i entre 1 y 3 y de j entre 4 y 6.

Así que con esta notación tenemos por ejemplo: $v_4^3 = (0,0,0,1)$ y $w_2^6 = (0,0,-1)$.

$$\boxed{M_{\beta_1\beta_2}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_2 en la base β_1:

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= 2v_1^1 - v_2^1 - v_3^1 + v_4^1\\
v_2^2 &= 1v_1^1 + 0v_2^1 - v_3^1 + v_4^1\\
v_3^2 &= 1v_1^1 - v_2^1 + 0v_3^1 + v_4^1\\
v_4^2 &= 0v_1^1 + 0v_2^1 + 1v_3^1 + 0v_4^1
\end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_1\beta_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_2\beta_3}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_3 en la base β_2:

$$\begin{aligned} v_1^3 &= -av_1^2 + (1+a)v_2^2 - v_3^2 + (1+a)v_4^2 \\ v_2^3 &= 0v_1^2 + 1v_2^2 - v_3^2 + 2v_4^2 \\ v_3^3 &= 1v_1^2 - v_2^2 + 1v_3^2 - v_4^2 \\ v_4^3 &= -1v_1^2 + 1v_2^2 + 0v_3^2 + 1v_4^2 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_2\beta_3} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 & -1 \\ 1+a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1+a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_1\beta_3}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_3 en la base β_1:

$$\begin{aligned} v_1^3 &= -av_1^1 + (1+a)v_2^1 + av_3^1 + 0v_4^1 \\ v_2^3 &= 0v_1^1 + 1v_2^1 + 1v_3^1 + 0v_4^1 \\ v_3^3 &= 2v_1^1 - 2v_2^1 - 1v_3^1 + v_4^1 \\ v_4^3 &= -1v_1^1 + 1v_2^1 + 1v_3^1 + 0v_4^1 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_1\beta_3} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 2 & -1 \\ 1+a & 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_5}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_5 en la base β_4:

$$\begin{aligned} w_1^5 &= w_1^4 + 0w_2^4 - w_3^4 \\ w_2^5 &= 0w_1^4 + 1w_2^4 + 0w_3^4 \\ w_3^5 &= w_1^4 - w_2^4 + 0w_3^4 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_4\beta_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_6}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_6 en la base β_4:

$$\begin{aligned} w_1^6 &= 0w_1^4 + w_2^4 + w_3^4 \\ w_2^6 &= 0w_1^4 + 0w_2^4 - w_3^4 \\ w_3^6 &= w_1^4 - w_2^4 + 0w_3^4 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_4\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_5\beta_6}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_6 en la base β_5:

$$w_1^6 = -w_1^5 + 2w_2^5 + w_3^5$$
$$w_2^6 = w_1^5 - w_2^5 - w_3^5$$
$$w_3^6 = 0w_1^5 + 0w_2^5 + 1w_3^5$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dados los subespacios vectoriales

$$S = \{(x, y, z, t)_{\beta_3} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\} \text{ y } T =< (1, 2, 0, 1)_{\beta_2} >,$$

se pide:

- Calcular las dimensiones de S y T y bases de cada uno de los subespacios (se pide que las coordenadas de los vectores de esas bases estén dadas en la base β_1).

  Solución. Está claro que la dimensión de T es 1 porque viene generado por un único vector no nulo, que por tanto será una base de T. En cuanto a S se tiene que su dimensión es 4 menos el rango del sistema que lo define, es decir, $\dim S = 4 - 1 = 3$.

  Hemos dicho en el párrafo anterior que $\beta_T = \{(1, 2, 0, 1)_{\beta_2}\}$ es una base de T, pero necesitamos expresar el vector de β_T en la base β_1, para ello podemos utilizar la igualdad:

$$(x, y, z, t)_{\beta_1} = [M_{\beta_1\beta_2}(1, 2, 0, 1)^t_{\beta_2}]^t,$$

  donde $(x, y, z, t)_{\beta_1}$ son las coordenadas del vector $(1, 2, 0, 1)_{\beta_2}$ en la base β_1. Haciendo el producto marcado se obtiene que $(1, 2, 0, 1)_{\beta_2} = (4, -1, -2, 3)_{\beta_1}$ y la base solicitada de T puede ser:

$$\beta_T = \{(1, 2, 0, 1)_{\beta_2}\} = \{(4, -1, -2, 3)_{\beta_1}\}$$

Para encontrar una base de S podríamos utilizar sus ecuaciones, pero esto nos daría una base con coordenadas en β_3 y luego tendríamos que cambiar éstas a la base β_1. Otra opción sería expresar las ecuaciones de S respecto de la base β_1 y luego obtener la base. Este es el procedimiento que vamos a usar porque con él respondemos parcialmente a la siguiente pregunta. Para calcular las ecuaciones de S respecto de la base β_1 tomamos un vector $u = (x', y', z', t')_{\beta_1} \in S$ y buscamos las ecuaciones que satisfacen x', y', z', t'. Empezamos calculando las coordenadas del vector u en β_3 $(u = (x, y, z, t)_{\beta_3})$:

$$(x, y, z, t)^t_{\beta_3} = M_{\beta_3\beta_1}(x', y', z', t')^t_{\beta_1} = M^{-1}_{\beta_1\beta_3}(x', y', z', t')^t_{\beta_1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & a & 2-a \end{pmatrix} (x', y', z', t')^t_{\beta_1} =$$

$$(y' - z' + t', x' + z' - t', t', -x' - ay' + az' + (2-a)t')^t_{\beta_3}.$$

Así que:

$$\begin{aligned} x &= y' - z' + t', \\ y &= x' + z' - t', \\ z &= t', \\ t &= -x' - ay' + az' + (2-a)t' \end{aligned}$$

y las ecuaciones de S en β_1 son:

$$\begin{aligned} 0 &= x + y + z + t \\ &= y' - z' + t' + x' + z' - t' + t' - x' - ay' + az' + (2-a)t' \\ &= \boxed{(1-a)y' + az' + (3-a)t' = 0}. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que obtener tres vectores de S linealmente independientes y que satisfagan las ecuaciones últimas obtenidas. Estos vectores pueden ser, por ejemplo, $(1, 0, 0, 0)_{\beta_1}, (0, 0, a-3, a)_{\beta_1}, (0, 3, 2, -1)_{\beta_1}$ y

$$\beta_S = \{(1, 0, 0, 0)_{\beta_1}, (0, 0, a-3, a)_{\beta_1}, (0, 3, 2, -1)_{\beta_1}\}$$

- Calcula las ecuaciones cartesianas de S y de T en la base β_1.

  Solución. Las ecuaciones de S en la base β_1 ya las hemos calculado en el apartado anterior, eran:

$$S = \{(x', y', z', t')_{\beta_1} \in \mathbb{R}^4 : (1-a)y' + az' + (2-a)t' = 0\}.$$

  Para calcular las ecuaciones de T en la base β_1 seguimos el procedimiento usual. Tomamos $(x', y', z', t')_{\beta_1} \in T$, por lo tanto $(x', y', z', t')_{\beta_1} = \alpha(4, -1, -2, 3)_{\beta_1}$. Ahora tenemos que eliminar el parámetro α y obtener 3 ecuaciones homogéneas que definan a T:

$$\begin{aligned} & x' = 4\alpha, y' = -\alpha, z' = -2\alpha, t' = 3\alpha \\ \Rightarrow & \boxed{x' + 4y' = z' - 2y' = t' + 3y' = 0.} \end{aligned}$$

- Calcula los espacios $S \cap T$ y $S + T$ (da las ecuaciones de ambos espacios en la base β_1 y bases cuyos vectores tengan sus coordenadas expresadas respecto a β_1).

  Solución.

$$\boxed{S \cap T}$$

  Las ecuaciones de la intersección son:

$$(1-a)y' + az' + (2-a)t' = x' + 4y' = z' - 2y' = t' + 3y' = 0,$$

  este sistema tiene como matriz asociada a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-a & a & 2-a & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

  que tiene rango[1] 4 si $a \neq \frac{5}{4}$ y tiene rango 3 si $a = \frac{5}{4}$.

  - Si $a \neq \frac{5}{4}$ se tiene que $\dim S \cap T = 4 - 4 = 0$ y por lo tanto $S \cap T = \{(0,0,0,0)_{\beta_1}\}$ y $\beta_{S\cap T} = \emptyset$ es una base de $S \cap T$.

[1] Este rango se calcula usando el determinante de la matriz quitándole la columna de los términos independientes.

- Si $a = \frac{5}{4}$ se tiene que $\dim S \cap T = 4 - 3 = 1$ y puesto que el vector no nulo $(-4, 1, 2, -3)_{\beta_1} \in S \cap T$ entonces $\beta_{S\cap T} = \{(-4, 1, 2, -3)_{\beta_1}\}$ es una base de $S \cap T$.

$$\boxed{S + T}$$

Distinguimos dos casos:

- Empezamos tomando $a \neq \frac{5}{4}$, en este caso $S + T = \mathbb{R}^4$ porque $\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 3 + 1 - 0 = 4$.
- Ahora tomamos $a = \frac{5}{4}$ y tenemos que $\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 3 + 1 - 1 = 3$. Calculamos el subespacio suma:

$$S + T =< (4, -1, -2, 3)_{\beta_1}, (1, 0, 0, 0)_{\beta_1},$$
$$(0, 0, a - 3, a)_{\beta_1}, (0, 3, 2, -1)_{\beta_1} > .$$

  Como sabemos que $\dim S + T = 3$ y los 3 últimos vectores son linealmente independientes (son la base que hemos calculado de S), obtenemos que:

$$\beta_{S+T} = \beta_S = \{(1, 0, 0, 0)_{\beta_1}, (0, 0, a - 3, a)_{\beta_1}, (0, 3, 2, -1)_{\beta_1}\}$$

  y que

$$S + T = S.$$

  Finalmente:

$$S + T = S = \{(x', y', z', t')_{\beta_1} \in \mathbb{R}^4 : (1 - a)y' + az' + (2 - a)t' = 0\}.$$

- ¿Es la suma de ambos subespacios directa?

  Solución. Es directa excepto cuando $a = \frac{5}{4}$.

5. Di cuáles son los valores de k, l, m y n.

Solución.

$$k = l = m = n = 3.$$

6. Calcula las ecuaciones, una base y la dimensión de $\operatorname{Ker} f$ (todo ello respecto de la base β_2).

Solución. Puesto que en este apartado nos piden datos sobre $\operatorname{Ker} f$ respecto de la base β_2 y en el siguiente sobre $\operatorname{Im} f$ relativos a la base β_6, disponer de la matriz $M_{\beta_2\beta_6}(f)$ será de utilidad. Sin embargo empezaremos calculando $M_{\beta_1\beta_4}(f)$ por ser fácil de obtener y posteriormente usaremos la igualdad:

$$M_{\beta_2\beta_6}(f) = M_{\beta_6\beta_4} M_{\beta_1\beta_4}(f) M_{\beta_1\beta_2} \tag{1}$$

Cálculo de $\mathbf{M_{\beta_1\beta_4}(f)}$. Por definición tendremos que calcular las imágenes (mediante f) de los elementos de la base β_1 y expresar sus coordenadas en β_4. Esas coordenadas se ponen finalmente por columnas en una matriz:

$$\begin{aligned}
f(v_1^1) &= f((1,0,0,0)_{\beta_1}) = (1,1,0)_{\beta_4};\\
f(v_2^1) &= f((0,1,0,0)_{\beta_1}) = (1,0,1)_{\beta_4};\\
f(v_3^1) &= f((0,0,1,0)_{\beta_1}) = (1,0,0)_{\beta_4};\\
f(v_4^1) &= f((0,0,0,1)_{\beta_1}) = (0,0,-1)_{\beta_4}.
\end{aligned}$$

Así que:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{M_{\beta_6\beta_4}}$.

Procedemos igual que en el apartado 3:

$$\begin{aligned}
w_1^4 = (1,1,1) &= w_1^6 + w_2^6 + w_3^6 = (1,1,1)_{\beta_6};\\
w_2^4 = (1,0,0) &= w_1^6 + w_2^6 = (1,1,0)_{\beta_6};\\
w_3^4 = (0,0,1) &= -w_2^6 = (0,-1,0)_{\beta_6}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$M_{\beta_6\beta_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos la fórmula (1) y obtenemos:

$$M_{\beta_2\beta_6}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Cálculo de } \operatorname{Ker} f}$$

Ahora un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2} \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si $f((x, y, z, t)_{\beta_2}) = (0, 0, 0)_{\beta_6}$. Hacemos ahora cálculos para obtener las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$.

$$\begin{aligned} &[f((x,y,z,t)_{\beta_2})]^t = M_{\beta_2\beta_6}(f)(x,y,z,t)^t_{\beta_2} \\ \Rightarrow\ &[f((x,y,z,t)_{\beta_2})]^t = (2x+y+z+t, 4x+2y+3z+t, t)_{\beta_6} = (0,0,0)_{\beta_6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z+t=0, & \text{sistema} \\ 4x+2y+3z+t=0, & \text{matricial} \\ t=0 & \Rightarrow \end{cases} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora tenemos que la dimensión de $\operatorname{Ker} f$ es 4 menos el rango de la matriz asociada al sistema (3), es decir $\dim\operatorname{Ker} f = 1$. El vector $(1, -2, 0, 0)_{\beta_2}$ pertenece a $\operatorname{Ker} f$, por lo tanto $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1, -2, 0, 0)_{\beta_2}\}$ es una base de $\operatorname{Ker} f$

7. Calcula las ecuaciones, una base y la dimensión de $\mathrm{Im}\, f$ (todo ello respecto de la base β_6).

Solución.

Sabemos que $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - 1 = 3$ y por otro lado:

$$\mathrm{Im}\, f =< (2,4,0)_{\beta_6}, (1,2,0)_{\beta_6}, (1,3,0)_{\beta_6}, (1,1,1,)_{\beta_6} > .$$

Del sistema generador $\{(2,4,0)_{\beta_6}, (1,2,0)_{\beta_6}, (1,3,0)_{\beta_6}, (1,1,1,)_{\beta_6}\}$ de $\mathrm{Im}\, f$ se puede extraer fácilmente la base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1,2,0)_{\beta_6}, (1,3,0)_{\beta_6}, (1,1,1,)_{\beta_6}\}.$$

Puesto que la dimensión de $\mathrm{Im}\, f$ es 3 no se pueden calcular las ecuaciones.

8. Calcula las matrices siguientes:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f), M_{\beta_1\beta_5}(f), M_{\beta_4\beta_4}(g \circ h), M_{\beta_4\beta_4}(h \circ g), M_{\beta_4\beta_4}(h), , M_{\beta_4\beta_4}(g)$$

Solución.

$$\boxed{M_{\beta_1\beta_4}(f)}$$

Para calcular esta matriz es necesario obtener las imágenes, mediante f, de los vectores de β_1 y dar las coordenadas del vector imagen en la base β_4. Esto ya se ha hecho en un apartado anterior:

$$f(v_1^1) = (1,1,0)_{\beta_4}; \quad f(v_2^1) = (1,0,1)_{\beta_4};$$
$$f(v_3^1) = (1,0,0)_{\beta_4}; \quad f(v_4^1) = (0,0,-1)_{\beta_4}.$$

Con estos datos tenemos:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_1\beta_5}(f)}$$

Para calcular esta matriz es necesario obtener las imágenes, mediante f, de los vectores de β_1 y dar las coordenadas del vector imagen en la base β_5:

$$f(v_1^1) = (1,1,0)_{\beta_4} = (2,1,1) = (0,2,1)_{\beta_5};$$
$$f(v_2^1) = (1,0,1)_{\beta_4} = (1,1,2) = (-1,2,2)_{\beta_5};$$
$$f(v_3^1) = (1,0,0)_{\beta_4} = (1,1,1) = (0,1,1)_{\beta_5};$$
$$f(v_4^1) = (0,0,-1)_{\beta_4} = (0,0,-1) = (1,-1,-1)_{\beta_5}.$$

Con estos datos tenemos:

$$M_{\beta_1\beta_5}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(g)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g) = M_{\beta_4\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(g) M_{\beta_4\beta_4} = M_{\beta_4\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(g) I_4 = M_{\beta_4\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(g)$$

Así que:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g) = M_{\beta_4\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(g)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(h)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h) = M_{\beta_4\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(h)$$

Así que:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h) = M_{\beta_4\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(h)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(g\circ h)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g\circ h) = M_{\beta_4\beta_4}(g)M_{\beta_4\beta_4}(h) =$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g\circ h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(h\circ g)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h\circ g) = M_{\beta_4\beta_4}(h)M_{\beta_4\beta_4}(g) =$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h\circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. ¿Es la aplicación g biyectiva? ¿Cuál es su inversa?

   Solución. Para que sea biyectiva debe ser simultáneamente inyectiva y suprayectiva, es decir, se debe tener simultáneamente que $\operatorname{Ker} g = 0$ y que $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^3$, o lo que es lo mismo, $\operatorname{dimKer} g = 0$ y $\operatorname{dimIm} g = 3$.

   Como $\operatorname{dimIm} g = \operatorname{rg} M_{\beta_4\beta_5}(g) = 3$ (porque el determinante de $M_{\beta_4\beta_5}(g)$ es -1) y $\operatorname{dimKer} f = 3 - \operatorname{dimIm} f = 0$, se tiene que g es biyectiva.

Para calcular la inversa de g bastará con calcular la matriz asociada a g^{-1} respecto de algunas bases. Obtendremos esta matriz usando que $Id = g \circ g^{-1}$, por lo que:

$$M_{\beta_4\beta_5}(g)M_{\beta_5\beta_4}(g^{-1}) = M_{\beta_5\beta_5}(Id) = I_3 \Rightarrow M_{\beta_5\beta_4}(g^{-1}) = (M_{\beta_4\beta_5}(g))^{-1}.$$

Haciendo los cálculos necesarios obtenemos:

$$M_{\beta_5\beta_4}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Determina $\operatorname{Ker} g, \operatorname{Ker} h, \operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Im} h$ (todo respecto de la base β_4) y di si se verifica que alguna de las dos sumas siguientes es directa:

$$\operatorname{Ker} h + \operatorname{Im} h, \quad \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g.$$

Solución.

Empezamos calculando las dimensiones de los espacios que queremos calcular:

$$\dim\operatorname{Im} g = \operatorname{rg} M_{\beta_4\beta_5}(g) = 3 \Rightarrow \dim\operatorname{Ker} g = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\operatorname{Im} g = 0.$$
$$\dim\operatorname{Im} h = \operatorname{rg} M_{\beta_4\beta_5}(h) = 3 \Rightarrow \dim\operatorname{Ker} h = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\operatorname{Im} h = 0.$$

Así que:

$$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} h = \{(0,0,0)_{\beta_4}\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} h = \mathbb{R}^3$$

Finalmente es claro que ambas sumas son directas puesto que:

$$\operatorname{Ker} g \cap Img = \operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h = \{(0,0,0)_{\beta_4}\}$$

Capítulo 6

Diagonalización de matrices y endomorfismos

1. Introducción

El objetivo del tema es encontrar, para un endomorfismo dado $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, una base β de $\mathbb{R}^m$ tal que la matriz $M_{\beta\beta}(\mathbf{f})$ sea diagonal o contenga el mayor número posible de ceros.

Encontrar dicha base tendrá su interés posteriormente para calcular potencias arbitrarias de una matriz dada. A su vez, dichas potencias permitirán calcular la exponencial.

Matricialmente, el objetivo descrito en las líneas anteriores no es más que dada una matriz cuadrada A de tamaño $m \times m$, encontrar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Diagonalizar una matriz será encontrar la matriz P y *diagonalizar el endomorfismo* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ consiste en encontrar la base β antes descrita.

2. Polinomio característico, espectro, valores propios y vectores propios

Definición (Polinomio característico).

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, denotaremos por $p_A(x)$ al *polinomio característico de A*, que viene definido por $p_A(x) = |A - xI_m|$.

Dado un endomorfismo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y elegida una base β de $\mathbb{R}^m$, se define el *polinomio* *característico de* $\mathbf{f}$ *asociado a la base* β como el polinomio característico de la matriz $M_{\beta\beta}(\mathbf{f})$. A este polinomio lo denotaremos por $p_{\mathbf{f}}^{\beta}(x)$.

Observación

El polinomio característico de un endomorfismo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$no depende de de la base elegida, con lo que podremos suprimir la coletilla *asociado a la base* β y definir el *polinomio característico asociado a un endomorfismo* $\mathbf{f}$ como el polinomio característico asociado a $\mathbf{f}$ respecto de una base elegida β.

Definición (Espectro).

El *espectro de una matriz* $A \in M_m(\mathbb{K})$ es el conjunto de las raíces del polinomio característico y se denota por $\sigma(A)$ y el *espectro de* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es el conjunto de las raíces de su polinomio característico y se denota por $\sigma(\mathbf{f})$.

Observación

El conjunto $\sigma(A)$ tiene cardinal menor que m ya que el grado del polinomio característico es m.

Definición (Vectores y valores propios).

A los elementos de $\sigma(A)$ (resp. $\sigma(\mathbf{f})$) los llamaremos *valores propios de* A (resp. *valores propios de* $\mathbf{f}$).

A cada elemento $\mu \in \sigma(A)$ (resp. $\mu \in \sigma(\mathbf{f})$) le asociaremos un subespacio vectorial V_μ que recibe el nombre de *subespacio invariante asociado a* μ y que se define como sigue:

$$V_\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}\}$$

(resp. $V_\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{x}\}$.)

Los elementos $\mathbf{x} \in V_\mu \backslash \{0\}$ se llaman *vectores propios asociados a* μ.

3. Teorema de diagonalización

Lema 6.0.1. *Si* λ, μ *son dos valores propios de* A *(resp. de* $\mathbf{f}$*), entonces:*

1. $V_\mu \cap V_\lambda = \{0\}$, *es decir, no existe* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ *que satisfaga simultáneamente las ecuaciones* $A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ *y* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *(resp.* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$*).*

2. V_λ *es un subespacio vectorial con* $1 \leq \dim V_\lambda \leq m(\lambda)$, *donde* $m(\lambda)$ *denota la multiplicidad de* λ *en el polinomio característico.*

Además, si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ *(resp.* $\sigma(\mathbf{f}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$*), la matriz es diagonalizable si y sólo si:*

$$\mathbb{R}^m = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Teorema 6.1 (Diagonalización)**.** *Sea* $A \in M_m(\mathbb{K})$ *entonces* A *es diagonalizable si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

1. *Todos los valores propios son reales.*

2. *Para todo valor propio* $\lambda \in \sigma(A)$ *se tiene* $\dim V_\lambda = m(\lambda)$.

Teorema 6.2 (Diagonalización)**.** *Dado el endomorfismo* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$*, entoces* $\mathbf{f}$ *es diagonalizable si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

1. *Todos los valores propios son reales.*

2. *Para todo valor propio* $\lambda \in \sigma(\mathbf{f})$ *se tiene* $\dim V_\lambda = m(\lambda)$.

Corolario 6.3. *Si* $A \in M_m(\mathbb{K})$ *(resp.* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *es un endomorfismo que) tiene* m *raíces distintas, entonces* A *es diagonalizable (resp.* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *es diagonalizable).*

Estos teoremas se pueden aplicar para calcular la forma diagonal de una matriz y las matrices de paso que dan la diagonalización. Describimos este proceso para una matriz $A \in M_m(\mathbb{K})$:

1. Se calcula el polinomio característico $p_A(x)$ y el espectro $\sigma(A)$. Si éste posee algún número complejo, la matriz no es diagonalizable y el proceso acaba.

2. Si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, para cada $\lambda \in \sigma(A)$ se determina una base del subespacio de los vectores propios asociados. Si para algún $\lambda \in \sigma(A)$ se tiene que $\dim V_\lambda < m(\lambda)$, entonces la matriz no es diagonalizable y el procedimiento acaba aquí.

3. Si $\dim V_\lambda = m(\lambda)$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, la matriz es diagonalizable. La matriz diagonal, D, tiene en la diagonal principal los valores propios de A repetidos tantas veces como indica su multiplicidad. La matriz de paso, P, se construye colocando en cada columna uno de los vectores propios de las bases anteriormente calculadas, de forma que en la misma columna de la matriz D aparezca el valor propio asociado.

4. Por último, se tiene $D = P^{-1}AP$.

4. Aplicaciones de la diagonalización: potencias de matrices y series temporales

4.1. Cálculo de potencias.

Pasamos a dar una aplicación de la diagonalización para el cálculo de la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable. Supongamos que $A \in M_m(\mathbb{R})$ es diagonalizable y $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Entonces existe $P \in M_m(\mathbb{R})$ invertible y una matriz diagonal D de orden m tal que $D = P^{-1}AP$, de donde $A = PDP^{-1}$. Entonces:

$$A^k = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}^{k \quad \text{veces}} = P\overbrace{(DD\dots D)}^{k \quad \text{veces}}P^{-1} = PD^kP^{-1},$$

lo cual nos da un nuevo método para el cálculo de la potencia n-ésima de dicha matriz que puede ser más sencillo que calcularla por la definición, dado que la potencia n-ésima de una matriz diagonal es aquella matriz diagonal cuyo elemento (i,i) es la potencia n-ésima del elemento (i,i) de la matriz original.

4.2. Series temporales.

Si ahora tenemos un sistema que evoluciona con el tiempo según la expresión:

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1},$$

donde $A \in M_m(\mathbb{R})$ con $A = PDP^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{x}_l \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Entonces tendremos que dado un valor inicial $\mathbf{x}_0 \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ para la serie temporal, se verificará:

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = PD^kP^{-1}\mathbf{x}_0,$$

de donde podemos saber el comportamiento asintótico de los valores $\mathbf{x}_k$ calculando el límite:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k.$$

5. El teorema de Cayley-Hamilton

Dado un polinomio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ podemos evaluar la matriz en el polinomio A, es decir $p(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0$. Con esta notación se tiene el teorema siguiente.

Teorema 6.4 (Cayley-Hamilton)**.** *Dada $A \in M_m(\mathbb{K})$ con polinomio característico $p_A(x)$. Entonces $p_A(A) = 0$.*

Este teorema se puede aplicar para calcular la inversa de una matriz, en efecto

$$0 = A^{-1}p_A(A) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I + a_0 A^{-1},$$

de donde

$$A^{-1} = -\frac{A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I}{a_0}.$$

Una apreciación final es que $a_0 \neq 0$ ya que la matriz A es invertible y por lo tanto no tiene al 0 como valor propio.

Ejercicio

Calcular la inversa de la matriz que sigue usando este método.

1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Calculamos el polinomio característico:

$$p_A(x) = |A - xI_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4.$$

Así que:

$$I_4 - 4A + 6A^2 - 4A^3 + A^4 = 0$$

Despejamos la identidad y tenemos:

$$I_4 = 4A - 6A^2 + 4A^3 - A^4 = A(4I_4 - 6A + 4A^2 - A^3)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= 4I_4 - 6A + 4A^2 - A^3 \\
&= 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&+4\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6. Ejercicios Resueltos

Ejercicio

De la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

1. El polinomio característico de B.

   Solución.
   $p_B(x) = |B - xI_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3+2-3(1-x) = (1-x)^3-1+3x = 3x^2 - x^3 = x^2(3-x)$.

2. Las raíces del polinomio característico y sus multiplicidades.

   Solución. Las raíces son 0 y 3 con multiplicidades 2 y 1 respectivamente.

3. Determinar, justificadamente, si la matriz B es diagonalizable.

   Solución. Según se vio en teoría, por ser $m(3) = 1$ entonces $\dim V_3 = m(3) = 1$.

   Falta ahora por ver, para demostrar que B es diagonalizable, que $\dim V_0 = m(0) = 2$.

   Pero esto es cierto porque $\dim V_0 = 3 - \text{rg}\,(B - 0I_3) = 3 - \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$

   Por lo tanto B es una matriz diagonalizable.

4. Si la matriz B es diagonalizable calcula la matriz diagonal D y la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}BP$. Si la matriz no es diagonalizable calcula B^2 y B^3.

   Solución.

   Para dar la matriz P calculamos bases de V_0 y de V_3.

   $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (B - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_3$ si y sólo si[1]

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

   Así que una base de V_3 es $\beta_3 = \{(1, 1, 1)\}$.

   $V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (B - 0I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_2$ si y sólo si[2]

$$\left\{ x + y + z = 0 \right.$$

   Así que una base de V_0 es $\beta_0 = \{(0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$.

   Ahora obtenemos:

[1] Fíjate que he quitado la primera ecuación porque $B - 3I_3$ tiene rango 2 y por lo tanto sólo son necesarias dos ecuaciones linealmente independientes.

[2] Fíjate que me he quedado con una única ecuación porque $B - 0I_3$ tiene rango 1.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio

De una matriz diagonalizable A sabemos que tiene como polinomio característico $p(x) = (x-1)(x-3)^2(x+1)$. Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 3x\}$?

   Solución. Por ser la matriz diagonalizable se tiene que la dimensión del subespacio anterior V_3 coincide con la multiplicidad de 3 en el polinomio característico. Así que $\dim V_3 = 2$.

2. ¿Cuál es el determinante de A? ¿Por qué?

   Solución. Por ser la matriz A diagonalizable se tiene que $P^{-1}AP = D$, así que $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A| = |D| \Rightarrow |A| = |D|$. Así que $|A| = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -9$.

3. Escribe una matriz diagonal, D, para A.

   Solución.
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. ¿Cuál es el tamaño de la matriz A?

   Solución. El tamaño es el mismo que el tamaño de D, es decir, 4×4.

5. De los subespacios invariantes V_1, V_3 y V_{-1} conocemos unas bases: $\beta_{V_1} = \{(1,0,0,0)\}$, $\beta_{V_3} = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $\beta_{V_{-1}} = \{(1,1,0,0)\}$. Da la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

   Solución.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcular el polinomio característico p_A.

   Solución.

$$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 \\ -3 & 3 & 5-x \end{vmatrix} = 20 - 24x + 9x^2 - x^3 = -(x-5)(x-2)^2$$

2. Calcular el espectro σ_A y especificar la multiplicidad de cada raíz.

   Solución. $\sigma_A = \{5, 2\}$. Además $m(5) = 1$ y $m(2) = 2$.

3. Justificar si la matriz A es diagonalizable.

   Solución. Según se vio en teoría, por ser $m(5) = 1$ entonces $\dim V_5 = m(5) = 1$.

   Falta ahora por ver, para demostrar que A es diagonalizable, que $\dim V_2 = m(2) = 2$.

   Pero esto es cierto porque $\dim V_2 = 3 - \text{rg}\,(A - 2I_3) = 3 - \text{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$

   Por lo tanto A es una matriz diagonalizable.

4. Dar la matriz diagonal D.

Solución. Elijo $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Dar la matriz de paso P.

Solución.

Para dar esta matriz calculamos bases de V_5 y de V_2.

$V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_5$ si y sólo si[3]

$$\begin{cases} -3x + 3z = 0, \\ -3x + 3y = 0. \end{cases}$$

Así que una base de V_5 es $\beta_5 = \{(1, 1, 1)\}$.

$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_2$ si y sólo si[4]

$$\left\{ -3x + 3y + 3z = 0 \right. \Rightarrow \left\{ -x + y + z = 0 \right.$$

Así que una base de V_2 es $\beta_2 = \{(0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$.

Ahora obtenemos ya:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Especificar la relación entre A, D y P.

Solución.

$$D = P^{-1}AP.$$

[3] Fíjate que he quitado la primera ecuación porque $A - 5I_3$ tiene rango 2 y por lo tanto sólo son necesarias dos ecuaciones linealmente independientes.

[4] Fíjate que me he quedado con una única ecuación porque $A - 2I_3$ tiene rango 1.

Ejercicio

De una matriz diagonalizable A sabemos que tiene como polinomio característico $p(x) = (x-1)(x-3)^2(x+1)$. Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 3x\}$? *(0,5 puntos)*

   Solución. Por ser la matriz diagonalizable se tiene que la dimensión del subespacio anterior V_3 coincide con la multiplicidad de 3 en el polinomio característico. Así que $\dim V_3 = 2$.

2. ¿Cuál es el determinante de A? ¿Por qué? *(0,5 puntos)*

   Solución. Por ser la matriz A diagonalizable se tiene que $P^{-1}AP = D$, así que $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A| = |D| \Rightarrow |A| = |D|$. Así que $|A| = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -9$.

3. Escribe una matriz diagonal, D, para A *(0,5 puntos)*.

   Solución.
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. ¿Cuál es el tamaño de la matriz A? *(0,5 puntos)*

   Solución. El tamaño es el mismo que el tamaño de D, es decir, 4×4.

5. De los subespacios invariantes V_1, V_3 y V_{-1} conocemos unas bases: $\beta_{V_1} = \{(1,0,0,0)\}$, $\beta_{V_3} = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $\beta_{V_{-1}} = \{(1,1,0,0)\}$. Da la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$ *(0,5 puntos)*.

   Solución.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gabriel Soler López

20 de febrero de 2006

7. La exponencial

Centramos nuestros esfuerzos en esta sección en dar un método efectivo para construir la exponencial de una matriz e^{At}, siendo A una matriz de $M_m(\mathbb{R})$. Dicho método está basado en el Teorema de Cayley-Hamilton.

Supongamos que $p_A(x)$ es el polinomio característico de la matriz A y que su espectro es $\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ con multiplicidades $m(\lambda_i) = r_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Empezamos buscando para cada i, $1 \leq i \leq k$, polinomios $a_i(x)$ de grado a lo sumo $r_i - 1$ de manera que se tenga la igualdad:

$$\frac{1}{p_A(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(x)}{(x-\lambda_i)^{r_i}},$$

de donde se deduce:

$$1 = \sum_{i=1}^{k} a_i(x) \frac{p_A(x)}{(x-\lambda_i)^{r_i}}.$$

Seguidamente evaluamos el polinomio anterior en $x = A$, de donde se tiene [5]:

$$I_m = \sum_{i=1}^{k} a_i(A) \frac{p_A(A)}{(A-\lambda_i)^{r_i}},$$

que se puede escribir abreviadamente como:

$$I_m = \sum_{i=1}^{k} a_i(A) q_i(A) \ \text{ con } \ q_i(A) = \frac{p_A(A)}{(A-\lambda_i)^{r_i}}.$$

Observemos que para todo i, $1 \leq i \leq k$,

$$e^{Ax} = e^{\lambda_i x I_m} e^{(A-\lambda_i I_m)x} = e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda_i I_m)^j x^j}{j!},$$

y ahora multiplicando por $q_i(A)$:

$$q_i(A) e^{Ax} = e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^{r_i - 1} \frac{q_i(A)(A-\lambda_i I_m)^j x^j}{j!}, \tag{1}$$

[5] La expresión $\frac{p_A(A)}{(A-\lambda_i)^{r_i}}$ no tiene sentido, ya que, no es posible que en un cociente haya una matriz. Así que dicha expresión, por convenio, será una forma abreviada de escribir la matriz $\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (A-\lambda_j)^{r_j}$

ya que por el Teorema de Cayley-Hamilton, para todo $j \geq r_i$, $q_i(A)(A - \lambda_i I_m)^j = p_A(A)(A - \lambda_i I_m)^{j-r_i} = 0$.

Multiplicamos ahora la ecuación 1 por $a_i(A)$ y obtenemos:

$$a_i(A)q_i(A)e^{Ax} = e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{a_i(A)q_i(A)(A-\lambda_i I_m)^j x^j}{j!}.$$

Por último, sumamos las ecuaciones anteriores desde $i = 1$ hasta $i = k$ para obtener:

$$e^{Ax} = \sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i x} a_i(A) q_i(A) \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{(A-\lambda_i I_m)^j x^j}{j!} \right). \tag{2}$$

8. Potencia n-sima de una matriz

Conservando la notación de la sección anterior se trata ahora de dar un método para la construcción de A^n para cualquier número n natural. Observemos que para cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se tiene:

$$A^n = (A - \lambda_i I_m + \lambda_i I_m)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (A - \lambda_i I_m)^j \lambda_i^{n-j} \tag{3}$$

Multiplicamos ahora la ecuación anterior por $a_i(A)q_i(A)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} a_i(A)q_i(A)A^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_i(A)q_i(A)(A-\lambda_i I_m)^j \lambda_i^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n}{j} a_i(A)q_i(A)(A-\lambda_i I_m)^j \lambda_i^{n-j} \\ &= a_i(A)q_i(A) \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n}{j} (A-\lambda_i I_m)^j \lambda_i^{n-j} \end{aligned} \tag{4}$$

Por último sumamos la expresiones anteriores para todos los valores de i:

$$A^n = \sum_{i=1}^{k} a_i(A)q_i(A)A^n = \sum_{i=1}^{k} a_i(A)q_i(A) \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n}{j} (A-\lambda_i I_m)^j \lambda_i^{n-j}. \tag{5}$$

9. Ejemplos

Ejemplo. Calcula e^{Ax} para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para utilizar el método basado en el teorema de Cayley-Hamilton es necesario calcular el polinomio característico:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4.$$

Resolvemos ahora la ecuación $p_A(x) = 0$ y obtenemos que las raíces del polinomio son 1 y 2, ambas con multiplicidad 2.

También es necesario hacer la descomposición:

$$\frac{1}{p_A(x)} = \frac{1}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4} = \frac{-1+2x}{(x-1)^2} + \frac{5-2x}{(x-2)^2}$$

Así que en este caso tenemos:

$$a_1(x) = -1 + 2x, \quad a_2(x) = 5 - 2x,$$
$$q_1(x) = \frac{p_A(x)}{(x-1)^2} = (x-2)^2, \quad q_2(x) = \frac{p_A(x)}{(x-2)^2} = (x-1)^2.$$

Finalmente:

$$e^{Ax} = e^x a_1(A) q_1(A)[(A - 1I_4)^0 + x(A - 1I_4)^1] + e^{2x} a_2(A) q_2(A)[(A - 2I_4)^0 + x(A - 2I_4)^1]$$
$$= \begin{pmatrix} -e^x + e^{2x}x + 2e^{2x} & -e^x + e^{2x}x + xe^{2x} & 0 & 2e^x - 2e^{2x}x - xe^{2x} \\ -e^{2x}x & e^{2x}(1-x) & 0 & e^{2x}x \\ e^x(-3-x) + 2e^{2x}(3/2+x) & e^x(-1-x) + 2e^{2x}(1/2+x) & e^x & e^x(3+2x) + 2e^{2x}(-3/2-x) \\ -e^x + e^{2x} & -e^x + e^{2x} & 0 & 2e^x - e^{2x} \end{pmatrix}$$

10. Aplicación a las ecuaciones diferenciales

Proponemos seguidamente un ejemplo para aclarar el método dado de construcción de la exponencial.

Ejemplo 6.5. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:*

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$$

Solución: según lo expuesto hasta ahora, debemos calcular previamente $\exp(Ax)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se ve fácilmente que $p_A(x) = (x-1)(x-6)$, $\sigma_A = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6\}$, $a_1(x) = -\frac{1}{5}$ y $a_2(x) = \frac{1}{5}$, de donde

$$e^{Ax} = e^{x}(\frac{-1}{5})I_2(A-6I_2) + e^{6x}\frac{1}{5}I_2(A-I_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 32e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto cualquier solución del sistema será del tipo

$$\mathbf{y}(x) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 32e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

□

Exponemos otro ejemplo donde hay que utilizar los números complejos.

Ejemplo 6.6. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Solución: en un primer paso calculamos $\exp(Bx)$ con

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $p_B(x) = (x-1-i)(x-1+i)$, $\sigma_B = \{\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i\}$, $a_1(x) = +\frac{1}{2i}$ y $a_2(x) = -\frac{1}{2i}$, se tiene

$$e^{Bx} = e^{(1+i)x}\frac{1}{2i}I_2[A-(1-i)I_2] - e^{(1-i)x}\frac{1}{2i}I_2[A-(1+i)I_2] =$$
$$e^{x}\begin{pmatrix} 2\text{sen}\, x + \cos x & -2\text{sen}\, x \\ \text{sen}\, x & -2\text{sen}\, x + \cos x \end{pmatrix}.$$

Así que cualquier solución del sistema será del tipo

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 2\text{sen}\, x + \cos x & -2\text{sen}\, x \\ \text{sen}\, x & -2\text{sen}\, x + \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

□

Acabamos esta sección resolviendo un sistema no homogéneo por el método de variación de las constantes, tal y como explicamos en la página **??**.

Ejemplo 6.7. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y + e^t, \\ y' = 3x + 3y, \end{cases}$$

Solucion: para esta ecuación ya hemos encontrado la solución del sistema lineal homogéneo. Así que debemos encontrar una solución particular del sistema no homogéneo con el método de variación de las constantes. Calculamos pues.

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\int \begin{pmatrix} 3e^{-6x} + 2e^{-x} & 2e^{-6x} - 2e^{-x} \\ 3e^{-6x} - 3e^{-x} & 2e^{-6x} + 3e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{x} \\ 0 \end{pmatrix} dx$$
$$= \frac{1}{5}\int \begin{pmatrix} 3e^{-5x} + 2 \\ 3e^{-5x} - 3 \end{pmatrix} dx = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{-3e^{-5x}}{5} + 2x + c_1 \\ \frac{-3e^{-5x}}{5} - 3x + c_2 \end{pmatrix} dx,$$

así que una solución particular del sistema será

$$\mathbf{y}_p(x) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^{x} & 32e^{6x} - 2e^{x} \\ 3e^{6x} - 3e^{x} & 2e^{6x} + 3e^{x} \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{-3e^{-5x}}{5} + 2x \\ \frac{-3e^{-5x}}{5} - 3x \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{25}e^{x}\begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}.$$

Y la solución general del sistema será:

$$\mathbf{y}_g(x) = \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^{x} & 32e^{6x} - 2e^{x} \\ 3e^{6x} - 3e^{x} & 2e^{6x} + 3e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} e^{x} \begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}.$$

$\square$

El cálculo hecho de la exponencial de una matriz en esta sección nos va a dar la estructura de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. En particular, la interpretación de la ecuación 2 permite probar la proposición que sigue.

Proposición 6.8. *Sean $A \in M_m(\mathbb{R})$ e $\mathbf{y}(t)$ una solución de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Entonces cada una de las coordenadas de $\mathbf{y}(t)$ es una combinación lineal de las funciones*

$$t^k e^{ta} \cos tb,\ t^k e^{ta} \operatorname{sen} tb,$$

donde $a + bi$ recorre el conjunto de los valores propios de A con $b \geq 0$ y $0 \leq k < m(a + bi)$.