MATEMÁTICAS

I. Generalidades

1.1. Demostrar las siguientes igualdades o inclusiones entre conjuntos:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
e) Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$
f) $(A^c)^c = A$
g) $A \cap A^c = \emptyset$
h) $A \cup A^c = U$

1.2. Da contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
b) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

1.3. Demostrar las siguientes igualdades del producto cartesiano:

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

1.4. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres aplicaciones, demostrar que se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
b) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
c) Si f y g son suprayectivas entonces $g \circ f$ es suprayectiva.
d) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.
e) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
f) Si $g \circ f$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva.
g) Si $A' \subset A'' \subset A$ entonces $f(A') \subset f(A'')$.
h) $f(A' \cap A'') \subset f(A') \cap f(A'')$.
i) Dar un contraejemplo que ponga de manifiesto que en general no se da la igualdad en el apartado anterior. Probar, en cambio que se da la igualdad cuando f es inyectiva.

1.5. Dadas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$.

a) Decir si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas mirando en su gráfica.
b) Calcular $f((-1, 1])$ y $g((-1, 1))$
c) Demostrar que $f^n(x) = x^{2^n}$, donde f^n es la composición de f consigo misma n veces.

1.6. Demostrar usando inducción las siguientes igualdades:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

b) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

c) Si $r\neq 1$ entonces $1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

d) Probar que $n(n^2+5)$ es divisible por 6 cualquiera que sea el número natural n.

e) Probar que entre los números $2n+1$, $2n+3$ y $2n+5$ hay siempre un múltiplo de 3.

f) Demostrar que $\frac{2^{2n-1}}{n}<\binom{2n}{n}<2^{2n-1}$ para $n>1$.

g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k(k+1)\ldots(k+p)}=\frac{1}{p!}\frac{n!}{(n+p)!}$ donde p es un número natural fijo.

h) $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}=\frac{n}{n+1}$

i) $(1+p)^n>1+pn$ donde p es un número real mayor que cero y n un número natural mayor que uno.

j) Demostrar que los para cualquier número natural n el número $3^{2n+2}+2^{6n+1}$es un múltiplo de 11;

k) Demostrar que para todo número natural a, si $n+\frac{1}{n}$ es un número entero entonces $n^a+\frac{1}{n^a}$.

l) Demuestra que el número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos es 2^n.

m) Demuestra que el número de subconjuntos de j elementos que tiene un conjunto de n elementos es $\binom{n}{j}$.

n) Demuestra que el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$. ¿Por qué $n(n-3)$ es par?

1.7. Demostrar la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jb^{n-j}$$

siendo n un número natural mayor o igual que 1.

1.8. Sea $P_2[x]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos y con coeficientes reales. Sobre dicho conjunto se consideran las leyes de composición interna suma $[(a_0x^2+a_1x+a_2)+(b_0x^2+b_1x+b_2)=(a_0+b_0)x^2+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)]$ y producto $[(a_0x^2+a_1x+a_2)*(b_0x^2+b_1x+b_2)=(a_0b_0)x^2+(a_1b_1)x+(a_2b_2)]$. Demostrar que la terna $(P_2[x],+,*)$ es un anillo e indicar de qué tipo es.

1.9. Justifica si las siguientes funciones pueden ser la primitiva de alguna función. En caso afirmativo indica de qué función.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$,

b) $f(x)=|x|$,

c) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\leq 0\\ x^2 & \text{si} \quad x>0,\end{cases}$

1.10. Calcula las primitivas inmediatas siguientes:

$$\begin{array}{lll} a)\ \int x\text{sen}(x^2)dx & b)\ \int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx & c)\ \int \frac{\log(x)}{x}dx\\ d)\ \int \frac{e^x}{e^x+1}dx & e)\ \int \frac{\text{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx & f)\ \int \frac{x^3}{(1-x^4)^4}dx\\ g)\ \int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}dx & h)\ \int \frac{dx}{x\log^2(x)} & i)\ \int \sec^2(2x)dx \end{array}$$

1.11. Aplica la fórmula de integración por partes para hallar las siguientes primitivas:

$$\begin{array}{lll} a)\ \int x\cos(2x)dx & b)\ \int x^2e^{-x}dx & c)\ \int \text{sen}xe^{2x}dx\\ d)\ \int \log y dy & e)\ \int \text{arctg}x dx & f)\ \int x^2e^{2x}dx \end{array}$$

1.12. Calcula las primitivas de las funciones racionales siguientes:

$$\begin{array}{lll} a)\ \int \frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}dx & b)\ \int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}dx & c)\ \int \frac{x-1}{x+1}dx\\ d)\ \int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}dx & e)\ \int \frac{2x}{x^3-2x^2-2x-3}dx & f)\ \int \frac{1}{x^4+x^2}dx\\ g)\ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx & h)\ \int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx & i)\ \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx \end{array}$$

1.13. Haz el cambio de variable adecuado para hallar las siguientes primitivas

$$\begin{array}{lll} a)\ \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/3}(1+x)^{-2}\,dx & b)\ \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx & c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \\ d)\ \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx & e)\ \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx & f)\ \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \end{array}$$

1.14. Calcúlese las primitivas de las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{lll} a)\ \int \frac{1}{\cos x}dx & b)\ \int \frac{2-\cos x}{2+\cos x}dx & c)\ \int \frac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx \\ d)\ \int \cos^4 x\operatorname{sen}^3 x dx & e)\ \int \operatorname{sen}^2(mx)dx & f)\ \int \operatorname{sen}^2 ax\cos ax dx \\ g)\ \int \cos^2(2x)\operatorname{sen}^4(2x)dx & h)\ \int \operatorname{sen}^4 x dx & i)\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(1+\cos^2 x)}dx \\ j)\ \int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}dy & k)\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx & l)\ \int \operatorname{tg}^2 x dx \end{array}$$

1.15. Halla las primitivas siguientes:

$$\begin{array}{ll} a)\ \int \sqrt{a^2-x^2}dx & b)\ \int \sqrt{x^2-a^2}dx \\ c)\ \int \sqrt{a^2+x^2}dx & d)\ \int \sqrt{-1+2x+x^2}dx \\ e)\ \int \sqrt{2-x-x^2}dx & f)\ \int \sqrt{1+x+x^2}dx \\ g)\ \int(-4x^2+8x-3)^{-3/2}dx & h)\ \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\ i)\ \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} & \end{array}$$

1.16. Calcula las siguientes primitivas utilizando en cada caso el método de integración que convenga:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \int \frac{x}{x^2+4}dx & 21)\ \int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[4]{x-2}-1}dx \\ 2)\ \int(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x})dx & 22)\ \int \frac{\sqrt{y^2+1}}{y^2}dy \\ 3)\ \int \exp(-3x)\operatorname{sen}(2x)dx & 23)\ \int \operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)dx \\ 4)\ \int x\operatorname{arc\,tg}(x)dx & 24)\ \int \operatorname{tg}^2(3x)dx \\ 5)\ \int \operatorname{sen}(x^2)x^3dx & 25)\ \int \frac{z^3}{4z-z^2}dz \\ 6)\ \int \frac{1}{x^3-x^2-x+1}dx & 26)\ \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{1-\operatorname{sen}(t)}dt \\ 7)\ \int \frac{\exp(2t)}{\exp(t)+1}dt & 27)\ \int \frac{\operatorname{tg}(x)}{2-\cos(x)}dx \\ 8)\ \int \frac{2}{x\log^2(x)}dx & 28)\ \int \sec(x)\operatorname{tg}(x)dx \\ 9)\ \int \cos x\cos 2x\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}4x dx & 29)\ \int \cos^4(z)\operatorname{sen}^2(z)dz \\ 10)\ \int \frac{z^3}{-4+4z-z^2+z^3}dz & 30)\ \int \frac{x^3}{(1-x^4)^2}dx \\ 11)\ \int \frac{y^5+y}{y^2}dy & 31)\ \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}dx \\ 12)\ \int \frac{\operatorname{sen}(\log(x))}{3x}dx & 32)\ \int(x^2-x)\log(3x)dx \\ 13)\ \int \tan(3x)dx & 33)\ \int \frac{1}{(x^2-4)^2}dx \\ 14)\ \int \cos^2(z)dz & 34)\ \int \frac{\sec^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}dx \\ 15)\ \int \frac{1}{x+\sqrt{4-x^2}}dx & 35)\ \int \frac{1+\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}dt \\ 16)\ \int \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}dx & 36)\ \int e^x(1-e^x)^3dx \\ 17)\ \int \operatorname{ch}^2 x dx & 37)\ \int \frac{\sqrt{2+t^2}}{t^2}dt \\ 18)\ \int x\sqrt{x-3}dx & 38)\ \int e^{\operatorname{sen}^2 y}\operatorname{sen}2y dy \\ 19)\ \int \operatorname{arcsen}(x)dx & 39)\ \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx \\ 20)\ \int(x^2-x)e^{2x}dx & \end{array}$$

1.17. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Realiza las siguientes operaciones de números complejos y el resultado ponlo en la forma $A+Bi$:

a) $\sqrt{(a+c)+(b+a)i}$,

b) $[(a+c)+(b+c)i]^4$,

c) $\frac{(a+c)+(b+a)i}{(a+c)+2bi}$,

d) $ae^{ib}+ce^{ia}$.

1.18. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Factoriza el polinomio $x^4+2(b^2-a^2)x^2+(a^4+2a^2b^2+b^4)$ como producto de dos polinomios de grado 2 que no tengan raíces reales.

1.19. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Calcula:

$$\int \frac{cx+d}{x^2-2ax+(a^2+b^2)}\delta x.$$

1.20. Resuelve la ecuación $x^4=-1$.

1.21. Factoriza el polinomio x^4+x^2+1 como producto de dos polinomios de grado 2 que no tengan raíces reales.

1.22. Resuelve la ecuación $a^4=b^4$ en $\mathbb{Z}_5$.

II. Matrices

2.1. Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, demostrar que A^4 es la matriz nula.

2.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar $3AA^t-2I_2$.

(b) Resolver la ecuación matricial $AX=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ siendo $X\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2.3. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

realizar si es posible, las siguientes operaciones

(a) $(2A+3B^t)C$	(b) C^tA^t	(c) $DC+E$	(d) $D(E+C)$
(e) B^tA^tCD	(f) D^tC	(g) $BACD$	(h) ED^tC

2.4. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2=A$. Si $B=2A-I_n$, demostrar que B^2 es igual a I_n.

2.5. Dadas matrices $A,B\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, demuestra o pon un contraejemplo a la igualdad $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

2.6. Sea A una matriz cuadrada. Demostrar que las matrices AA^t y A^tA son siempre simétricas.

2.7. Demostrar que si una matriz cuadrada A verifica que $A^2-A-I_2=0$, entonces existe la inversa de A. Calcularla.

2.8. Se considera la matriz con coeficientes reales $A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$. Demostrar que si $a^2+b^2+c^2=1$, entonces $A^n=A$ para todo entero positivo.

2.9. Calcular el rango de las siguientes matrices empleando operaciones elementales:

$$A=\begin{pmatrix}1&6\\5&6\\0&1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2&2&3\\3&0&1\\10&4&8\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&0&3&4\\2&3&0&4\\2&3&4&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&0\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}6&4&5\\3&6&5\\1&2&5\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}5&6\\1-\pi&e\\\pi&1-e\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&9\\2&8\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&4\\1&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&2\\3&4&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&4\\43&76\end{pmatrix}$$

2.10. Calcular mediante el método de Gaüss o el método de la matriz adjunta, las matrices inversas de las matrices del ejercicio anterior si las hay.

2.11. Calcular el rango de la siguiente matriz en función de los valores de a y b:

$$A=\begin{pmatrix}a&0&0&b\\b&a&0&0\\0&b&a&0\\0&0&b&a\end{pmatrix}.$$

2.12. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&2&0\end{pmatrix}$, se pide:

(a) Calcular las sucesivas potencias de A.

(b) Sea $B=I_4+A$, expresar B^n en función de I_4, A, A^2 y A^3.

(c) Demostrar que la inversa de B es $I_4-A+A^2-A^3$.

(d) Expresar B^{-3} en función de I_4, A, A^2 y A^3.

2.13. Hallar la potencia n–ésima de $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ poniendo $A=I_3+B$, siendo B una matriz a determinar.

2.14. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Hallar la potencia n–ésima de $A=\begin{pmatrix}1&d&a&b\\0&1&a&b\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2.15. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\begin{vmatrix}1&3&0\\-1&2&-4\\1&1&2\end{vmatrix}\qquad \text{(b)}\begin{vmatrix}5&-1&7\\6&4&3\\3&2&1\end{vmatrix}\qquad \text{(c)}\begin{vmatrix}3&5&7&2\\2&4&1&1\\-2&0&0&0\\1&1&3&4\end{vmatrix}$$

$$\text{(d)}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\qquad \text{(e)}\begin{vmatrix}1&1&1&6\\2&4&1&6\\4&1&2&9\\2&4&2&7\end{vmatrix}\qquad \text{(f)}\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\2&-1&4&-3\\2&3&-4&-5\\3&-4&5&6\end{vmatrix}$$

2.16. Dada una matriz cuadrada A, ¿Qué valores puede tomar $\det(A)$ si $A^2=A$? ¿y si $A=A^{-1}$?

2.17. De las afirmaciones siguientes, demostrar las verdaderas y dar un contraejemplo para las falsas:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

(c) $A^{n+1} - I_n = (A - I_n)(I_n + A + A^2 + ... + A^n)$.

(d) Si P es una matriz regular, entonces $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$.

(e) Si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.

(f) Si A es antisimétrica y B es simétrica, entonces AB es antisimétrica si y sólo si $AB = BA$.

(g) Si $|AB| = 0$, entonces $|A| = 0$ ó $|B| = 0$.

(h) $|A+B| = |A| + |B|$.

(i) $|2A| = 2|A|$.

2.18. Demostrar que si a, b, c son números reales se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

2.19. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.20. Sin desarrollar los determinantes, demostrar que:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

2.21. Calcular los siguientes determinantes de Vadermonde:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \quad V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2.22. De los dos métodos explicados para calcular la inversa de una matriz ¿Cuál requiere un número menor de operaciones?

2.23. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $AB = I_n$. Demuestra que $BA = I_n$

III. Sistemas de ecuaciones lineales

3.1. Discutir y resolver según el valor de los parámetros que aparezcan:

$$\text{(a)} \begin{cases} \alpha x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \beta \\ 2x - 5y + \alpha z = -2 \end{cases}$$

$$\text{(e)} \begin{cases} 2\lambda x + \mu y + 2z = 1 \\ 2\lambda x + (2\mu - 1)y + 3z = 1 \\ 2\lambda x + \mu y + (\mu + 3)z = 2\mu - 1 \end{cases} \qquad \text{(g)} \begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

(f) $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -a & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 5 & -a-b & 7 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8+b \end{pmatrix}$.

3.2. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $Ax = b$, que admite solución única, entonces ésta es $x = A^{-1}b$.

(b) Si los sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$ son compatibles, entonces lo es $Ax = b$ donde $b = b_1 + b_2$.

(c) Un sistema con más ecuaciones que incógnitas es siempre incompatible.

(d) Si un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible determinado, entonces A es una matriz cuadrada.

(e) Si $Ax = b$ es un sistema incompatible con 5 ecuaciones y 4 incógnitas y el $r(A) = 4$ entonces $r(A|b) = 5$.

3.3. Calcular las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones tanto por el método de Gauss, como por el método de Crammer (por determinantes).

$$\text{(a)} \begin{cases} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 6x - y + 3z = 6 \\ -6x + 8y = -10 \\ 2x - 5y - z = 4 \end{cases}$$

3.4. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\text{(b)} \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ ax + y + (a-1)\,z = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

3.5. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

$$\text{(a)} \begin{cases} kx + y + z + t = k \\ x + ky + z + t = k \\ x + y + kz + t = k \\ x + y + z + kt = k \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2\,(k+1)\,x + 3y + kz = k + 4 \\ (4k-1)\,x + (k+1)\,y + (2k-1)\,z = 2k + 2 \\ (5k-4)\,x + (k+1)\,y + (3k-4)\,z = k - 1. \end{cases}$$

3.6. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de a y b:

$$\text{(a)} \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} ax + 2y + 3z + u = 6 \\ x + 3y - z + 2u = b \\ 3x - ay + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z + 3u = 9. \end{cases}$$

3.7. Se tienen tres lingotes de oro de 100 gramos cuya composición es la siguiente

Lingote	Oro	Plata	Cobre
1	20	30	50
2	30	40	30
3	40	50	10

¿Que peso habrá que tomarse de cada uno de los tres lingotes para formar uno nuevo que contenga 42 gramos de oro, 57 gramos de plata y 51 gramos de cobre?

3.8. La suma de las tres cifras de un número es igual a 6. La cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de unidad y decena. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 198 unidades. Calcular dicho número.

3.9. Una empresa tiene dos tipos de procesos productivos: torno y fresadora. Cada uno de estos procesos se utiliza para fabricar tres tipos de productos A, B y C. Se dispone de 120 horas semanales de torno y de 260 horas de fresadora, y las necesidades asociadas a cada proceso, por unidad de producto, son las siguientes:

Producto	Torno	Fresadora
A	0.1h	0.20h
B	0.25h	0.30h
C	-	0.40h

Si el beneficio unitario que se obtiene con la venta se los productos A, B y C es de 3, 5 y 4 unidades monetarias, respectivamente. ¿Cómo debe de distribuirse la producción semanal para obtener un beneficio de 3800 u.m., si se utilizan todos los recursos disponibles?

3.10. Resuelve el siguiente sistema tomando como cuerpo base $\mathbb{Z}_5$:

$$\left\{\begin{array}{l} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{array}\right.$$

IV. Espacios vectoriales

4.1. En $\mathbb{R}^2$ definimos la operación interna $+$ dada por:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \ \forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

y la operación externa $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x, y), \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ y \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Tiene la terna $\left(\mathbb{R}^2, +, *\right)$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

4.2. En $\mathbb{Z}_3^2$ definimos la operación interna $+$ dada por:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \ \forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{Z}_3^2,$$

y la operación externa $* : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ dada por:

$$\alpha * (x, y) = \left(\alpha x, \alpha^2 y\right), \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_3 \ y \ \forall (x, y) \in \mathbb{Z}_3^2.$$

¿Tiene la terna $\left(\mathbb{Z}_3^2, +, *\right)$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$?

4.3. ¿Es $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

4.4. Considera el conjunto de vectores $S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 2)\} \subset \mathbb{Z}_3^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

4.5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $S = \{u, v, w\}$ un sistema libre. ¿Es $T = \{u + v + w, v + 3w, 2v + w\}$ un sistema libre de vectores?

4.6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_5$ y sea $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. ¿Es $\{u + v + w, v + 3w, 2v + w\}$ un sistema libre de vectores?

4.7. Sean $\{u, v, w\}$ vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ ¿Forman $\{u+v, u+w, v+w\}$ una base de dicho espacio vectorial?

4.8. Decir si los siguientes vectores, de $\mathbb{Z}_5^4$ y $\mathbb{Z}_5^3$ respectivamente, son linealmente independientes:

(a) $\{(1,0,0,2)\,,(3,0,0,1)\,,(0,1,1,0)\}\,.$

(b) $\{(1,0,0)\,,(0,2,1)\,,(0,0,1)\}\,.$

4.9. Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z=0\}$. Ver que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y dar una base de S. Si T es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,1,1)$ y $(1,-1,1)$, calcular los subespacios $S\cap T$ y $T\cap S$.

4.10. Sea $S=\{v_1,v_2,v_3\}\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Probar que el conjunto de vectores $T=\{v_1,v_2,w\}\subset\mathbb{R}^n$, donde $w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3$ con $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$ y $\alpha_3\neq 0$ es linealmente independiente.

4.11. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=0\},\\ T &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.

(b) Calcular $S\cap T$ y $S+T$, dando una base de dichos subespacios.

(c) ¿Es la suma $S+T$ directa?

4.12. Dados los subespacios de $\mathbb{Z}_5^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3 : x=y=0\},\\ T &= \{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3 : x+y+z=0\} \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.

(b) Calcular $S\cap T$ y $S+T$, dando una base de dichos subespacios.

(c) ¿Es la suma $S+T$ directa?

(d) $\mathrm{Card}\,\mathbb{Z}_5^3$, $\mathrm{Card}\,S$ y $\mathrm{Card}\,T$.

4.13. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales generados por $S_1=\{(1,1,1,1),(1,-1,-1,1)\}$ y $S_2=\{(1,1,0,1),(1,2,-1,-$ respectivamente. Calcular:

(a) La base y la dimensión de $<S_1>$ y $<S_2>$.

(b) Calcular $<S_1>\cap<S_2>$ y $<S_1>+<S_2>$ dando bases de dichos subespacios.

(c) ¿Pertenece el vector $(4,0,-2,1)$ a $<S_1>\cap<S_2>$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto a la base obtenida en la parte (b).

(d) ¿Pertenece el vector $(4,0,-2,1)$ a $<S_1>+<S_2>$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto a la base obtenida en la parte (b).

4.14. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=y=z=t\},\\ T &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=2y, 2z=t\}, \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.

(b) Calcular $S\cap T$ y $S+T$ dando unas bases de dichos subespacios.

4.15. Sea $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, estudiar si los siguientes conjuntos de matrices son subespacios vectoriales. En caso de que sean subespacios vectoriales, calcular las ecuaciones cartesianas de estos respecto de la base:

$$\beta=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

a) $M_1 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ A \text{ es simétrica}\}$

b) $M_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ A^2 = A\}$

c) $M_3 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ \det(A) = 0\}$

d) $M_4 = \{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ a \in \mathbb{R}\ \}$

4.16. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

(a) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\right\}$.

(b) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\right\}$.

(c) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\right\}$.

(d) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \ y\ x_3 - x_2 = 0\right\}$.

(e) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2^2 = 0\right\}$.

4.17. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{Z}_5^3$ son subespacios vectoriales:

(a) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2 = 0\right\}$.

(b) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\right\}$.

(c) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 = x_2 = 0\right\}$.

(d) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2 = 0 \ y\ x_3 - x_2 = 0\right\}$.

(e) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2^2 = 0\right\}$.

(f) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : x_1(x_1^2 + 2) = 0\right\}$.

4.18. Dado un espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{K}$, y dados dos subespacios vectoriales W_1, W_2 de V, demostrar que $W_1 \cap W_2$ es subespacio vectorial de V. Dar un ejemplo que ponga de manifiesto que $W_1 \cup W_2$ no tiene porque ser subespacio vectorial.

4.19. Decir si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes:

(a) $\{(1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1)\}$.

(b) $\{(1,0,0,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$.

(c) $\{(1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1), (2,0,0,0)\}$.

4.20. Extraer un conjunto linealmente independiente de los conjuntos del ejercicio **4.19**.

4.21. ¿Alguno de los conjuntos del ejercicio **4.19** son una base de $\mathbb{R}^4$?.

4.22. Calcular el subespacio vectorial generado por los conjuntos del ejercicio **4.19**.

4.23. Se considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial W cuyas ecuaciones respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ son:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Si se elige una nueva base $\mathcal{B}' = \{u_1 - u_2,\ u_2 - u_3,\ u_3 - u_4,\ u_4\}$

a) Calcula las matrices de cambio de base $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ y $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

b) Calcula las ecuaciones de W respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Obtén las coordenadas de $v = u_1 - u_2$ respecto de $\mathcal{B}'$. ¿Pertenece este vector a W?.

d) Calcula la dimensión de W y dos bases de este subespacio vectorial, una con vectores cuyas coordenadas estén expresadas en la base $\mathcal{B}$ y otra con vectores expresados en la base $\mathcal{B}'$.

e) ¿Son los vectores $(1,2,1,0)_{\mathcal{B}}$ y $(3,6,3,0)_{\mathcal{B}'}$ linealmente dependientes?

f) Sea W' el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,1,1)_{\mathcal{B}}$ y $(1,1,1,1)_{\mathcal{B}'}$. Calcula las ecuaciones de este subespacio respecto a la base $\mathcal{B}$ y después respecto a la base $\mathcal{B}'$.

g) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones de $W \cap W'$.

h) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones de $W + W'$.

i) ¿Es la suma $W + W'$ directa?

4.24. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ y $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ calcular:

(a) Un conjunto generador linealmente independiente de W_1 y W_2.

(b) Calcular $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

(c) ¿Es la suma de W_1 y W_2 directa?.

(d) Calcular las dimensiones de $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

4.25. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Demostrar que el conjunto de vectores $\mathcal{B}' = \{u_1, ..., u_n\}$ dado por $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2, ...,$ $u_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ es también una base de V.

4.26. Sea $P_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que cuatro. Dadas las siguientes bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{x,\ x^2 + 1,\ 2x^4 + x^3,\ x^3 - x^2 + x,\ x^2 + x\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{2x^4 + 1,\ x^3 - 1,\ x^3 + 2x,\ x^2,\ x^3 - x^2\}$$

a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

b) Halla las coordenadas respecto de dichas bases del polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

4.27. Sean a y b dos números reales con $b \neq 0$. Se considera el conjunto E de todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tales que

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

a) Comprobar por inducción que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ queda determinada por la relación de recurrencia anterior cuando se conocen sus dos primeros términos x_1, x_2.

b) Comprobar que el conjunto E tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que la dimensión de E es 2.

c) Para hallar una base de este espacio vectorial se considera la ecuación de segundo grado, llamada ecuación característica, $r^2 = ar + b$.

1) Demostrar que si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas α y β, las sucesiones $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituyen una base de E.

2) Demostrar que si la ecuación característica tiene sus dos raíces complejas conjugadas $\alpha = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$, $\beta = \rho(\cos\theta - i\mathrm{sen}\theta)$ entonces las sucesiones reales $(\rho^n \cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\rho^n \mathrm{sen} n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base de E.

3) Demostrar que si la ecuación característica tiene una raíz doble α, las sucesiones $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituyen una base de E.

4.28. Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\},$$

$$\beta_C = \{w_1 = (1, 1, 0), w_2 = (0, 1, 1), w_3 = (0, 0, 1)\}, \quad B = \{(2, 2, 1)_{\beta_C}\}$$

y se pide:

a) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$.

b) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$.

c) Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A.

d) Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A.

4.29. Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}, \quad \beta_C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$$

y se pide:

a) Comprobar que β_A es una base de $\mathbb{R}^3$,

b) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$.

c) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$.

d) Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A.

e) Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A.

4.30. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S =< (1,0,0,0),(0,1,1,1) > \quad \text{y} \quad T = \{(x,y,z,t) : x = 0, 2y - z - t = 0\}$$

y se pide:

a) Una base, la dimensión y las ecuaciones de S.

b) Una base y la dimensión de T.

c) Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S \cap T$.

d) Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S + T$.

e) Dada la base $\beta = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, justifica si el vector $(1,2,3,4)_\beta$ pertenece a alguno de los subespacios $S, T, S \cap T, S + T$.

V. Aplicaciones lineales

5.1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x - y, 2x - y^2)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y,z,u) = (x - y,\ u + z,\ z,\ 2x - y)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x - y,\ x - 2y,\ 3y)$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x - z + y,\ 2x - y - 3z,\ z + y)$.

5.2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean f y g dos aplicaciones lineales de V en V de manera que para una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2)$ se tiene que:

$$f(u_1) = u_2 \quad f(u_2) = u_1 \qquad g(u_1) = -u_1 \quad g(u_2) = u_2$$

Demuestra que en estas condiciones las aplicaciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son distintas.

5.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicacion lineal. Se define el **conjunto invariante** de f, denotado $\mathrm{Inv}(f)$, como el conjunto de vectores los vectores v que permanecen invariantes por la aplicación, es decir,

$$\mathrm{Inv}(f) = \{v \in V : f(v) = v\}$$

Demuestra que el conjunto invariante de una aplicación lineal es un subespacio vectorial.

5.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\ f$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\ f$.

5.5. Dada una aplicación lineal $f : V \to V$ con V un K-espacio vectorial, demuestra que $f^2 = 0$ (es decir, $f \circ f$ es la aplicación nula) si y solo si $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

5.6. Sea $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial V y sea:

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1,\ u_1 + u_2,\ u_1 + u_2 + u_3,\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4\}$$

Se pide:

a) Demostrar que $\mathcal{B}_2$ es una base de V.

b) Encontrar la matriz de cambio de base.

c) Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_1$ de un vector cuyas coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_2$ son $(1,-1,0,1)$.

5.7. Consideremos la aplicación $D : P_4[x] \longrightarrow P_3[x]$ de forma que si $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_4[x]$, se tiene que:

$$Dp(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

a) Prueba que D es una aplicación lineal.

b) Encuentra la matriz de D asociada a las bases canónicas de $P_4[x]$ y $P_3[x]$.

c) Si sobre $P_4[x]$ se considera la base

$$\mathcal{B} = \{(1+x)^4,\ (1+x)^3x,\ (1+x)^2x^2,\ (1+x)x^3,\ x^4\}$$

obtén la matriz de D en esta nueva base y la base canónica de $P_3[X]$.

5.8. Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\square}(g) = M_{\beta_8\square}M_{\square\beta_6}(g)M_{\beta_1\square}$;

b) $M_{\beta_3\beta_5}(g) = M_{\square\square}M_{\beta_1\beta_8}(g)M_{\square\square}$.

5.9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida respecto a esta base por la relación:

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$$

Se pide que:

a) Calcules la matriz de f respecto a la base $\mathcal{B}$.

b) Encuentres los vectores invariantes de f (ver ejercicio **5.3**.).

c) Calcules el núcleo y la imagen de f.

d) Determines una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y la amplies a una base de $\mathbb{R}^3$.

e) Halles la matriz de f respecto a esta nueva base.

f) Calcules el rango de f.

5.10. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por:

$$\begin{array}{rcl} g(-1,1,3) & = & (6,-4,16) \qquad g(-2,1,1) = (-2,-5,1) \\ g(3,2,-1) & = & (1,14,-12) \end{array}$$

Se pide hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, las ecuaciones del núcleo y la imagen de f y una base de ambos subespacios. Calcula además el rango de f.

5.11. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$\begin{array}{ll} f(1,1,1,1) = (0,0,1) & \qquad f(1,0,1,0) = (1,1,-1) \\ f(1,1,1,0) = (0,0,-1) & \qquad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1) \end{array}$$

Se pide calcular:

a) La matriz de f respecto a las bases canónicas.

b) La dimensión y ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

c) La matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$$

así como las ecuaciones de la imagen de f en esta última base.

d) La matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,$ de $\mathbb{R}^3$, así como las ecuaciones del núcleo y la imagen de f en estas bases.

e) El rango de la aplicación.

5.12. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) La expresión analítica de f en las bases canónicas.

b) El núcleo y la imagen de f.

c) La matriz de f respecto a las bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),\ (1,1,1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1),\ (0,2)\}$.

d) El rango de f.

e) Dos bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$ de manera que la matriz de f asociada a dichas bases es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.13. Sean g y f las aplicaciones lineales de los ejercicios **5.10** y **5.11**. Calcula la matriz de la aplicación compuesta $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. Calcula además el rango, el núcleo, la imagen y el espacio invariante de dicha aplicación.

5.14. Se considera la siguiente función:

$$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (x+y,y,0) \end{array}$$

a) Demuestra que f es lineal.

b) Halla la dimensión de los subespacios $\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ así como bases de los mismos.

c) Representa gráficamente los dos subespacios anteriores.

5.15. Contesta de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones,

a) Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal y $v \in V$ de forma que $f(v) = f(-v)$, entonces $v = 0$.

b) Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal tal que $\dim(\,\mathrm{Ker}(f)) > 0$, entonces f^{-1} es una aplicación.

c) Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$, si f es suprayectiva, se tiene entonces que $\dim(V) \geq \dim(W)$.

d) Si $f : V \longrightarrow V$, entonces $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

e) Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

representan el mismos endomorfismo respecto de bases diferentes.

5.16. Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabiendo que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array} \}$$

y $f(1,0,0) = (-1,2,0)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$.

5.17. * Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base. Para cada $1 \leq i \leq n$ se define una aplicación lineal, $u_i : V \longrightarrow K$ de forma que:

$$u_i(e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Si V^* es el conjunto de las aplicaciones lineales de V en K (llamado espacio dual de V), prueba que

a) V^* es un espacio vectorial sobre K.

b) $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base de V^*.

c) La aplicación,

$$\begin{array}{rccl} \Gamma: & V & \longrightarrow & V^* \\ & x & \mapsto & \Gamma x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, u_i \end{array}$$

es un isomorfismo entre los espacios vectoriales V y V^*.

5.18. * Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se consideran las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ & (x,y,z) & \mapsto & F(x,y,z) = x\ \mathrm{sen}^2(t) + y\ \cos^2(t) + z \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} G: & \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \phi & \mapsto & G(\phi) = (\phi(0), \phi(-\frac{\pi}{2})) \end{array}$$

a) Comprueba que ambas aplicaciones son lineales.

b) calcula sus núcleos y sus imágenes.

c) Comprueba que $\{\mathrm{sen}^2(t), \cos^2(t)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(F)$.

d) Halla el núcleo de $G \circ F$.

- Sugerencia: Para una mejor formación, se sugiere hacer problemas del libro: Problemas de Algebra volumen 3 de los autores Anzola, Caruncho y Pérez–Canales

5.19. *(2007, ITOP)* Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal de la que sabemos que

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y que $(1, 0, -1, -1) \in \mathrm{Ker}\, f$. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se pide:

a) Encontrar los valores a, b y c.

b) Encontrar las ecuaciones, bases y dimensiones de los espacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

c) Demostrar que $\beta = \{v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,1,1,0), v_3 = (0,1,0,1), v_4 = (1,0,-1,0)\}$ es una base y calcular $M_{\beta\beta}(f)$.

d) Encontrar las ecuaciones de los espacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ respecto de la base β.

e) Determinar, según los valores de m, el conjunto $f^{-1}(m, 0, m^2, -1) = \{(x,y,z,t) : f(x,y,z,t) = (m, 0, m^2, -1)\}$

Considéresen las mismas cuestiones para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

5.20. Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal de la que sabemos que

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se pide:

a) Encontrar las ecuaciones, bases y dimensiones de los espacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

b) Determinar bases β y β' tales que: $M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Encontrar $M_{\beta\beta}(f)$ y $M_{\beta'\beta'}(f)$.

Considéresen las mismas cuestiones para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

5.21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ y que $f(0,0,1) = (-2,-1,0)$. Se pide:

a) Encuentra los valores de a, de b y de c.

b) Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcula $f(x,y,z)$.

c) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base canónica de $\operatorname{Ker} f$.

d) Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

e) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base β de $\operatorname{Ker} f$.

f) Calcula el vector $f((x,y,z)_\beta)$ expresando sus coordenadas en la base canónica.

Considéresen las mismas cuestiones para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

5.22. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ que verifica:

$$f(1,0,1) = (1,0), \quad f(0,1,1) = (2,3), \quad f(0,0,1) = (1,1).$$

En este ejercicio usaremos la notación β_A para denotar a la base definida en el ejercicio anterior. Además β_C^3 y β_C^2 serán respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
Se pide:

a) Decir quiénes son n y k.

b) Calcular $M_{\beta_A\beta_C^2}(f)$.

c) Calcular $M_{\beta_C^3\beta_C^2}(f)$.

d) Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$.

e) Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$.

5.23.

PROBLEMA DE REPASO

En este problema consideraremos los siguientes conjuntos:

$$\beta_1 = \{(1,0,1,0), (1,0,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1)\},$$

$$\beta_2 = \{(1,1,1,0), (1,1,0,0), (0,1,1,1), (0,0,1,1)\},$$

$$\beta_3 = \{(1,0,0,a), (1,0,1,1), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\},$$

$$\beta_4 = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,0,1)\},$$

$$\beta_5 = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\},$$

$$\beta_6 = \{(1,0,1), (0,0,-1), (0,1,1)\}$$

y las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ y $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definidas por:

- $f(x,y,z,t)_{\beta_1} = (x+y+z, x, y-t)_{\beta_4}$,
- $M_{\beta_4\beta_5}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $M_{\beta_4\beta_5}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que los conjuntos β_1, β_2 y β_3 son bases de $\mathbb{R}^4$.

b) Comprueba que los conjuntos β_4, β_5 y β_6 son bases de $\mathbb{R}^3$.

c) Calcula las siguientes matrices:

$$M_{\beta_1\beta_2}, M_{\beta_2\beta_3}, M_{\beta_1\beta_3}, M_{\beta_4\beta_5}, M_{\beta_4\beta_6}, M_{\beta_5\beta_6}.$$

d) Dados los subespacios vectoriales

$$S = \{(x,y,z,t)_{\beta_3} \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\} \text{ y } T =< (1,2,0,1)_{\beta_2} >,$$

se pide:

- Calcular las dimensiones de S y T y bases de cada uno de los subespacios (se pide que las coordenadas de los vectores de esas bases estén dadas en la base β_1).
- Calcula las ecuaciones cartesianas de S y de T en la base β_1.
- Calcula los espacios $S \cap T$ y $S + T$ (da las ecuaciones de ambos espacios en la base β_1 y bases cuyos vectores tengan sus coordenadas expresadas respecto a β_1).
- ¿Es la suma de ambos subespacios directa?

e) Di cuáles son los valores de k, l, m y n.

f) Calcula las ecuaciones, una base y la dimensión de $\operatorname{Ker} f$ (todo ello respecto de la base β_2).

g) Calcula las ecuaciones, una base y la dimensión de $\operatorname{Im} f$ (todo ello respecto de la base β_6).

h) Calcula las matrices siguientes:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f), M_{\beta_1\beta_5}(f), M_{\beta_4\beta_4}(g \circ h), M_{\beta_4\beta_4}(h \circ g), M_{\beta_4\beta_4}(h),, M_{\beta_4\beta_4}(g)$$

i) ¿Es la aplicación g biyectiva? ¿Cuál es su inversa?

j) Determina $\operatorname{Ker} g, \operatorname{Ker} h, \operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Im} h$ (todo respecto de la base β_4) y di si se verifica que alguna de las dos sumas siguientes es directa:

$$\operatorname{Ker} h + \operatorname{Im} h, \quad \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g.$$

VI. Diagonalización de matrices

6.1. Dada la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, diremos que λ es valor propio de T si lo es de la matriz asociada a la aplicación lineal T respecto de las bases canónicas. Supongamos que λ y μ son valores propios de T.

a ¿Es $\lambda + \mu$ valor propio de T?

a) ¿Y $\lambda\mu$?

6.2. Dada la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide probar que la matriz dada es diagonalizable y calcular las matrices diagonal D y de paso T y T^-1. Diagonaliza también H^{-1} y H^2 calculando sus matrices de paso.

6.3. Estudiar en función de los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ es diagonalizable o no.

6.4. Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

a) Un vector propio de A está asociado a un único valor propio.

b) Si $u \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Au = 0$ entonces u es un vector propio de A

c) Si u y v son dos valores propios distintos, entonces el vector $w = u + v$ es un vector propio de A.

d) Si A es invertible y λ es un valor propio de A entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}.

6.5. De la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) El polinomio característico de B.

b) Las raíces del polinomio característico y sus multiplicidades.

c) Determinar, justificadamente, si la matriz B es diagonalizable.

d) Si la matriz B es diagonalizable calcula la matriz diagonal D y la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}BP$. Si la matriz no es diagonalizable calcula B^2 y B^3.

6.6. De una matriz diagonalizable A sabemos que tiene como polinomio característico $p(x) = (x-1)(x-3)^2(x+1)$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 3x\}$?

b) ¿Cuál es el determinante de A? ¿Por qué?

c) Escribe una matriz diagonal, D, para A.

d) ¿Cuál es el tamaño de la matriz A?

e) De los subespacios invariantes V_1, V_3 y V_{-1} conocemos unas bases: $\beta_{V_1} = \{(1,0,0,0)\}$, $\beta_{V_3} = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $\beta_{V_{-1}} = \{(1,1,0,0)\}$. Da la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

6.7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el polinomio característico p_A.

b) Calcular el espectro σ_A y especificar la multiplicidad de cada raíz.

c) Justificar si la matriz A es diagonalizable.

d) Dar la matriz diagonal D.

e) Dar la matriz de paso P.

f) Especificar la relación entre A, D y P.

6.8. Calcular la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Cayley-Hamilton.

6.9. De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2 + 25)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

6.10. De una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2 + 25)$. Da los valores de n y de m.

6.11. De una matriz $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{1, 2\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(2) = m(1) = 2$. El espacio invariante V_1 tiene como base a $\beta_{V_1} = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ y el espacio invariante V_2 tiene como base a $\beta_{V_2} = \{(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$. Se pide:

a) Justificar por qué C es diagonalizable.

b) Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.

c) Calcular el vector $C(1,1,1,1)^t$.

d) Calcular el vector $C(0,0,1,1)^t$.

e) Dar el valor de $|C|$.

VII. Cálculo: funciones reales de variable real

7.1. Calcular los siguientes límites utilizando la regla de l'Hôpital.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}.\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2}.\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\tan(5x)}.\quad \text{(e)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{sen}mx)}{\ln(\operatorname{sen}x)}.\quad \text{(f)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}.$$

7.2. Calcular los desarrollos de Taylor en $x=0$ de grado k de las funciones

$$\text{(a)}\ f(x)=e^x.\quad \text{(b)}\ f(x)=\operatorname{sen}x.\quad \text{(c)}\ f(x)=\cos x.$$

$$\text{(d)}\ f(x)=\frac{1}{1+x}.\quad \text{(e)}\ f(x)=\log(1+x).\quad \text{(f)}\ f(x)=\cos(x^2).$$

7.3. Utilizar el polinomio de Taylor en $x=0$ de grado 3 para calcular aproximadamente los valores $\sqrt[4]{e}$, $\cos(0{,}5)$, $\log(1{,}5)$, estableciendo cual ha sido el error máximo en la aproximación.

7.4. Calcular los límites de la actividad **7.1** usando desarrollos de Taylor.

7.5. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{1-\cos(x^3)}.$$

7.6. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)}.$$

7.7. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\ \text{(10–2–1997)}.$$

7.8. Utilizar el desarrollo de Taylor de grado dos de la función $f(t)=e^{-t^2}$ para calcular la integral $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ de forma aproximada. Dar una cota del error cometido. (3–9–1997).

7.9. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3\left(1-3x^2\right)}{x^4-x^4\cos^2(2x)}\ \text{(3–9–1997)}.$$

7.10. Calcular el desarrollo de Taylor de grado 2 en $x=0$ de la función

$$f(x)=\int_0^x te^{-t}dt,$$

y utilizarlo para calcular aproximadamente $\int_0^{0,1} te^{-t}dt$. Dar una estimación del error cometido. (1–12–1997).

7.11. Calcular el siguiente límite funcional

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}x^2}\ \text{(14–2–1998)}.$$

7.12. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}}{\ln(x+1)}\ \text{(2–7–1998)}.$$

7.13. Usando el desarrollo de Taylor en $x=0$ de $f(x)=e^x$, obtener $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 10^{-4}. (2–7–1998).

7.14. Utiliza un desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x)=\log x$ para aproximar el valor de $\log(1,1)$. Da una estimación del error cometido.

7.15. Calcula los límites siguientes:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \lim_{x\to 0}\frac{x^5-x\log(1+x^4)}{\operatorname{sen}^3(x^2)} & \text{(b)} & \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{x^5-x\log(1+x^4)}\\
\text{(c)} & \lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)} & \text{(d)} & \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{1-\cos^3(x)}
\end{array}$$

7.16. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3\log(1+3x^3)}$$

7.17. Calcula el límite siguiente usando desarrollos de Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x^4}{1-\cos(x^2)}$$

VIII. Límites y continuidad de funciones de varias variables

8.1. Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$
d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x > 1\}$

8.2. Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x \leq 1\}$

8.3. Calcular los puntos de acumulación, la clausura, el interior y la frontera de los conjuntos de los dos ejercicios anteriores.

8.4. Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
(b) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$.
(c) $f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2-1}, \frac{xy}{x^2+y^2-4}\right)$.
(d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
(e) $f(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2-4}, \log\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)\right)$.

8.5. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

8.6. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \left(x + y^2, \frac{xy}{x^2 + y^2}\right).$$

Como el límite direccional depende de m deducimos que el límite de $g(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ no existe. Por lo tanto tampoco existe el de $f(x, y)$.

8.7. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8.8. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}.$$

8.9. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

8.10. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{2x^5+2y^3\left(2x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

8.11. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y)=\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},xy,\sqrt{|xyz|}\right).$$

8.12. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}.$$

8.13. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

8.14. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}.$$

8.15. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y)=\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\operatorname{sen}\left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)\right).$$

8.16. Dadas las funciones

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } |x|\neq|y|,\\ 0 & \text{si } |x|=|y|,\end{cases}$$

y

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

se pide:

(a) Hallar $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ en los siguientes casos: $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)$ y $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$, donde k es un número real.

(b) ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(c) Comprobar si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$.

8.17. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

8.18. ¿Es posible definir las funciones de los ejercicios **8.5**, **8.6**, **8.8**, **8.9**, **8.10**, **8.11**, **8.12**, **8.13**, **8.14** y **8.15** de manera que éstas sean continuas?

8.19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$\text{(a) } f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\text{(b) } f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2},\operatorname{sen}(xy)\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ (0,0) & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\text{(c) } f(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}x}{x}y & \text{si } x\neq 0,\\ y & \text{si } (x,y)=(0,y).\end{cases}$$

$$\text{(d) } f(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}xy}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ y & \text{si } (x,y)=(0,y).\end{cases}$$

8.20. ¿Qué tiene que valer el número real k para que la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,, \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

sea continua?

8.21. ¿Qué tiene que valer el número real k para que la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,, \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

sea continua?

8.22. Da una razón que justifique que la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=\operatorname{sen}(y+x)$, no es una norma.

8.23. Pon un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ y justifica por qué no es compacto.

8.24. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}+5$.

8.25. Da una razón que justifique que la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, definida por $f(x,y)=|\cos(x)\cos(y+x)|$, no es una norma.

8.26. Da una razón por la que el conjunto $K=\{(x,y): x^2+y^2>4\}$ no es compacto.

8.27. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$.

8.28. Da una razón que justifique que la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=\operatorname{sen}(y+x)$, no es una norma.

8.29. ¿Existe algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea a la vez abierto y cerrado? Pon un ejemplo en caso de responder afirmativamente..

8.30. Pon un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ y justifica por qué no es compacto.

8.31. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}+5$.

8.32. Dibuja los conjuntos que siguen

$$\begin{array}{lll} A=\{(x,y): x^2>1\} & B=\{(x,y): y^2\leq 1\} & C=\{(x,2x): x\in\mathbb{R}\} \\ D=\{(\frac{1}{n},0): n\in\mathbb{N}\} & E=\{(x,y): x^2+y^2>1\} & F=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\} \\ G=\{(x,\frac{2}{x}): x\in\mathbb{R}\} & H=\{(k,k): k=1,2,3,4,5,6\}. & \end{array}$$

Calcula:

a) el interior, la clausura y la frontera de cada uno de ellos;

b) el interior y la clausura de $A\cup B\cup C$;

c) los puntos de acumulación y aislados del conjunto D;

Responde:

d) ¿Qué conjuntos son cerrados?

e) ¿Cuáles son abiertos?

f) ¿Cuáles son acotados?

g) ¿Hay algún conjunto compacto? ¿Cuál o cuáles?

IX. Cálculo diferencial de funciones de varias variables

9.1. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\mathrm{sen}y-y\mathrm{sen}x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(0,0)$ y $\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(0,0)$, pero no son iguales.

9.2. Se consideran las funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y)=\left(x^2y^4,x^3y^3+4xy^2\right)$ y $g(x,y)=(x\mathrm{sen}y,y\mathrm{sen}x)$. Sea $F=g\circ f$. Calcular la matriz jacobiana de F en el punto $(2,-1)$.

9.3. Se consideran las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definidas por $f(t)=\left(t^2,3t-1,1-t^2\right)$ y $g(x,y,z)=\left(x^2-y-zx,y^2+xy+z^2\right)$. Sea $F=g\circ f$. Calcular la matriz jacobiana de F en el punto -1. ¿Es posible calcular la matriz jacobiana de la función $G=f\circ g$ en el punto $(1,1,1)$?

9.4. Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y)=f(g(x)k(y),g(x)+h(y)),$$

donde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ y $g,h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son de clase $C^1(\mathbb{R})$.

9.5. Calcular la expresión de las derivadas parciales de la función $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z)=f(x^y,y^z,z^x)$$

donde $f:M\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(M)$ con

$$M=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}.$$

9.6. Calcular la expresión de las derivadas parciales de la funciones $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dadas por

(a) $F(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}\mathrm{sen}t\,dt.$
(b) $F(x,y,z)=\int_0^{xyz}t\mathrm{sen}t\,dt.$
(c) $F(x,y,z)=\int_{x^2+y^2}^{xyz}\mathrm{sen}t\,dt.$

9.7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y)=f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\quad\text{con } x,y\neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x^2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y^2\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0.$
b) $2x^2y^2(x+y)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)-x^4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+y^4\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x,y)=0.$

9.8. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y)=\frac{f(y/x)}{x}\quad\text{con } x\neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)+F(x,y)=0.$
b) $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=2F(x,y).$

9.9. Dada $f(x,y,z)$ se define el gradiente de f como

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right).$$

Dadas las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\mathrm{sen}\theta\\ z=z,\end{cases}$$

obtener el gradiente de f en estas coordenadas.

9.10. Si ahora tenemos las coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \mathrm{sen}\varphi \\ y = r\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\varphi \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

obtener el gradiente de la función del ejercicio anterior en estas nuevas coordenadas.

9.11. Suponiendo que ϕ es suficientemente diferenciable comprueba que:

a) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ si $z = \phi(x^2 + y^2)$,

b) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ si $z = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$.

9.12. Dadas dos constantes, a y b, comprueba que la función $u = \log\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

9.13. Demuestra que si la función $u(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace, entonces la función $v(x,y) = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ también la satisface.

9.14. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ si

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

9.15. Comprobar que la ecuación $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto del punto $x = 1$ en el cual toma el valor $y = 2$. Calcular la primera y segunda derivada de dicha función en el punto $x = 1$.

9.16. Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2xz = 0 \end{cases}$$

define a (x,y) como funciones implícitas de z en un abierto del punto $z = 0$ con los valores $(x,y) = (0,0)$. Calcular las derivadas primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.

9.17. Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y - z^2 - t^2 = 0 \\ x^2 - y - z^2 - t = 0 \end{cases}$$

define a (z,t) como funciones implícitas de (x,y) en un abierto del punto $(x,y) = (2,1)$ con los valores $(z,t) = (1,2)$. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.

9.18. Idem para el sistema

$$\begin{cases} xe^t + yz - z^2 = 0 \\ y\cos t + x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

en el punto $(x,y) = (2,1)$ y $(z,t) = (2,0)$.

9.19. Estudiar si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x - xy + z = 4 \end{cases}$$

define a dos cualesquiera variables como función implícita de la tercera con los valores de la terna $(0,2,4)$. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de dichas funciones en el punto considerado.

9.20. Estudiar la existencia de función inversa de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (e^x\cos y, e^x\mathrm{sen}y).$$

9.21. Idem para la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right).$$

9.22. Idem para la aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{1-x^2-y^2}, \frac{y^2}{1-x^2-y^2} \right)$$

donde $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$.

9.23. Calcular los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$;
b) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ con $x > 0$ e $y > 0$;
c) $f(x,y) = xy \log(x^2 + y^2)$ siendo $(x,y) \neq (0,0)$;
d) $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$ donde $a > 0$;
e) $f(x,y) = \text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}z - \text{sen}(x+y+z)$ donde $x,y,z \in (0,\pi)$;

9.24. Calcular los extremos de las siguientes funciones sujetas a las ligaduras fijadas:

a) $f(x,y) = xy$ si $x + y = 1$;
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;
c) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ si $x - y = \frac{\pi}{4}$;
d) $f(x,y) = \text{sen}x\text{sen}y\text{sen}z$ si $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, donde $x,y,z \in \mathbb{R}^+$;
Usando el método explicado para encontrar extremos condicionados, calcula los extremos condicionados de la función $f(x,y) = 2(x^2+y^2)$ con ligadura $y = 4x^2$. Di si son máximos o mínimos condicionados.
e) $f(x,y) = xy + yz$ si $x^2 + y^2 = 2$ e $y + z = 2$, donde $x, y \in \mathbb{R}^+$;

9.25. Calcula los extremos condicionados de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ con ligadura $4x^2 + y^2 = 4$. Di si son máximos o mínimos condicionados.

9.26. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x,y) = (x + xe^y, x + y, y^2\text{sen}x) \qquad g(x,y,z) = (x + e^{xyz}, y - xz).$$

Se pide:

a) $Jf(x,y)$.
b) $Jg(x,y)$.
c) ¿Se puede hacer la composición $g \circ f$? En caso afirmativo da la matriz $J(g \circ f)(0,0)$.
d) Usando la fórmula del jacobiano de una composición de aplicaciones se pide calcular $Jf \circ g(0,0,0)$.
e) A la vista de los resultados de antes se piden los valores de $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f \circ g}{\partial y}(0,0,0)$.

9.27. Si $h : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$ es una aplicación de clase C^2, responde a las siguientes cuestiones para un $a \in \mathbb{R}^{2006}$.

a) Si det $Jh(a) \neq 0$ sabemos que la aplicación h es localmente invertible de manera única. Llamemos h^{-1} a la inversa local de h ¿Quién es $Jh^{-1}(h(a))$?
b) ¿Coinciden el tamaño de la matriz Hessiana $Hh(a)$ y el de la matriz jacobiana $Jh(a)$?
c) ¿Puedes asegurar que alguna de las dos matrices anteriores es simétrica?

9.28. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$f(x,y) = (x + y^2x, xy) \qquad g(x,y) = (x + e^{xy}, y - x, \text{sen}(xy)).$$

Se pide:

a) $Jf(x,y)$.
b) $Jg(x,y)$.
c) Da la expresión de la aplicación $g \circ f$.
d) Usando la fórmula del jacobiano de una composición de aplicaciones se pide calcular $Jg \circ f(0,1)$.
e) A la vista del resultado del apartado anterior, se piden los valores de $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial g \circ f}{\partial y}(0,1)$.

9.29. Si $h : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{2000}$ es una aplicación de clase C^1, responde a las siguientes cuestiones para un $a \in \mathbb{R}^{2000}$.

a) ¿Cuál es el tamaño de $Jh(a)$?

b) ¿Es la matriz $Jh(a)$ simétrica?

c) ¿Qué condición le exigirías a h para asegurar que $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_{2000}}(a) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_{2000} \partial x_1}(a)$?

9.30. De una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ conocemos su matriz jacobiana en un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Esta matriz es:

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los valores de n y de m? *(0,25 puntos)*

b) ¿Es la aplicación f localmente invertible en a? ¿Por qué? *(0,25 puntos)*

c) ¿Es la aplicación f globalmente invertible? ¿Por qué? *(0,25 puntos)*

d) Si la aplicación f es localmente invertible en a calcula $Jf^{-1}(f(a))$ *(0,25 puntos)*.

9.31. Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ para valores de $(x, y) \in (0, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

9.32. Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + 2x^2y^2 + 3y^2$ y di si son máximos o mínimos.

9.33. En las siguientes cuestiones nos referiremos a una aplicación $g : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$. Se hacen algunas preguntas para verificar que conoces la relación entre *continuidad, derivabilidad respecto a cualquier dirección, diferenciabilidad y clase* C^1.

a) Si la aplicación g es derivable respecto a sus 2006 variables ¿Podemos decir que g es continua? ¿Y diferenciable?.

b) Ahora suponemos que g es diferenciable ¿Qué dos propiedades más puedes asegurar de g?.

c) ¿Y si g es de clase C^1 qué puedes decir?.

9.34. Suponiendo que ϕ es suficientemente diferenciable comprueba que:

a) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ si $z = \phi(x^2 + y^2)$,

b) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ si $z = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$.

9.35. Dadas dos constantes, a y b, comprueba que la función $u = \log\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Finalmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} + \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = 0.$$

9.36. Demuestra que si la función $u(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace, entonces la función $v(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ también la satisface.

9.37. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ si

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

9.38. Calcula los extremos condicionados de la función $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sujeta a las condiciones $x^2 = 1$, $x + y + z = 1$, considerando que f sólo está definida en $(\frac{-1}{2}, +\infty) \times (\frac{-1}{2}, +\infty) \times (\frac{-1}{2}, +\infty)$.

9.39. Calcula los extremos relativos, si existen, de la función $f(x, y) = (x^2 + x)(3 - 4y + y^2)$.

X. Cálculo integral: funciones reales de varias variables

10.1. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

$$\text{(a)} \iint_\Omega xy dxdy. \quad \text{(b)} \iint_\Omega xe^y dxdy. \quad \text{(c)} \iint_\Omega y^2 \text{sen} x dxdy.$$

10.2. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

a) $\iint_\Omega y dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
b) $\iint_\Omega (3y^3 + x^2) dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \}$.
c) $\iint_\Omega \sqrt{xy} dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$.
d) $\iint_\Omega ye^x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$.
e) $\iint_\Omega y + \log x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0{,}5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

10.3. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\iint_\Omega (4 - y^2) dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.
b) $\iint_\Omega (x^4 + y^2) dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.
c) $\iint_\Omega (x + y) dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.
d) $\iint_\Omega (3xy^2 - y) dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1,1]$.

10.4. Calcular la superficie de las siguientes regiones:

a) Círculo de radio R.
b) Elipse de semiejes a, b.
c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.
d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.
e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

10.5. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.
b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.
c) Esfera de radio R.
d) Cono de altura h y radio de la base R.
e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

10.6. Calcular cambiando a coordenadas polares:

a) $\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$.
b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dydx$.
c) $\int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dydx$.
d) $\int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$.

10.7. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3] \times [-1,1]$ las integrales

$$\text{(a)} \iiint_\Omega xyz dxdydz. \quad \text{(b)} \iiint_\Omega xe^{y+z} dxdydz. \quad \text{(c)} \iiint_\Omega y^2 z^3 \text{sen} x dxdydz.$$

10.8. Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\iiint_\Omega (y^3 + z + x) dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
b) $\iiint_\Omega (y \text{sen} z + x) dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x, y \leq 1\}$.

c) $\iiint_\Omega x dx dy dz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.
d) $\iiint_\Omega yxz dx dy dz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x,\ -1 \leq x, y \leq 1\}$.

10.9. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10.10. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + y^2 + x = 0$.

10.11. Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

10.12. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

10.13. Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r\operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

a) El volumen de una esfera de radio R.
b) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ en el recinto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.
c) El volumen del recinto del apartado (b).

10.14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

10.15. Calcular $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$.

10.16. Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

10.17. Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

10.18. Calcular $\iint_\Omega xy dx dy$ donde Ω es la región limitada por las curvas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Indicación: hacer el cambio de variable $x = u - v$, $y = 2u - v$.

10.19. Calcular el volumen encerrado por un cilindro de radio $R/2$ y una esfera de radio R cuyo centro está situado en un punto de la superficie del cilindro. Indicación: hacer el cambio a coordenadas cilíndricas.

10.20. Calcular

$$\iiint_\Omega \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

10.21. *Coordenadas cilíndricas.*

a) Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas: $\Phi(r, \theta, z) = \ldots$.
b) ¿En qué rango máximo (abierto) varían r, θ y z para que Φ sea biyectiva?.
c) Calcula el jacobiano de Φ y calcula el valor absoluto de su determinante (este determinante lo tienes que calcular explícitamente).
d) Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x,y,z) : 16 \leq x^2 + y^2 \leq 81, x \leq 0, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.

10.22. *Coordenadas esféricas.*

a) Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas: $\Phi(r, \theta, \phi) = \ldots$.
b) ¿En qué rango máximo (abierto) varían r y los ángulos θ y ϕ para que Φ sea biyectiva?.
c) Calcula el jacobiano de Φ y di cuál es el valor absoluto de su determinante (este determinante no hace falta que lo calcules explícitamente).
d) Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x,y,z) : 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, y \geq 0\}$.
e) Calcula la integral $\iiint_\Omega \operatorname{sen}[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] dx dy dz$, donde Ω es el conjunto del apartado anterior.

10.23. Calcula el volumen limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

10.24. Dadas constantes $0 < a < b$, calcula el volumen limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, suponiendo además $z \geq 0$.

10.25. Calcula el área de la figura limitada por $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ con $x^2 + y^2 \geq a^2$.