Espacios Vectoriales

4.1

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$$
$$\alpha * (x,y) = (\alpha x, y)$$

$(\mathbb{R}^2, +, *)$ no es un espacio vectorial porque por ejemplo

$$0 * (1,1) = (0,1) \neq (0,0)$$

4.2

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,\ y+v)$$
$$\alpha * (x,y) = (\alpha x,\ \alpha^2 y)$$

Calculemos los cuadrados de $\alpha \in \mathbb{Z}_3$:

α	α^2
0	0
1	1
2	1

Ahora es fácil ver que:

$$(1+2) * (1,1) = 0 * (1,1) = (0,0)$$
$$\neq$$
$$1 * (1,1) + 2(1,1) = (1,1) + (2,1) = (0,2)$$

Luego $(\mathbb{Z}_3^2, +, *)$ no es un espacio vectorial.

4.4 $S = \{ (1,2,1), (2,1,2) \} \subset \mathbb{Z}_3^2$

Como $1 \cdot (1,2,1) + 1 (2,1,2) = (0,0,0)$ y $1 \neq 0$ entonces S es linealmente dependiente

4.5 $S = \{ u, v, w \}$ linealmente independiente

$T = \{ u+v+w, v+3w, 2v+w \}$ linealmente independiente?

Tomamos una combinación lineal de T nula:

$$\alpha(u+v+w) + \beta(v+3w) + \gamma(2v+w) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\alpha u + (\alpha+\beta+2\gamma) v + (\alpha+3\beta+\gamma) w = \vec{0}$$

Como S es libre entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -5\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Así que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y T es libre.

4.8 $\mathbb{Z}_5^4$

a) $\{(1,0,0,2),(3,0,0,1),(0,1,1,0)\}=S$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ S es linealmente dependiente

b) $\{(1,0,0),(0,2,1),(0,0,1)\}=T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow$$ $\underbrace{T \text{ linealmente independiente}}$

4.9 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+2y+z=0\}$

$T = \langle (1,1,1), (1,-1,1) \rangle$

(A) $S \leq \mathbb{R}^3$ porque se verifican (1) y (2):

(1) $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in S \Rightarrow \begin{cases} x_1+2y_1+z_1=0 & (\mathcal{E}) \\ x_2+2y_2+z_2=0 & (\mathcal{E}') \end{cases}$

Sumando $(\mathcal{E})$ y $(\mathcal{E}')$ tenemos:

$$x_1+x_2+2(y_1+y_2)+z_1+z_2=0, \text{ luego}$$

$$(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in S$$

(2) $(x,y,z) \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x+2y+z=0$ $(\mathcal{E}'')$ y multiplicando $(\mathcal{E}'')$ por α: $\alpha x+2\alpha y+\alpha z=0$, luego

$$(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S$$

(B) Dimensión y base de S.

El sistema que define al subespacio S es $(1\ 2\ 1\ |\ 0) = A_S$, luego $\dim S = 3 - rg\, A_S = 3-1=2$ y una base de S es:

$$\beta_S = \{(1,0,-1), (0,1,-2)\}$$

© Base de T, dimensión y ecuaciones

Como T viene generado por dos vectores linealmente independientes serán base:

$$\beta_T = \{(1,1,1), (1,-1,1)\}$$

$$\dim T = 2$$

Calculemos sus ecuaciones respecto de la base canónica. Si $(x,y,z) \in T$ entonces:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{F_3 - F_2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} x & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x-z) = 0 \Rightarrow x - z = 0$$

$$T = \{(x,y,z) : \; x - z = 0\}$$

Ⓓ $S \cap T = T \cap S = \{ (x,y,z) \text{ tq } x - z = x + 2y + z = 0\}$

$$A_{S\cap T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\dim S \cap T = 3 - rg\, A_{S\cap T} = 3 - 2 = 1$$

$$\beta_{S\cap T} = \{(1,-1,1)\}$$

4.10. $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ l. indep.

$T = \{ v_1, v_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \}$ es l. indep. si $\alpha_3 \neq 0$. ?

Tomamos una combinación lineal de T igual a $\vec{0}$:

$$\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3 \alpha_1) \vec{v}_1 + (\lambda_2 + \alpha_2 \lambda_3) \vec{v}_2 + \lambda_3 \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Como S es linealmente independiente, se tiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 \alpha_1 = 0 \\ \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 \alpha_3 = 0 \end{cases} \underset{\alpha_3 \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Así que T es linealmente independiente.

4.11

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x = y = 0\}$$

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+y+z = 0\}$$

a) **Base de S**

S viene definido por el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$, con $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\text{rg } A_S = 2$ se tiene que $\dim(S) = 3 - \text{rg}(A_S) = 3-2 = 1$

Como base daremos un vector no nulo de S, por ejemplo:

$$\beta_S = \{(0,0,1)\}$$

Base de T

El sistema que define T es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, con $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, luego:

$$\dim T = 3 - \text{rg } A_T = 3 - 1 = 2$$

y la base de T: $\beta_T = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

b) $S \cap T = \{(x,y,z) : x = y = 0, \ x+y+z = 0\}$

$$A_{S\cap T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces: } \dim S\cap T = 3 - \text{rg } A_{S\cap T} = 3 - 3 = 0$$

Así que:

$$S \cap T = \{(0,0,0)\} \text{ y } \beta_{S\cap T} = \phi.$$

E) $S+T = \langle S \cup T \rangle = \langle \beta_S \cup \beta_T \rangle$

$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2+2-1 = 3$,

luego $S+T = \mathbb{R}^3$

$\beta_{S+T} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$\boxed{S+T}$

$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 3$, luego

$S+T = \mathbb{R}^3$ y $\beta_{S+T} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

c) Sí porque $S \cap T = \{\vec{0}\}$

4.13 $S_1 = \{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1)\}$
$S_2 = \{(1,1,0,1), (1,2,-1,-2), (3,5,-2,5)\}$

a) $\langle S_1 \rangle = \langle \underbrace{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1)} \rangle$

estos dos vectores generan $\langle S_1 \rangle$ y son linealmente independientes, luego son una base de $\langle S_1 \rangle$

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta_{\langle S_1 \rangle} = \{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1)\} \\ \\ \dim \langle S_1 \rangle = 2 \end{array}}$$

$\langle S_2 \rangle$ Veamos si los vectores de S_2 son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3-3F_1}{\overset{F_2-F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_3-2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Así que $\dim \langle S_2 \rangle = 3$ y

$$\beta_{\langle S_2 \rangle} = \{(1,1,0,1), (0,1,-1,-3), (0,0,0,1)\}$$

b) $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle = \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,-1,-1,1), (1,1,0,1), (0,1,-1,-3), (0,0,0,1) \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{F_3+2F_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{F_3-4F_4+6F_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rg $A = 4 \Rightarrow \dim \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle = 4 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle = \mathbb{R}^4 \\ \mathcal{B}_{\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,1)\} \end{array}}$$

De la fórmula de Grassman obtenemos:

$$\dim \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle = \dim \langle S_1\rangle + \dim \langle S_2\rangle - \dim \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle$$
$$= 1$$

Buscamos un vector de la intersección $v=(x,y,z,t) \in \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$

Por estar en $\langle S_2\rangle$ se verifica:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -z + x - y = 0 \quad (\varepsilon)$$

Y por pertenecer a $\langle S_1\rangle$:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,-1,-1,1) = \quad (\varepsilon')$$
$$= (\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta)$$

De (ε) y (ε') obtenemos:

$$\overbrace{(\alpha+\beta)}^{x} - \overbrace{(\alpha-\beta)}^{y} - \overbrace{(\alpha-\beta)}^{z} = -\alpha+3\beta=0 \Rightarrow 3\beta=\alpha$$

Luego tomando $\alpha=3, \beta=1$ elegimos $v=(4,2,2,4)$

$$\mathcal{B}_{\langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle} = \{(2,1,1,2)\}$$

Finalmente damos las ecuaciones de $\langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$. Si $(x,y,z,t) \in \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$ se tiene:

$$(x,y,z,t) = \alpha\,(2,-1,-1,2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ t = 2\alpha \end{cases}$$

Como necesitamos $\dim \mathbb{R}^4 - \dim \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle = 4-1 = 3$ ecuaciones, obtenemos:

$$\langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle = \{(x,y,z,t) : y-z = 2y-x = x-t = 0\}$$

↳ ec. l. indep pq $\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3$

c) $(4,0,-2,1) \notin \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$ porque no verifica las ecuaciones de la intersección

d) $(4,0,-2,1) \in \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle$ porque $\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle = \mathbb{R}^4$ y ya están expresadas sus coordenadas respecto a la base elegida en (b), que era la canónica.

4.14 $S=\{(x,y,z,t): x=y=z=t\}$

$T=\{(x,y,z,t): x=2y\ ,\ 2z=t\}$

a) $\boxed{S}$

$S=\{(x,y,z,t): x-y=0,\ x-z=0,\ x-t=0\}$

$$A_S=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{E})$$

$\dim S = 4 - rg\ A_S = 4-3=1$

$\beta_S=\{(1,1,1,1)\}$

$\boxed{T}$ $T=\{(x,y,z,t): x-2y=2z-t=0\}$

$$A_T=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \dim T = 4-2=2$

$\beta_T=\{(2,1,0,0),(0,0,1,2)\}$

c) $S\cap T=\{(x,y,z,t): x-y=x-z=x-t=x-2y=2z-t=0\}$

$$A_{S\cap T} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

> la 2ª y 3ª ecuación están ya transformadas como en $(\mathcal{E})$

$$\underset{\sim}{F_4 - F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_5 + F_4}{\overset{F_4 + F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \dim S\cap T = 4 - rg\, A_{S\cap T} = 4-4=0$

$\Rightarrow \beta_{S\cap T} = \phi$

$S\cap T = \{\vec{0}\} = \{(x,y,z,t) : x=y=z=t=0\}$

$\boxed{S+T}$ $\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S\cap T) = 2+1-0=3$

y necesitaremos $\dim \mathbb{R}^4 - \dim(S+T) = 1$ ecuación para determinarlo.

Como $S+T = \langle S\cup T\rangle = \langle \beta_S \cup \beta_T\rangle =$

$\langle (1,1,1,1),(2,1,0,0),(0,0,1,2)\rangle$ y $\dim S+T=3$

entonces:

$\beta_{S+T} = \{(1,1,1,1),(2,1,0,0),(0,0,1,2)\}$

Ahora buscamos la ecuación que define $S+T$. Sea

$(x,y,z,t) \in S+T \Rightarrow (x,y,z,t) = \alpha(1,1,1,1)+\beta(2,1,0,0)+\gamma(0,0,1,2)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + \gamma \\ t = \alpha + 2\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t - 2z = -\alpha \\ x - 2y = -\alpha \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow x - 2y - t + 2z = 0$. Así que:

$$S+T = \{(x,y,z,t) : x - 2y + 2z - t = 0\}$$

4.15 a)

$$M_1 = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica} \}$$

Veamos si $M_1 \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

* Si $A, B \in M_1 \overset{?\ \text{sí}}{\Longrightarrow} A+B \in M_1$

$A, B \in M_1 \Rightarrow A^t = A$ y $B^t = B$

$(A+B)^t = A^t + B^t = A+B \Rightarrow \underline{A+B \in M_1}$

* Si $A \in M_1$ y $\lambda \in \mathbb{R} \overset{?\ \text{sí}}{\Longrightarrow} \lambda A \in M_1$

$A \in M_1 \Rightarrow A^t = A$

$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \Rightarrow \underline{\lambda A \in M_1}$

Buscamos ahora las ecuaciones de M_1 respecto de β:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4 \in M_1 \Rightarrow$

$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c.$

Así que $\underline{M_1 = \{ (a,b,c,d)_\beta : b - c = 0 \}}$

b) $M_2 = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ tq } A^2 = A \}$

M_2 no es un subespacio vectorial ya que

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2$, sin embargo

$5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \notin M_2$ porque $(5A)^2 = 25A^2 = 25A \neq 5A$.

c) $M_3 = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A = 0 \}$

M_3 no es un subespacio vectorial. En efecto, sean

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Está claro que

$A \in M_3$ y $B \in M_3$, sin embargo:

$$A+B = I_2 \notin M_3.$$

d) $M_4 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\}$

$M_4 \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ya que:

1) Si $A, B \in M_4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in M_4$

2) Si $A \in M_4$ y $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda a \end{pmatrix} \in M_4$

Buscamos ahora las ecuaciones de M_4: sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4 \in M_4 \Rightarrow a = b = c = 0$. Así que:

$$M_4 = \{ (a,b,c,d)_\beta : a = b = c = 0 \}$$

4.16

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x_1 + x_2 = 0\}$

W sí es un subespacio vectorial porque:

1) Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in W$ y $w = (w_1, w_2, w_3) \in W$ entonces $u_1 + u_2 = w_1 + w_2 = 0$ y $u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = 0$, luego

$$u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3) \in W.$$

2) Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in W \Rightarrow u_1 + u_2 = 0$ y

$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \in W$ porque multiplicando la ecuación anterior por α se tiene $\alpha u_1 + \alpha u_2 = 0$.

4.16 b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$

W no es un subespacio vectorial porque $(1,0,0) \in W$ y $2\cdot(1,0,0) = (2,0,0) \notin W$.

4.16 e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tq } x_1 + x_2^2 = 0\}$ no es un subespacio vectorial. En efecto $u = (-4, 2, 1) \in W$, pero $2u = (-8, 4, 2) \notin W$.

4.17.b $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \}$ no es un subespacio vectorial porque $u = (1,0,0) \in W$ pero $3\vec{u} = (3,0,0) \notin W$

4.17 e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3$ tq $x_1 + x_2^2 = 0\}$ no es un subespacio vectorial porque $u = (4, 1, 0) \in W$ pero $3u = (2, 3, 0) \notin W$ porque $2 + 3^2 = 1 \neq 0$.

4.17 f $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : x_1(x_1^2+2) = 0 \}$

Este tiene truco porque esta ecuación no lineal es en realidad lineal. Veamos

$$x_1(x_1^2+2)=0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1^2+2=0 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ó } x_1 = 2 \end{cases}$$

Así que $W = \mathbb{Z}_3^3$ y sí es un subespacio vectorial.

4.18

$W_1 \leq V \quad (\varepsilon)$
$W_2 \leq V \quad (\varepsilon')$

$W_1 \cap W_2 \leq V$

Demostración

(1.) Sean $u, v \in W_1 \cap W_2$ entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} a)\ u, v \in W_1 \overset{(\varepsilon)}{\Longrightarrow} & u+v \in W_1 \\ b)\ u, v \in W_2 \overset{(\varepsilon')}{\Longrightarrow} & u+v \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow u+v \in W_1 \cap W_2$$

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in W_1 \cap W_2$, entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} a)\ u \in W_1 \overset{(\varepsilon)}{\Longrightarrow} & \alpha u \in W_1 \\ b)\ u \in W_2 \overset{(\varepsilon')}{\Longrightarrow} & \alpha u \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha u \in W_1 \cap W_2$$

Así que (1) + (2) $\Rightarrow W_1 \cap W_2 \leq V$

■

$W_1 \cup W_2$ no tiene por qué ser subespacio vectorial de V

Ejemplo

$W_1 = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

Es fácil ver que $W_1, W_2 \leq V = \mathbb{R}^2$. Sin embargo:

$W_1 \cup W_2 = \{(x,y) \text{ tq } x=0 \text{ ó } y=0\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ porque $(0,1) \in W_1 \cup W_2$ y $(1,0) \in W_1 \cup W_2$ pero $(0,1)+(1,0) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$.

4.19 y 4.20

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2-F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{-1\cdot F_2}{\overset{F_3+F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S_a = \{(1,0,0,1), (1,0,0,1), (0,1,1,0)\}$ es linealmente dependiente.

Extraemos un subconjunto linealmente independiente.

$I_a = \{(1,1,1,1), (1,0,0,1)\}$

b) $S_b = \{(1,0,0,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3+F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que $rg\, A = 3$ y S_b es libre

c) $S_c = \{(1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1), (2,0,0,0)\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_4-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_4+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 3$$ y S_c es linealmente dependiente

Un subconjunto libre de S_c sería:

$$I_c = \{(2,0,0,0), (1,1,1,1), (1,0,0,1)\}$$

4.21 No porque ninguno tiene 4 vectores linealmente independientes.

4.22

a) $\langle S_a \rangle = \langle (1,1,1,1), (0,1,1,0) \rangle$

Sea $v = (x,y,z,t) \in \langle S_a \rangle \Rightarrow (x,y,z,t) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(0,1,1,0)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + \beta \\ t = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$$

(necesitamos $4 - \dim\langle S_a \rangle = 4 - 2 = 2$ ecuaciones)

$$\langle S_a \rangle = \{(x,y,z,t) : x - t = y - z = 0\}$$

b) $\langle S_b \rangle = \langle (1,1,1,1), (0,1,1,1), (1,0,0,1) \rangle$

Si $v = (x,y,z,t) \in \langle S_b \rangle \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$= 0 - z - x + x + y = y - z = 0$

$$S_b = \{(x,y,z,t) \text{ tq } y - z = 0\}$$

c) $\langle S_c \rangle = \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,1,1) \rangle$

Si $v=(x,y,z,t)\in\langle S_c\rangle \Rightarrow (x,y,z,t)=\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(0,1,1,1) \Rightarrow x=\alpha,\ y=\gamma,\ z=\gamma,\ t=\beta+\gamma \Rightarrow$

$$\langle S_c\rangle=\{(x,y,z,t) \text{ tq } z-y=0\}$$

4.23 $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)_\beta : x_1 + x_2 - x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ $(\mathcal{E}')$

$\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$\beta' = \{\underbrace{u_1 - u_2}_{v_1}, \underbrace{u_2 - u_3}_{v_2}, \underbrace{u_3 - u_4}_{v_3}, \underbrace{u_4}_{v_4}\}$

a) $M_{\beta\beta'}$ y $M_{\beta'\beta}$

Observa que:

$u_1 - u_2 = (1, -1, 0, 0)_\beta$, $u_2 - u_3 = (0, 1, -1, 0)_\beta$,

$u_3 - u_4 = (0, 0, 1, -1)_\beta$, $u_4 = (0, 0, 0, 1)_\beta$,

luego:

$$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos $M_{\beta'\beta}$, para ello calculemos las coordenadas de los vectores de β en β':

$u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = (1,1,1,1)_{\beta'}$; $u_3 = v_3 + v_4 = (0,0,1,1)_{\beta'}$;

$u_2 = v_2 + v_3 + v_4 = (0,1,1,1)_{\beta'}$; $u_4 = v_4 = (0,0,0,1)_{\beta'}$;

por lo tanto:

$$M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.23 b) Sea $\vec{u}=(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta'} \in W$, empezaremos buscando las coordenadas de este vector en β:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\beta\beta'}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}_{\beta} = \vec{u}$$

Como $\vec{u} \in W$ entonces: $x_1 + (x_2 - x_1) - (x_3 - x_2) = 0$ y

$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) = 0$.

Finalmente:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta'} : 2x_2 - x_3 = x_4 = 0\} \quad (\mathcal{E})$$

4.23 c) $v = u_1 - u_2 = (1,-1,0,0)_{\beta} = (1,0,0,0)_{\beta'}$.

Como el vector $(1,0,0,0)_{\beta'}$ satisface las ecuaciones $(\mathcal{E})$ se tiene que $v \in W$.

4.23 d) Como $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)_{\beta} : x_1+x_2-x_3 = x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$, el sistema que define a W es:

$$A_W = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$ cuyo rango es 2. Luego:

$$\dim W = \dim \mathbb{R}^4 - rg\, A_W = 4-2=2.$$

Así que para dar una base basta con dar 2 vectores linealmente independientes de W:

$$\beta_W = \{\underbrace{(1,1,2,-4)_{\beta}, (0,1,1,-2)_{\beta}}_{\text{observa que estos vectores satisfacen la ecuación } (\mathcal{E}')}\}$$

$$\beta_W' = \{\underbrace{(0,1,2,0)_{\beta'}, (1,0,0,0)_{\beta'}}_{\text{estos dos vectores satisfacen el sistema } (\mathcal{E})}\}$$

4.23 e) Para decidir si son linealmente dependientes hay que expresarlos en la misma base

$$M_{\beta\beta'}\begin{pmatrix}3\\6\\3\\0\end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\3\\0\end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\-3\end{pmatrix}_{\beta}$$

Luego $\{(1,2,1,0)_{\beta}, (3,6,3,0)_{\beta'}\} = \{(1,2,1,0)_{\beta}, (3,3,-3,-3)_{\beta}\}$

y los vectores son linealmente independientes.

4.23 f) $W' = \langle (1,1,1,1)_\beta , (1,1,1,1)_{\beta'} \rangle$

Pasamos los dos vectores a la misma base, por ejemplo β:

$$M_{\beta\beta'} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta}$$

Así que:

$$W' = \langle (1,1,1,1)_\beta , (1,0,0,0)_\beta \rangle \quad y \quad \dim W = 2$$

Si $(x,y,z,t)_\beta \in W' \Rightarrow (x,y,z,t)_\beta = a(1,1,1,1)_\beta + b(1,0,0,0)_\beta$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a+b \\ y = a \\ z = a \\ t = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z - y = 0 \\ t - y = 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$W' = \{ (x,y,z,t)_\beta : \underbrace{z-y = t-y = 0}_{\text{sólo se necesitan } \dim \mathbb{R}^4 - \dim W' = 4-2 = 2 \text{ ecs.}} \}$$

Ahora calculamos las ecuaciones de W' respecto de β'.

Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta'} \in W'$, primero pasamos estas coordenadas a β:

$$M_{\beta\beta'}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}_{\beta} \in W' \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} x_3 - x_2 - (x_2 - x_1) = 0 \\ x_4 - x_3 - (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Así que:

$$\underbrace{W' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta'} : x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}}$$

4.23 g) $W \cap W' = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta'} : 2x_2 - x_3 = x_4 = x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$

El sistema que define a $W \cap W'$ se representa matricialmente por:

$$A_{W \cap W'} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 + 2F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así que $\dim (W \cap W') = \dim \mathbb{R}^4 - rg\left(A_{W \cap W'}\right) = 4 - 4 = 0$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} W \cap W' = \{\vec{0}\} \qquad \beta_{W \cap W'} = \phi \\ \quad \shortparallel \\ \{ (x_1, x_2, x_3, x_4)_{\beta'} : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \} \\ \dim W \cap W' = 0 \end{array}}$$

4.23 h **$W+W'$**

$\dim W+W' = \dim W + \dim W' - \dim W \cap W' = 2+2-0 = 4$

Así que $W+W' = \mathbb{R}^4$ y no se pueden dar ecuaciones.

$$\beta_{W+W'} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

4.23 i) Sí, la suma es directa, porque $W \cap W' = \{\vec{0}\}$

4.24 $W_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x_1 = x_2 = 0 \}$

$W_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

a)

$$\dim W_1 = 3 - rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1$$

$$\beta_{W_1} = \{ (0,0,1) \}$$

$$\dim W_2 = 3 - rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = 3-1 = 2$$

$$\beta_{W_2} = \{ (1,0,-1), (0,1,-1) \}$$

b) $W_1 \cap W_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = x_1 = x_2 = 0 \}$

$$A_{W_1 \cap W_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\dim (W_1 \cap W_2) = 3 - rg(A_{W_1 \cap W_2}) = 3-3 = 0$$

Así que: $\beta_{W_1 \cap W_2} = \emptyset$

$W_1 \cap W_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3 = 0 \} = \{ \vec{0} \}$

$\Rightarrow$ $W_1 + W_2$ es suma directa (apartado c)

$W_1 + W_2$

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) = 1+2-0 = 3$$

Así que: $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ $\quad \beta_{W_1+W_2} = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

4.25

$(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Demostrar que $\beta' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base, siendo:

$u_1 = v_1 \qquad\qquad = (1,0,0,\dots 0)_\beta$

$u_2 = v_1 + v_2 \qquad\qquad = (1,1,0,\dots 0)_\beta$

$u_3 = v_1 + v_2 + v_3 \qquad\qquad = (1,1,1,\dots 0)_\beta$

$\vdots$

$u_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = (1,1,1,\dots 1)_\beta$

Los vectores de β' son linealmente independientes porque:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \\ \vdots \\ \to v_n \end{array} = n$$

Como $\dim V = n$, los n vectores linealmente independientes de β' son una base de V.

4.26

$$\beta_1 = \{ \overset{u_1}{x},\ \overset{u_2}{x^2+1},\ \overset{u_3}{2x^4+x^3},\ \overset{u_4}{x^3-x^2+x},\ \overset{u_5}{x^2+x} \}$$

$$\beta_2 = \{ \underset{v_1}{2x^4+1},\ \underset{v_2}{x^3-1},\ \underset{v_3}{x^3+2x},\ \underset{v_4}{x^2},\ \underset{v_5}{x^3-x^2} \}$$

a) $M_{\beta_1 \beta_2}$

$$v_1 = 2x^4+1 = u_3 + u_2 - u_4 - 2u_5 + 3u_1 = (3, 1, 1, -1, -2)_{\beta_1}$$

$$v_2 = x^3-1 = -u_2 + u_4 + 2u_5 - 3u_1 = (-3, -1, 0, 1, 2)_{\beta_1}$$

$$v_3 = x^3+2x = u_4 + u_5 = (0, 0, 0, 1, 1)_{\beta_1}$$

$$v_4 = x^2 = u_5 - u_1 = (-1, 0, 0, 0, 1)_{\beta_1}$$

$$v_5 = x^3 - x^2 = u_4 - u_1 = (-1, 0, 0, 1, 0)_{\beta_1}$$

$$M_{\beta_1 \beta_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$$2p(x) = v_1 - v_2 + v_3 + 2v_5 + 4v_4 \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{+1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3 + 2v_4 + v_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right)_{\beta_2}$$

$$M_{\beta_1, \beta_2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\beta_1} \longrightarrow \text{coordenadas de } p(x) \text{ en } \beta_1$$

4.28

$$\beta_A = \{ \underset{(1,1,1)}{v_1}, \underset{(0,1,1)}{v_2}, \underset{(1,0,1)}{v_3} \}$$

$$\beta_C = \{ \underset{(1,1,0)}{w_1}, \underset{(0,1,1)}{w_2}, \underset{(0,0,1)}{w_3} \} \qquad B = \{ (2,2,1)_{\beta_C} \}$$

a) $M_{\beta_A \beta_C}$ Para calcular esta matriz calculamos las coordenadas de los vectores de β_C en β_A

$$w_1 = 2(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) = 2v_1 - v_2 - v_3 = (2,-1,-1)_{\beta_A}$$

$$w_2 = v_2 = (0,1,0)_{\beta_A}$$

$$w_3 = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1,1,1)_{\beta_A}$$

Así que:

$$M_{\beta_A \beta_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$M_{\beta_C \beta_A} = \left(M_{\beta_A \beta_C} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $B = \{ (2,2,1)_{\beta_C} \}$

$$(2,2,1)_{\beta_C} = \left[M_{\beta_A \beta_C} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta_C} \right]^t = (3,1,-1)_{\beta_A}$$

d) $\langle B \rangle$

Si $(x,y,z)_{\beta_A} \in \langle B \rangle \Rightarrow$

$$(x,y,z)_{\beta_A} = \alpha\,(3,1,-1)_{\beta_A} = (3\alpha, \alpha, -\alpha)_{\beta_A}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Así que:

$$\langle B \rangle = \{ (x,y,z)_{\beta_A} : x - 3y = x + 3z = 0 \}$$