Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

<u>**Solución:**</u>

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\ f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3, 4), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, 4, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto)*.

<u>**Solución:**</u>

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1} M_{\beta_2\beta_1}(f) M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -2 & 28 \\ 4 & -12 & -4 & 40 \end{pmatrix}$$

3.2.3.4.5.7.8

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2\beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Sabemos que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$), así que Im $f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-3)(x-10)^3$, además $\dim V_{10} = 3$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos)*.

Solución:

El tamaño de la matriz es 4×4.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 3 y 10 (con multiplicidades respectivas 1 y 3) y además:

- $\dim V_3 = m(3) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_{10} = m(10) = 3$.

4. Calcula $(2 + 2i)^8$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{8}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(2 + 2i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 4096(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 4096$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto)*.

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

---

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\ f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(1, 4), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, 4, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1}M_{\beta_2\beta_1}(f)M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.3.4.5.7.8

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2\beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Sabemos que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$), así que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-1)(x-8)^1$, además $\dim V_8 = 1$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos)*.

Solución:

El tamaño de la matriz es 2×2.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 1 y 8 (con multiplicidades respectivas 1 y 1) y además:

- $\dim V_1 = m(1) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_8 = m(8) = 1$.

4. Calcula $(2 + 2i)^8$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{8}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(2 + 2i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 4096(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 4096$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto)*.

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 0, x - y = 0\}$ *(1 punto).*

Solución:

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - 2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(2, 5), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (4, 5, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2 \beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f)$. *(1 punto).*

Solución:

Usando la relación $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2 \beta_1} M_{\beta_2 \beta_1}(f) M_{\beta_2 \beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 11 \\ 5 & -10 & -10 & 35 \end{pmatrix}$$

2.3.4.5.1.11.7

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2\beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Sabemos que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$), así que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-2)(x-9)^2$, además $\dim V_9 = 2$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos)*.

Solución:

El tamaño de la matriz es 3×3.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 2 y 9 (con multiplicidades respectivas 1 y 2) y además:

- $\dim V_2 = m(2) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_9 = m(9) = 2$.

4. Calcula $(3 + 3i)^8$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{18}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(3 + 3i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 104976(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 104976$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto)*.

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

---

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

<u>**Solución:**</u>

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \operatorname{Im} f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3, 1), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0), (4, 0, 1, 0), (5, 1, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto)*.

<u>**Solución:**</u>

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1} M_{\beta_2\beta_1}(f) M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -8 & -2 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4.5.1.2.13.9

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2 \beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos)*.

Solución:

Sabemos que $\dim \operatorname{Im} f = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$), así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-3)(x-10)^3$, además $\dim V_{10} = 3$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos)*.

Solución:

El tamaño de la matriz es 4×4.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 3 y 10 (con multiplicidades respectivas 1 y 3) y además:

- $\dim V_3 = m(3) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_{10} = m(10) = 3$.

4. Calcula $(4 + 4i)^8$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{32}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(4+4i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 1048576(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 1048576$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto)*.

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\ f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(4, 2), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (4, 1, 0, 0), (5, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1} M_{\beta_2\beta_1}(f) M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -15 & -15 & 32 \\ 2 & -8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

4.5.1.2.3.17.10

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos).*

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2 \beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos).*

Solución:

Sabemos que dim Im f = 4 − dim Ker f = 4 − 2 = 2 (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que dim Ker f = 2), así que Im f = $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-4)(x-11)^4$, además $\dim V_{11} = 4$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos).*

Solución:

El tamaño de la matriz es 5 × 5.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 4 y 11 (con multiplicidades respectivas 1 y 4) y además:

- $\dim V_4 = m(4) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_{11} = m(11) = 4$.

4. Calcula $(5 + 5i)^8$ *(0,5 puntos).*

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{50}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(5+5i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 6250000(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 6250000$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto).*

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

---

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

Solución:

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - 2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(5, 3), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (5, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto)*.

Solución:

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1} M_{\beta_2\beta_1}(f) M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -24 & 1 & 69 \\ 3 & -15 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

5.1.2.3.4.19.5

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos).*

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2 \beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos).*

Solución:

Sabemos que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$), así que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-5)(x-12)^5$, además $\dim V_{12} = 5$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos).*

Solución:

El tamaño de la matriz es 6×6.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 5 y 12 (con multiplicidades respectivas 1 y 5) y además:

- $\dim V_5 = m(5) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_{12} = m(12) = 5$.

4. Calcula $(1 + 1i)^8$ *(0,5 puntos).*

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{2}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(1 + 1i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 16(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 16$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto).*

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de febrero de 2011, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

---

1. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

<u>**Solución:**</u>

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \operatorname{Im} f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

2. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(1, 4), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (2, 4, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2 \beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f)$. *(1 punto)*.

<u>**Solución:**</u>

Usando la relación $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2 \beta_1} M_{\beta_2 \beta_1}(f) M_{\beta_2 \beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

1.3.2.4.5.7.4

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_c^4 *(0,5 puntos).*

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2\beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(0,5 puntos).*

Solución:

Sabemos que dim Im $f = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que dim Ker $f = 2$), así que Im $f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-1)(x-8)^1$, además $\dim V_8 = 1$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(0,5 puntos).*

Solución:

El tamaño de la matriz es 2×2.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 1 y 8 (con multiplicidades respectivas 1 y 1) y además:

- $\dim V_1 = m(1) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_8 = m(8) = 1$.

4. Calcula $(3 + 3i)^8$ *(0,5 puntos).*

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{18}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(3 + 3i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 104976(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 104976$.

5. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto).*

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$