Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
19 de enero de 2008, 9h-12h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):
Preguntas seleccionadas tanto obligatorias como opcionales (no rellenes la puntuación):

P. seleccionadas											
Puntuación											

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
4. Rellena la tabla con la modalidad de examen que has elegido y las preguntas seleccionadas. Comprueba que suman 10 puntos. En caso contrario no se te corregirán las que hagan sobrepasar el valor de 10.

Tipo de examen	**Preguntas que tienes que responder**	
Primer parcial	OBLIGATORIAS	6,9,10,12
	OPCIONALES	elige preguntas entre la 1,2,3,4,5,7 y 8 de forma que sumen 2 puntos
Final	OBLIGATORIAS	9,11,13,14
	OPCIONALES	elige entre responder a la 12 o a la 1, la 6 y la 4

1. Considera el conjunto de vectores $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (5,3,1)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(0.5 punto)*.

Solución:

Son linealmente dependientes porque $\quad 5v_1 + 6v_2 = (0,0,0)$.

2. Calcula $(2+2i)^8$ *(1 punto)*.

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{8}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(2+2i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 4096(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 4096$.

3. Demuestra, usando inducción, que $f^{(n)}(x) = \frac{8^n(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+8x)^n}$ para alguna función $f(x)$ que debes determinar. Para calcular la función candidata escribe quien es $f'(x)$ de acuerdo a la fórmula anterior y calcula la primitiva *(1.5 puntos)*.

Solución:

Según la fórmula anterior $f'(x) = \frac{8}{1+8x}$, por lo que $f(x) = \log(1+8x)$. Para $n = 1$ la fórmula del enunciado es evidente que es cierta, supongamos ahora que la fórmula es cierta para un número natural n y demostrémoslo para $n+1$.

Partiremos de la igualdad $f^{(n)}(x) = \frac{8^n(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+8x)^n}$ de la que deducimos

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-8^n(-1)^{n+1}(n-1)!n8(1+8x)^{(n-1)}}{(1+8x)^{2n}}$$
$$= \frac{8^{n+1}(-1)^{n+2}n!}{(1+8x)^{n+1}},$$

lo que demuestra que la fórmula es cierta para $n+1$ y aplicando el principio de inducción para *b*) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = -16$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

c) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = 15$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

d) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = 8$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

Solución:

a) c es un punto de inflexión.
b) c es un máximo relativo.
c) c es un mínimo relativo.
d) c es un punto de inflexión.

6. Calcula $\int \frac{1}{1+81x^2}\,dx$ *(1 punto).*

Solución:

$\int \frac{1}{1+81x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(9x)^2}\,dx = \frac{1}{9}\arctan(9x)$

7. Plantea la descomposición en fracciones simples (sin calcular las constantes) de la fracción racional $F(x) = \frac{13x^3+81x+3}{(x^2+13)^3(x^2+81)^2(x+2)^3}$ *(1 punto).*

Solución:

$$F(x) = \frac{Ax+B}{x^2+13} + \frac{Cx+D}{(x^2+13)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+13)^3} + \frac{Gx+H}{x^2+81} + \frac{Hx+I}{(x^2+81)^2} + \frac{J}{x+2} + \frac{K}{(x+2)^2} + \frac{L}{(x+2)^3}$$

8. ¿Qué grado tiene el polinomio del denominador de la anterior fracción? *(0,5 puntos).*

Solución:

13.

9. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3,4),(1,0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1,0,0,0),(3,1,0,0),(2,0,1,0),(3,4,0,1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^{8l} \to \mathbb{R}^{5k}$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a los siguientes apartados:

a) Dar los valores de l y de k *(0.5 puntos).*

Solución:

$l = \frac{4}{8}$ y $k = \frac{2}{5}$ (se deben simplificar estas fracciones si es posible).

b) Estudia si el conjunto de vectores $\{(3,4)_{\beta_1}, (13,12)\}$ es linealmente dependiente o independiente *(0.5 puntos).*

Solución:

Expresamos los vectores en una base común: $(3,4)_{\beta_1} = 3(3,4)+4(1,0) = (13,12)$. Así que: $\{(13,12),(13,12)\}$ y los vectores son linealmente dependientes.

c) Calcula la matriz $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$ *(0.5 puntos).*

Solución:

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1}M_{\beta_2\beta_1}(f)M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -2 & 28 \\ 4 & -12 & -4 & 40 \end{pmatrix}$$

d) Calcula las ecuaciones y una base de Ker f respecto de la base β_2 *(0.5 puntos).*

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2\beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que $\dim \operatorname{Ker} f = 4-2 = 2$ y una base de Ker f es $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(0, 1, 1, -1)_{\beta_2}, (1, 0, -2, 1)_{\beta_2}\}$

e) Calcula las ecuaciones y una base de Im f respecto de la base β_c^2 *(0.5 puntos).*

Solución:

Sabemos que $\dim \operatorname{Im} f = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$, así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, no podemos dar ecuaciones y una baser sería por ejemplo la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

10. Estudia si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sea se pide calcular la matriz diagonal y la matriz de paso P *(2.5 puntos).*

Solución:

El polinomio característico de esta matriz es $p_A(x) = |A - xI_3| = -(x-3)^2(x-4)$, por lo que $\sigma_A(x) = \{3, 4\}$, $m(3) = 2$ y $m(4) = 1$ (los cálculos hay que hacerlos detenidamente).

Lo siguiente que se hace es comprobar que $\dim V_3 = m(3) = 2$, por otro lado sin necesidad de comprobarlo sabemos que $\dim V_4 = m(4) = 1$. Estos dos hechos implican que la matriz A es diagonalizable.

Ahora se calculan bases de V_4 y de V_3:

$$\beta_3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}, \quad \beta_4 = \{(2, 1, 1)\}.$$

Finalmente tenemos

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2 + x + 8$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? *(0.5 puntos).*

Solución:

La matriz tiene tamaño 2×2 y no puede ser diagonalizable porque el polinomio característico tiene raíces complejas, en concreto $\frac{-1\pm\sqrt{-31}}{2}$.

12. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(3x)^2 - (3x)^4}{\log(1 + 2x^4) - 2x^4} \qquad \textit{(2 puntos).}$$

Solución:

Haremos desarrollos de orden 8:

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} + o(x^8) \\ \arctan(3x)^2 &= 9x^2 - \frac{729x^6}{3} + o(x^8) \\ \arctan^2(9x)^2 &= 9x^4 - \frac{486x^6}{3} + o(x^8) \end{aligned}$$

13. Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x, y) = (xe^{x+y}, x + y, e^y)$ y $g(x, y, z) = (x \cos(y + z), (x + y) \cos z)$, se pide:

b) Calcula $J(f \circ f)(0,0)$ si es posible. Si no lo fuera di por qué *(0.75 puntos)*.

c) ¿Es localmente invertible la función $g \circ f$ localmente en torno al punto $(0,0)$? En caso de que lo sea calcula $J(g \circ f)^{-1}(g \circ f(0,0))$ *(1 punto)*.

14. Calcula el volumen del sólido

$$\Omega = \{(x,y,z) : 25 < x^2 + y^2 + z^2 < 49, z < 0, x < 0\} \qquad \textit{(2.5 puntos)}$$

ITOP– Fundamentos Matemáticos
29 de junio de 2009, 9h-12h

Observaciones

1. Es necesario que pongas los razonamientos que conducen al resultado final de los ejercicios. Sin éstos no se pueden puntuar los ejercicios.
2. En la revisión de los exámenes sólo se atiende cuestiones relativas a la materia que se evalúa.
3. No se guardan parciales aprobados para septiembre.
4. Es necesario obtener, como mínimo, el 35 % de la puntuación de cada parte para pode hacer media.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.

Preguntas	1	2	3	Total
Puntuación				

En este examen consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$u_1 = (1,2,1,8),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0).$$

1. Sea la base $\beta' = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 9u_3\}$ y una base de $\mathbb{R}^4$, $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, de la que conocemos que $M_{\beta'\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da las coordenadas de los vectores de β_1 respecto de la base canónica β_c^4 *(1 punto)*.

Solución:

Usando la información que nos da la matriz asociada tenemos:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1+9)u_3 + u_4 + u_1 + u_2 = (13,13,2,8) \\ v_2 &= u_3 + u_4 + u_1 = (3,3,1,8) \\ v_3 &= u_3 + u_4 = (2,1,0,0) \\ v_4 &= (1,1,0,0) \end{aligned}$$

2. En este ejercicio usaremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y la base β' dada en el primer ejercicio. La aplicación f viene determinada por las siguientes relaciones $f(u_1) = (1,2,3)$, $f(u_2) = (1,1,1)$, $f(u_3) = (0,1,2)$, $f(u_4) = (0,0,0)$. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Calcula $M_{\beta'\beta_c^3}(f)$ *(0,5 puntos)*.
Solución:

$$M_{\beta'\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

b) Calcula las ecuaciones de Ker (f) respecto de la base β' *(1 punto)*.
Solución:
Usando la matriz del apartado anterior las ecuaciones son:

$$\{(x,y,z,t)_{\beta'} : z + t = x + 2z + 10t = 0\}.$$

c) Calcula una base de Ker f expresando las coordenadas de los vectores que aparezcan en ella respecto de la base β' *(0,5 puntos)*.

Solución:

$$\beta_{\text{Ker } f} = \{(-8, 0, -1, 1)_{\beta'}, (-8, 1, -1, 1)_{\beta'}\}.$$

3. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 8 & 1 & -8 \\ 8 & -8 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(2 puntos)*.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-9)^2(x-1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(9) = 2 = \dim V_9$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_9} = \{(1,1,0), (1,0,1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(1,1,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ITM– Fundamentos Matemáticos
17 de enero de 2009, 9.30h-12.30h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **primer parcial** entero: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan **una parte del primer parcial**: de la 6 a la 10, ambas inclusive. En este caso la puntuación de las preguntas es doble.
3. Preguntas que responden los que realizan el **examen final**: 4, 5, 7, 8 y 10.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial entero, parte del primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación											

En esta tanda de ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (0,0,1),\ v_4 = (1,1,1),\ v_5 = (1,2,1),$$
$$w_1 = (1,1),\ w_2 = (1,0),\ w_3 = (0,1).$$

Y definiremos los conjuntos

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\},\ \beta_2 = \{v_3, v_4, v_5\},\ \beta_3 = \{w_1, w_2\},$$

$$\beta_4 = \{w_1, w_3\},\ \beta_5 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta_6 = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}.$$

1. Calcula $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$ *(1 punto)*.
Solución:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+3-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Calcula las matrices de cambio de base $M_{\beta_6\beta_5}$ y $M_{\beta_5\beta_6}$ *(1 punto)*.
Solución:

- Como

$$\begin{aligned} u_3 &= (0,0,1,0)_{\beta_5} \\ u_4 &= (0,0,0,1)_{\beta_5} \\ u_1 &= (1,0,0,0)_{\beta_5} \\ u_2 + 2u_3 &= (0,1,2,0)_{\beta_5} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Como

$$\begin{aligned} u_1 &= (0,0,1,0)_{\beta_6} \\ u_2 &= (-2,0,0,1)_{\beta_6} \\ u_3 &= (1,0,0,0)_{\beta_6} \\ u_4 &= (0,1,0,0)_{\beta_6} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_6\beta_5} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Considera el conjunto de vectores $S = \{(2,1,2),(5,6,5)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(1 punto)*.

<u>Solución:</u>

Son linealmente dependientes porque $(2,1,2)+(5,6,5) = (0,0,0)$.

4. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta_6} : 2x+y+z=0, z+2y=0\}$ respecto de la base β_5 *(1 punto)*.

<u>Solución:</u>

Sea $(x,y,z,t)_{\beta_5} \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β_6. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas

$$(x,y,z,t)_{\beta_5} = [M_{\beta_6\beta_5}(x,y,z,t)^t_{\beta_5}]^t = (-2y+z,t,x,y)_{\beta_6} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:

$$W = \{(x,y,z,t)_{\beta_5} : -4y+x+2z+t=0, x+2t=0\}.$$

5. Sea $T = \{(x,y,z,t) : y+z=0, 2z=0\}$, calcula una base y la dimensión de T *(1 punto)*.

<u>Solución:</u>

Calculamos primero la dimensión de T: $\dim T = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg} A_T = 4-2 = 2$. Ahora una base de T es $\beta_T = \{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$.

6. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ ¿puede ser un epimorfismo? ¿Por qué? En caso afirmativo pon un ejemplo *(1 punto)*.

<u>Solución:</u>

Usamos la relación $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$. Si f fuera un epimorfismo entonces $\dim \mathrm{Im}\, f = 5$ y entonces $2 = \dim \mathrm{Ker}\, f + 5$, pero esto no es cierto porque $\dim \mathrm{Ker}\, f$ no puede ser negativa. Así que f no puede ser un epimorfismo.

7. ¿Para qué valores de la constante h la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es inyectiva? *(0.5 puntos)*.

<u>Solución:</u>

Para que la aplicación sea inyectiva se tiene que verificar que $0 = \dim \mathrm{Ker}\, f = 3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 3 - \mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$, es decir $\mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = 3$.

El determinante de la matriz $A = M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$ es $-1+h$, así que $\mathrm{rg} A = 3$, y por lo tanto f es inyectiva, si y sólo si $h \neq 1$.

8. Toma $h = 2$ en el ejercicio anterior y calcula una base de $\mathrm{Ker}\, f$ y otra de $\mathrm{Im}\, f$ *(1 punto)*.

<u>Solución:</u>

Usando la resolución del apartado anterior tenemos que $\mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = 3$ con lo cual $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$ y $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$. Por lo tanto la base de $\mathrm{Ker}\, f$ es $\beta_{\mathrm{Ker}\, f} = \emptyset$. Como base de $\mathrm{Im}\, f$ damos la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

9. Calcula una aproximación de $\log(1,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1 punto)*.

Solución:

Usamos la función $f(x) = \log x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ usando que $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2$:

$$p_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Así que la aproximación solicitada es

$$\log(1,0001) = f(1+10^{-3}) = 10^{-3} + \frac{10^{-6}}{2} + \frac{10^{-9}}{3} = 0{,}001000500333.$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (1, 1+10^{-3})$ y
$E = |R_4(1+10^{-3})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-3})^4\right| = |\frac{-6}{\xi^4}|\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{6}{\xi^4}\frac{10^{-12}}{4!} \leq \frac{6}{1}\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{10^{-12}}{4}$

10. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(1.5 puntos)*.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-2)^2(x-1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(2) = 2 = \dim V_2$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_2} = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(0,0,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ITM– Fundamentos Matemáticos
19 de junio de 2009, 9.30h-12.30h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **examen final** entero: 1, 2, 3.
2. Preguntas que responden los que realizan **sólo el primer parcial**: de la 1 a la 6, ambas inclusive.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	Total
Puntuación							

En esta tanda de ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (0,0,1),\ v_4 = (1,1,1),\ v_5 = (1,2,1),$$

$$w_1 = (1,1),\ w_2 = (1,0),\ w_3 = (0,1).$$

Y definiremos los conjuntos

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\},\ \beta_2 = \{v_3, v_4, v_5\},\ \beta_3 = \{w_1, w_2\},$$

$$\beta_4 = \{w_1, w_3\},\ \beta_5 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta_6 = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 14u_3\}.$$

1. Calcula una aproximación de $\log(1,001) + \operatorname{sen}(0,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1,5 puntos)*.

Solución:

Usamos la función $f(x) = \log x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ usando que $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2$:

$$p_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Así que la aproximación solicitada es

$$\log(1,0001) = f(1 + 10^{-3}) = 10^{-3} + \frac{10^{-6}}{2} + \frac{10^{-9}}{3} = 0{,}001000500333.$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (1, 1 + 10^{-3})$ y
$E = |R_4(1 + 10^{-3})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-3})^4\right| = |\frac{-6}{\xi^4}|\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{6}{\xi^4}\frac{10^{-12}}{4!} \leq \frac{6}{1}\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{10^{-12}}{4}$

2. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(2 puntos)*.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-9)^2(x-6)$. Como $m(6) = 1 = \dim V_6$ y se puede comprobar fácilmente que $m(9) = 2 = \dim V_9$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_9} = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ y $\beta_{V_6} = \{(0,0,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calcula las matrices de cambio de base $M_{\beta_6\beta_5}$ y $M_{\beta_5\beta_6}$ *(1,5 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

- Como
$$\begin{aligned} u_3 &= (0,0,1,0)_{\beta_5} \\ u_4 &= (0,0,0,1)_{\beta_5} \\ u_1 &= (1,0,0,0)_{\beta_5} \\ u_2+14u_3 &= (0,1,14,0)_{\beta_5} \end{aligned}$$
tenemos que:
$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Como
$$\begin{aligned} u_1 &= (0,0,1,0)_{\beta_6} \\ u_2 &= (-14,0,0,1)_{\beta_6} \\ u_3 &= (1,0,0,0)_{\beta_6} \\ u_4 &= (0,1,0,0)_{\beta_6} \end{aligned}$$
tenemos que:
$$M_{\beta_6\beta_5} = \begin{pmatrix} 0 & -14 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las siguientes preguntas únicamente las tienen que responder los que se presentan sólo al primer parcial

---

4. Calcula $\int \frac{1}{x^2+2x+14}dx$ *(1,5 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

$$\int \frac{1}{x^2+2x+14}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+14-1}dx = \frac{1}{13}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{13}})^2+1}dx$$
$$= \frac{\sqrt{13}}{13}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{13}}\right) = \frac{1}{\sqrt{13}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{13}}\right).$$

5. Considera el conjunto de vectores $S = \{(2,1,2),(5,6,5)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(1,5 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

Son linealmente dependientes porque $(2,1,2)+(5,6,5) = (0,0,0)$.

6. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta_6} : 14x+y+z=0, z+2y=0\}$ respecto de la base β_5 *(2 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

Sea $(x,y,z,t)_{\beta_5} \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β_6. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas
$$(x,y,z,t)_{\beta_5} = [M_{\beta_6\beta_5}(x,y,z,t)^t_{\beta_5}]^t = (-14y+z,t,x,y)_{\beta_6} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:
$$W = \{(x,y,z,t)_{\beta_5} : -196y+x+14z+t=0, x+2t=0\}.$$

ITA--Fundamentos Matemáticos

Examen final

6 de julio de 2009, de 9,30 a 12,30

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan **sólo** el **primer parcial** por tener el segundo aprobado: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan el **examen final entero**: 4 y 5.

Observaciones

1. Tienes que entregar esta hoja de examen.
2. Razona los cálculos que haces.
3. No se puede utilizar calculadora programable.
4. Es importante simplificar los cálculos parciales, sobre todo a la hora de calcular el polinomio característico.
5. Si copias tu puntuación será 0.

Nombre y apellidos del alumno:
Modalidad de examen elegido (final o sólo primer parcial):

Preguntas	1	2	3	4	5	**Total**
Puntuación						

En estos ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

y definiremos los conjuntos

$$\beta_5 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta_6 = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}, \beta_7 = \{u_3 + 7u_2, u_4, u_2, u_1\}.$$

1. Calcula las matrices de cambio de base $M_{\beta_6\beta_5}$ y $M_{\beta_5\beta_6}$ *(2 puntos)*.

2. Calcula las ecuaciones respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ del subespacio $S =< u_1, 2u_1 + 3u_2 >$. Da una base de S. *(2 puntos)*.

3. Calcula el área de la superficie de una esfera de radio $R = 2$ *(1 punto)*.

4. Calcula una aproximación de $\operatorname{sen}(0,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(2 puntos)*.

5. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(3 puntos)*.

ITA– Fundamentos Matemáticos
21 de enero de 2009, 9.30h-12.30h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **primer parcial** entero: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan **una parte del primer parcial**: de la 6 a la 10, ambas inclusive. En este caso la puntuación de las preguntas es doble.
3. Preguntas que responden los que realizan el **examen final**: 4, 5, 7, 8 y 10.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial entero, parte del primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación											

En esta tanda de ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

y definiremos los conjuntos

$$\beta_5 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta_6 = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}, \beta_7 = \{u_3 + 7u_2, u_4, u_2, u_1\}.$$

1. Demuestra, usando inducción, que $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^n = \frac{1-7^{n+1}}{1-7}$ para cualquier número natural n *(3 puntos)*.

Solución:

Para $n = 1$ la fórmula nos dice que $1 + 7 = \frac{(1+7)(1-7)}{1-7} = \frac{1-7^2}{1-7}$, luego es cierta.

Ahora suponemos que la fórmula es cierta para un número natural n (hipótesis de inducción) y la probamos para el número $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^n + 7^{n+1} &= \frac{1-7^{n+1}}{1-7} + 7^{n+1} \\ &= \frac{1-7^{n+1}}{1-7} + \frac{7^{n+1}-7^{n+2}}{1-7} = \frac{1-7^{n+2}}{1-7} \end{aligned}$$

Así que la fórmula se satisface para el número $n + 1$ y por lo tanto por el principio de inducción para cualquier número natural.

2. Calcula $\int \frac{\log^4 x}{x} dx$ *(1 puntos)*.

Solución:

Haciendo el cambio de variable $t = \log x$ tenemos que $dt = \frac{dx}{x}$ y

$$\int \frac{\log^4 x}{x} dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + K = \frac{\log^5 x}{5} + K$$

3. Calcula las matrices de cambio de base $M_{\beta_6\beta_5}$ y $M_{\beta_5\beta_6}$ *(1 punto)*.

Solución:

- Como

$$\begin{aligned} u_3 &= (0,0,1,0)_{\beta_5} \\ u_4 &= (0,0,0,1)_{\beta_5} \\ u_1 &= (1,0,0,0)_{\beta_5} \\ u_2 + 2u_3 &= (0,1,2,0)_{\beta_5} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Como

$$\begin{aligned} u_1 &= (0,0,1,0)_{\beta_6} \\ u_2 &= (-2,0,0,1)_{\beta_6} \\ u_3 &= (1,0,0,0)_{\beta_6} \\ u_4 &= (0,1,0,0)_{\beta_6} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_6\beta_5} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta_6} : 2x+y+z=0, z+2y=0\}$ respecto de la base β_5 *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Sea $(x,y,z,t)_{\beta_5} \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β_6. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas

$$(x,y,z,t)_{\beta_5} = [M_{\beta_6\beta_5}(x,y,z,t)^t_{\beta_5}]^t = (-2y+z,t,x,y)_{\beta_6} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:

$$W = \{(x,y,z,t)_{\beta_5} : -4y+x+t+2z=0, x+2t=0\}.$$

5. Calcula las ecuaciones respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ del subespacio $S =< u_1, 2u_1+3u_2 >$. Da una base de S expresando sus vectores en coordenadas respecto a la base β_7. *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Sea $(x,y,z,t) \in S$, entonces

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) = \alpha u_1 + \beta(2u_1+3u_2) = (\alpha+2\beta)u_1 + 3\beta u_2 &= (\alpha+5\beta, \alpha+5\beta, \alpha+5\beta, \alpha+3\beta) \\ &\Rightarrow x=y=z=\alpha+3\beta; t=\alpha+3\beta \end{aligned}$$

Como sólo necesitamos $\dim \mathbb{R}^4 - \dim S = 2$ ecuaciones, basta con eliminar los parámetros y obtener:

$$S = \{(x,y,z,t) : x-y=0, x-z=0\}.$$

Ahora damos la base de S:

$$\beta_S = \{u_1, 2u_1+3u_2\} = \{(0,0,0,1)_{\beta_7}, (0,0,3,2)_{\beta_7}\}.$$

6. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es monomorfismo ¿Puede ocurrir que no sea un isomorfismo? ¿Por qué? En caso afirmativo pon un ejemplo *(1 punto).*

<u>**Solución:**</u>

Usamos la relación $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Como f es un monomorfismo entonces $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ y entonces $2 = 0 + \dim \operatorname{Im} f$, por lo tanto $\dim \operatorname{Im} f = 2$ y f es suprayectiva. Así que f es biyectiva y por lo tanto un isomorfismo.

7. ¿Para qué valores de la constante h la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es suprayectiva? *(0.5 puntos).*

Solución:

Para que la aplicación sea suprayectiva se tiene que verificar que $3 = \dim Imf = \mathrm{rg} M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f)$.

El determinante de la matriz $A = M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f)$ es $-1+h$, así que $\mathrm{rg} A = 3$, y por lo tanto f es suprayectiva, si y sólo si $h \neq 1$.

8. Calcula el área de la superficie de una esfera de radio $R = 2$.

Solución:

Usaremos la fórmula $A = 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$, donde $f(x)$ es función cuya gráfica es una semicircunferencia de radio R, es decir $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Así que:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}dx = 2\pi \int_{-R}^{R} Rdx = \int_{-R}^{R} Rdx = 4\pi R^2 = 16\pi \end{aligned}$$

9. Calcula una aproximación de $\log(1,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1 punto).*

Solución:

Usamos la función $f(x) = \log x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ usando que $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2$:

$$p_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Así que la aproximación solicitada es

$$\log(1,0001) = f(1 + 10^{-3}) = 10^{-3} + \frac{10^{-6}}{2} + \frac{10^{-9}}{3} = 0{,}001000500333.$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (1, 1 + 10^{-3})$ y

$E = |R_4(1 + 10^{-3})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-3})^4\right| = |\frac{-6}{\xi^4}|\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{6}{\xi^4}\frac{10^{-12}}{4!} \leq \frac{6}{1}\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{10^{-12}}{4}$

10. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(1.5 puntos).*

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-2)^2(x-1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(2) = 2 = \dim V_2$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_2} = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(0,0,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ITM--Fundamentos Matemáticos

Examen final

3 de septiembre de 2009, de 9 a 12

Observaciones

1. Tienes que entregar esta hoja de examen.
2. Razona los cálculos que haces.
3. No se puede utilizar calculadora programable.
4. Es importante simplificar los cálculos parciales, sobre todo a la hora de calcular el polinomio característico.
5. Si copias tu puntuación será 0.
6. No mezcles en un mismo folio preguntas de parciales diferentes.

Nombre y apellidos del alumno:

Preguntas relativas al primer parcial

1. Calcula una aproximación de $e^{0,001} + \cos(0,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(2 puntos)*.
2. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(3 puntos)*.

Preguntas relativas al segundo parcial

T1 Define límite de una función de varias variables $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punto $a \in A$ (0.5 puntos).

T2 ¿Cómo se calculan mediante integrales integrales la masa y centros de masas de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ con función de densidad $\rho(x, y)$? (0.5 puntos).

P1 Encuentra la masa total y el centro de masa de la lámina pesada del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ y con función de densidad $\rho(x, y) = xy$ (1.5 puntos).

P2 Estudia la continuidad de la siguiente función (1 punto):

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

P3 De entre todos los puntos pertenecientes a la intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cilindro macizo $x^2 + y^2 \leq 1$, se pide determinar cuáles se encuentran a mayor y menor distancia del origen, así como dichas distancias (1.5 puntos).

Nota: Al realizar cada paso en cada ejercicio, indíquese qué es lo que se está haciendo.

ITA--Fundamentos Matemáticos

Examen final

3 de septiembre de 2009, de 9,30 a 12,30

Observaciones

1. Tienes que entregar esta hoja de examen.
2. Razona los cálculos que haces.
3. No se puede utilizar calculadora programable.
4. Es importante simplificar los cálculos parciales, sobre todo a la hora de calcular el polinomio característico.
5. Si copias tu puntuación será 0.
6. No mezcles en un mismo folio preguntas de parciales diferentes.

Nombre y apellidos del alumno:

Preguntas	1	2	**Total**
Puntuación			

1. Calcula una aproximación de $\operatorname{sen}(0,001)+\cos(0,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(2 puntos)*.
2. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(3 puntos)*.

ITOP–Fundamentos Matemáticos–Examen final–9 de septiembre de 2009, de 9 a 12

Observaciones

1. Tienes que entregar esta hoja de examen.
2. No se puede utilizar calculadora programable.
3. Es importante simplificar los cálculos parciales, sobre todo a la hora de calcular el polinomio característico.
4. Si copias tu puntuación será 0.
5. No mezcles en un mismo folio preguntas de parciales diferentes.
6. Al realizar cada paso en cada ejercicio, indíquese qué es lo que se está haciendo.

Nombre y apellidos del alumno:

Preguntas relativas al primer parcial

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

1. Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades (1 punto).
2. Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 2I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$ (1 punto).
3. Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$. (0,5 puntos).
4. Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso (1 punto).
5. Sean las bases $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica (1,5 puntos).

Preguntas relativas al segundo parcial

T1 Da la definición de puntos críticos y extremos relativos de una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ¿Qué relación hay entre ambos conceptos? (1 punto).

P1 Sea D la región delimitada por el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, la parte superior del plano $z = 0$ y el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$, calcular (1.5 puntos):

$$\int_D x^2.$$

P2 Estudia la continuidad de la siguiente función (1 punto):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 \operatorname{sen} 2x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

P3 Calcular la distancia máxima y mínima del origen a la siguiente elipse (1.5 puntos):

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8.$$