SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE INGENIERÍA CIVIL

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. Las preguntas 1-6 son eliminatorias. Sólo se corregirá el examen completo a los alumnos que obtengan una puntuación igual o superior a 0.8 en las seis primeras preguntas.
2. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
3. Los resultados de las seis primeras preguntas los tienes que escribir en la hoja de examen en los recuadros habilitados. Los cálculos auxiliares los haces en folios que también debes de entregar.
4. No se puede salir al aseo.
5. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
6. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
7. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
8. Tienes que firmar el examen.
9. Duración: 3 horas.

---

1. Calcula el jacobiano de $f(x,y) = (4x^2 + 6y^3 + 3, 5x^2y^3 + 2)$ (0.3 puntos).
2. Calcula el jacobiano de $g(x,y) = (5\text{sen}(2x+3y) + x, 4\cos(6xy) + y)$ (0.3 puntos).
3. Calcula $J(f \circ g)(0,0)$ (0.5 puntos).
4. Describe en coordenadas esféricas el recinto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 20^2, x < 0, y > 0, z > 0\}$ (0.3 puntos).
5. Describe en coordenadas cilíndricas el recinto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16^2, x < 0, y < 0, z > 0\}$ (0.3 puntos).
6. ¿Qué tamaño tiene la matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^{2021}$? ¿Y la matriz hessiana de $\|f\| : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$? (0.3 puntos).
7. Estudia la continuidad de

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{y^4 + x^6 \text{sen}\left(\frac{10}{(x^2+y^2)^9}\right)}{4(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 puntos).

8. Calcula el plano tangente a la superficie gráfica de $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,f(0,0))$, donde la función f es la del ejercicio anterior (2 puntos).

2,3.4,6.5–$\boxed{\text{examen 1}}$–ABELLÁN VEGARA, ALICIA

9. Calcula el volumen de un cono de altura 5 y de radio de la base 10 (2 puntos).

10. Calcula el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x,y) = 3e^{4(x^4+y^4)+2} + 6$ en el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 8^2, x \leq 0\}$ (2 puntos).

Firma del alumno:

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE RECURSOS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.
6. Duración: 3 horas.

---

1. Calcula el jacobiano de $f(x,y) = (5x^3 + 6y^4 + 3, 7x^3y^4 + 2)$ (0.3 puntos).
2. Calcula el jacobiano de $g(x,y) = (7\text{sen}(3x+4y) + x, 5\cos(6xy) + y)$ (0.3 puntos).
3. Calcula $J(f \circ g)(0,0)$ (0.5 puntos).
4. Describe en coordenadas esféricas el recinto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 25^2, x < 0, y > 0, z > 0\}$ (0.3 puntos).
5. Describe en coordenadas cilíndricas el recinto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 20^2, x < 0, y < 0, z > 0\}$ (0.3 puntos).
6. ¿Qué tamaño tiene la matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{2021}$? ¿Y la matriz hessiana de $\|f\| : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}$? (0.3 puntos).
7. Calcula el plano tangente a la superficie gráfica de $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,f(0,0))$, donde la función f es
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{y^5 + x^7\text{sen}\left(\frac{11}{(x^2+y^2)^{11}}\right)}{5(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
(2 puntos).
8. Calcula el volumen de un cono de altura 7 y de radio de la base 11 (2 puntos).
9. Calcula el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x,y) = 4e^{5(x^4+y^4)+3} + 6$ en el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 8^2, x \leq 0\}$ (2 puntos).
10. Calcula, usando un cambio de coordenadas adecuado, la integral doble $\iint_\Omega (2x+y)\text{sen}(x-y)dxdy$ donde Ω es el recinto limitado por $2x+y=1$ y los ejes de coordenadas (2 puntos).

3,4.5,6.7–$\boxed{\text{examen 2}}$

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE CIVIL (PARTE II)

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. No se puede salir al aseo.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.
6. Duración: 1,5 horas.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Calcula el volumen del sólido limitado por $x^2+y^2=1^2$, $2x+2y+5z=10$ y por $3x+3y-5z=15$ (1,75 puntos).
2. Describe el siguiente conjunto en coordenadas polares
$$\Omega = \{(x,y) : (x+1)^2+y^2<1^2\}$$
(1 punto).
3. Dada $f:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^{2021}$? ¿Se puede realizar el producto $Jf(u)Hf(u)$? ¿Y $Hf(u)Jf(u)$? ¿Por qué? (0.5 puntos).
4. Calcula el límite siguiente:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^3-y^3}$$
(1,75 puntos).

1,2.3,4.5– $\boxed{\text{examen 3}}$

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE CIVIL (PARTE I)

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. No se puede salir al aseo.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.
6. Duración: 1,5 horas.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ defininidas por

$$f(x,y) = (1x^2 + 2y^2, 3x^2 + 4y^2, 2x^3y^3) \qquad g(x,y,z) = z^1 + 2zy.$$

Calcula la dirección por la que descenderíamos a máxima pendiente por la superficie $z = g \circ f(z,y)$ si estamos situados en el punto $(1, 1, g \circ f(1,1))$ (2 puntos).

2. Calcula los extremos de la función $g(x,y) = e^{3f(x,y)} + \log \sqrt{f(x,y)} + 2$ en el conjunto $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1^2\}$, siendo la función $f(x,y)$ la suma de las distancias al cuadrado del punto (x,y) a los conjuntos $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 1^2$ (2 puntos).

3. Pon un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que sea localmente invertible en algún punto. Justifícalo con el teorema de la función inversa y di en qué punto es localmente invertible. El número $n > 1$ lo eliges tú (1 punto).

1,2.3,4.5–$\boxed{\text{examen 4}}$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, ITOP
Examen Final, Primera parte

Nombre y apellidos:

Fila y columna:

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir porque los exámenes son diferentes.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

1. [1.5 puntos] Calcula $\int \sqrt{3-5x^2}dx$
2. [2 puntos] Estudia si la matriz que sigue es diagonalizable o no. Caso de ser diagonalizable da una matriz diagonal y una matriz de paso y escribe la relación entre todas ellas.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
3. [1.5 puntos] Calcula el desarrollo de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. Aproxima el valor de $f(2\cdot 10^{-2}) = \sqrt[3]{1.02}$ utilizando un desrrollo de Taylor de $f(x)$ que nos permita asegurar que el error cometido es menor que 0.01.

   Solución:

   Calculamos las primeras derivadas de la función f y sus valores para $a = x = 0$ en las cuatro primeras derivadas:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{-2}{3}} & f'(0) &= \tfrac{1}{3} \\ f''(x) &= \frac{-2}{3^2}(1+x)^{\frac{-5}{3}} & f''(0) &= \tfrac{-2}{3^2} \\ f'''(x) &= \frac{10}{3^3}(1+x)^{\frac{-8}{3}} & f'''(0) &= \tfrac{10}{3^3} \\ f^{(iv)}(x) &= \frac{-80}{3^4}(1+x)^{\frac{-11}{3}} & f^{(iv)}(0) &= \tfrac{-80}{3^4} \\ f^{(v)}(x) &= \frac{880}{3^5}(1+x)^{\frac{-14}{3}} \end{aligned}$$

   Así que el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $a = 0$ es:

$$P_4(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{-2}{2\cdot 3^2}x^2 + \frac{10}{6\cdot 3^3}x^3 + \frac{-\,80}{24\cdot 3^4}x^4$$

Si aproximamos el valor de $f(2\cdot 10^{-2}) = \sqrt[3]{1.02}$ por el de $P_4(2\cdot 10^{-2})$ estaremos cometiendo el siguiente error:

$$E = \left| \frac{f^{(v)}(\xi)}{5!} 2^5 10^{-10} \right| = \frac{880}{120\cdot 3^5}(1+\xi)^{\frac{-14}{3}} 2^5 10^{-10}$$

para algún $\xi \in (0, 2\cdot 10^{-2})$. Observa que la derivada de $f^{(v)}$ es negativa y por lo tanto $f^{(v)}$ es decreciente, en consecuencia:

$$E = \frac{880}{120\cdot 3^5}(1+\xi)^{\frac{-14}{3}} 2^5 10^{-10} \leq \frac{880}{120\cdot 3^5} 2^5 10^{-10} \leq 2^5 10^{-10} < 10^{-2}$$

Así que $P_4(2\cdot 10^{-2})$ nos vale como la aproximación solicitada:

$$P_4(2\cdot 10^{-2}) \equiv 1 + \frac{1}{3}2\cdot 10^{-2} + \frac{-2}{2\cdot 3^2}(2\cdot 10^{-2})^2 + \frac{10}{6\cdot 3^3}(2\cdot 10^{-2})^3 + \frac{-\,80}{24\cdot 3^4}(2\cdot 10^{-2})^4$$

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE RECURSOS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. No se puede salir al aseo.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Describe el siguiente conjunto en coordenadas polares
$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + (y + 1)^2 < 1^2\}$$
(1 punto).

2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ defininidas por
$$f(x, y) = (1x^2 + 2y^2, 2x^2 + 1y^2, 2x^3y^3) \qquad g(x, y, z) = z^1 + 2zy.$$
Calcula el plano tangente a la superficie $z = g \circ f(z, y)$ en el punto $(1, 1, g \circ f(1, 1))$ (2 puntos).

3. Calcula, usando un cambio de coordenadas adecuado, la integral doble $\iint_\Omega (2x + y)\cos(x - 2y)dxdy$ donde Ω es el recinto limitado por $2x + y = 1$ y los ejes de coordenadas (2 puntos).

Firma del alumno:

1,2.2,1.3– examen 5

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, ITM
Exámen Final, Primera parte
17 de Junio de 2011, 10,00h-13,00h

Nombre y apellidos:

Fila y columna:

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir porque los exámenes son diferentes.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

1. [1 punto] Calcula $\int \frac{1}{1-4x^2}dx$
2. [1 punto] Recordamos que el conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, formado por todas las matrices de tamaño 2×2 sobre los números reales, es un espacio vectorial de dimensión 4 cuya base canónica es $\beta_c = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide justificar si el conjunto de matrices $\beta = \{I_2, A, A^2, A^3\}$ es o no es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
3. [1.5 puntos] Estudia si la matriz que sigue es diagonalizable o no. Caso de ser diagonalizable da una matriz diagonal y una matriz de paso y escribe la relación entre todas ellas.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
4. [1.5 puntos] Calcula el desarrollo de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = 3\log(1+x)$. Aproxima el valor de $f(x) = \log(1.02^3)$ utilizando un desrrollo de Taylor de $f(x)$ que nos permita asegurar que el error cometido es menor que 0.01.

Firma del alumno:

134

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. AGRÍCOLAS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
2. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
3. Tienes que firmar el examen.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. En una población de 100000 habitantes se extienden dos rumores, rumor A y rumor B. El rumor A dice que Belén Esteban está embarazada y el rumor B que Eduard Punset recibirá el año que viene el premio Nobel del Química. Es bien conocido que no todos los rumores se propagan a la misma velocidad porque ésta depende del interés del rumor cuando un individuo conoce el mismo. El día 1 de junio de 2011 empieza a circular el rumor A mientras que el rumor B empezó el 1 de mayo, en los días señalados sólo una persona (el difusor del mismo) conocía el rumor.

   Ambos rumores se extienden a una velocidad proporcional al número de personas personas que lo conocen en cada momento.

   Sabemos que el 5 de junio el rumor A lo conocen 200 y el rumor B 500 ¿En qué días alcanzará la difusión los rumores al 90 % de la población? ¿Y al 100 %?(2.5 puntos).

   Para simplificar el problema el estudio correcto del rumor A valdrá 2 puntos y el del rumor B valdrá 0.5 puntos

---

1,2.2,1.3– $\boxed{\text{examen 6}}$

2. Resuelve el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^{-1t} \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

3. De los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales di cuáles representan sistemas cooperativos, competitivos o Lotka-Volterra. Justifica tu respuesta y di en en el caso que corresponda qué población representa a los preradores y cuál a las presas (1.5 puntos).

(**a**) $\begin{cases} x' = 1x + 2xy - 2x^2 \\ y' = 1y - 3xy - 3y^2 \end{cases}$ (**b**) $\begin{cases} x' = 1x + 2xy - 2x^2 \\ y' = 1y + 2xy - 5y^2 \end{cases}$ (**c**) $\begin{cases} x' = 1x - 2xy - 2x^2 \\ y' = 1y - 3xy - 1y^2 \end{cases}$

4. Haz una representación del diagrama de fases del sistema (b) del ejercicio anterior (1 punto).

5. Calcula el número de subintervalos que tenemos que hacer para garantizar que la regla de Simpson compuesta nos dé un error menor que 10^{-5} al aproximar a $\int_0^5 (e^x + \cos x)dx$ (2.5 puntos).

Firma del alumno: