MATEMÁTICAS

I. Generalidades

1.1. Demostrar las siguientes igualdades o inclusiones entre conjuntos:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
e) Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$
f) $(A^c)^c = A$
g) $A \cap A^c = \emptyset$
h) $A \cup A^c = U$

1.2. Da contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
b) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

1.3. Demostrar las siguientes igualdades del producto cartesiano:

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

1.4. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres aplicaciones, demostrar que se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
b) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
c) Si f y g son suprayectivas entonces $g \circ f$ es suprayectiva.
d) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.
e) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
f) Si $g \circ f$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva.
g) Si $A' \subset A'' \subset A$ entonces $f(A') \subset f(A'')$.
h) $f(A' \cap A'') \subset f(A') \cap f(A'')$.
i) Dar un contraejemplo que ponga de manifiesto que en general no se da la igualdad en el apartado anterior. Probar, en cambio que se da la igualdad cuando f es inyectiva.

1.5. Dadas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$.

a) Decir si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas mirando en su gráfica.
b) Calcular $f((-1, 1])$ y $g((-1, 1))$
c) Demostrar que $f^n(x) = x^{2^n}$, donde f^n es la composición de f consigo misma n veces.

1.6. Demostrar usando inducción las siguientes igualdades:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

c) Si $r \neq 1$ entonces $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

d) Probar que $n(n^2+5)$ es divisible por 6 cualquiera que sea el número natural n.

e) Probar que entre los números $2n+1$, $2n+3$ y $2n+5$ hay siempre un múltiplo de 3.

f) Demostrar que $\frac{2^{2n-1}}{n} < \binom{2n}{n} < 2^{2n-1}$ para $n > 1$.

g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{p}{k(k+1)\ldots(k+p)} = \frac{1}{p!}\frac{n!}{(n+p)!}$ donde p es un número natural fijo.

h) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

i) $(1+p)^n > 1 + pn$ donde p es un número real mayor que cero y n un número natural mayor que uno.

j) Demostrar que los para cualquier número natural n el número $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$es un múltiplo de 11;

k) Demostrar que para todo número natural a, si $n + \frac{1}{n}$ es un número entero entonces $n^a + \frac{1}{n^a}$.

l) Demuestra que el número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos es 2^n.

m) Demuestra que el número de subconjuntos de j elementos que tiene un conjunto de n elementos es $\binom{n}{j}$.

n) Demuestra que el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$. ¿Por qué $n(n-3)$ es par?

1.7. Demostrar la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

siendo n un número natural mayor o igual que 1.

1.8. Sea $P_2[x]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos y con coeficientes reales. Sobre dicho conjunto se consideran las leyes de composición interna suma $[(a_0x^2 + a_1x + a_2) + (b_0x^2 + b_1x + b_2) = (a_0 + b_0)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)]$ y producto $[(a_0x^2 + a_1x + a_2) * (b_0x^2 + b_1x + b_2) = (a_0b_0)x^2 + (a_1b_1)x + (a_2b_2)]$. Demostrar que la terna $(P_2[x], +, *)$ es un anillo e indicar de qué tipo es.

1.9. Justifica si las siguientes funciones pueden ser la primitiva de alguna función. En caso afirmativo indica de qué función.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$,

b) $f(x) = |x|$,

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$

1.10. Calcula las primitivas inmediatas siguientes:

a) $\int x\mathrm{sen}(x^2)dx$	*b*) $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$	*c*) $\int \frac{\log(x)}{x}dx$
d) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$	*e*) $\int \frac{\mathrm{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$	*f*) $\int \frac{x^3}{(1-x^4)^4}dx$
g) $\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}dx$	*h*) $\int \frac{dx}{x\log^2(x)}$	*i*) $\int \sec^2(2x)dx$

Solución:

a) $-\frac{1}{2}\cos(x^2)$;

b) $\frac{-1}{2(x^2-1)}$;

c) $\frac{1}{2}\log^2(x)$;

d) $\log(e^x+1)$;

e) $\frac{\mathrm{arcsen}^2(x)}{2}$;

f) $\frac{1}{-4}\frac{1}{-3(1-x^4)^3}$;

g) $e^{\sqrt{2x}}$;

h) $\frac{-1}{\log x}$;

i) $\frac{1}{2}\tan(2x)$.

1.11. Aplica la fórmula de integración por partes para hallar las siguientes primitivas:

a) $\int x\cos(2x)dx$	*b*) $\int x^2e^{-x}dx$	*c*) $\int \mathrm{sen}xe^{2x}dx$
d) $\int \log y dy$	*e*) $\int \mathrm{arctg}x dx$	*f*) $\int x^2e^{2x}dx$

1.12. Calcula las primitivas de las funciones racionales siguientes:

$$\begin{array}{lll} a)\ \int \frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}dx & b)\ \int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}dx & c)\ \int \frac{x-1}{x+1}dx \\ d)\ \int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}dx & e)\ \int \frac{2x}{x^3-2x^2-2x-3}dx & f)\ \int \frac{1}{x^4+x^2}dx \\ g)\ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx & h)\ \int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx & i)\ \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx \end{array}$$

Solución: Debes realizar una descomposición en fracciones simples como sigue:

a) $\frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$;

b) $\frac{x^7+x^3}{x^4-1} = \frac{x^3(x^4-1+2)}{x^4-1} = x^3 + \frac{2}{x^4-1} = x^3 + \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$;

c) $\frac{x-1}{x+1} = 1 - 2\frac{1}{x+1}$;

d) $\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$;

e) $\frac{2x}{x^3-2x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}$;

f) $\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$;

g) $\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{2}{(x^2+1)^2}$ (la última fracción ya es simple y su primitiva se hace por partes según se explicó);

h) Esta fracción ya es simple y su primitiva se calcula por el método de integración por partes según se explicó;

i) $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{1+x+x^2} + \frac{Cx+D}{1-x+x^2}$.

1.13. Haz el cambio de variable adecuado para hallar las siguientes primitivas

$$\begin{array}{lll} a)\ \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/3}(1+x)^{-2}\,dx & b)\ \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx & c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \\ d)\ \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx & e)\ \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx & f)\ \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \end{array}$$

Solución: Los cambios de variable adecuados son:

a) $t^3 = \frac{1-x}{1+x}$;
b) $t^4 = x$;
c) $t^2 = x$;
d) $t^2 = \frac{1+x}{1-x}$;
e) $t = e^x$;
f) $t = e^x$.

1.14. Calcúlese las primitivas de las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{lll} a)\ \int \frac{1}{\cos x}dx & b)\ \int \frac{2-\cos x}{2+\cos x}dx & c)\ \int \frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x}dx \\ d)\ \int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x dx & e)\ \int \operatorname{sen}^2(mx)dx & f)\ \int \operatorname{sen}^2 ax \cos ax dx \\ g)\ \int \cos^2(2x)\operatorname{sen}^4(2x)dx & h)\ \int \operatorname{sen}^4 x dx & i)\ \int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x(1+\cos^2 x)}dx \\ j)\ \int \frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}dy & k)\ \int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}dx & l)\ \int \operatorname{tg}^2 x dx \end{array}$$

Solución:

a) Como $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}\cos x = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x$ se puede hacer el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$.

b)

1.15. Halla las primitivas siguientes:

$$\begin{array}{ll} a)\ \int \sqrt{a^2-x^2}dx & b)\ \int \sqrt{x^2-a^2}dx \\ c)\ \int \sqrt{a^2+x^2}dx & d)\ \int \sqrt{-1+2x+x^2}dx \\ e)\ \int \sqrt{2-x-x^2}dx & f)\ \int \sqrt{1+x+x^2}dx \\ g)\ \int (-4x^2+8x-3)^{-3/2}dx & h)\ \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\ i)\ \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} & \end{array}$$

1.16. Calcula las siguientes primitivas utilizando en cada caso el método de integración que convenga:

1) $\int \frac{x}{x^2+4}dx$
2) $\int(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x})dx$
3) $\int \exp(-3x)\operatorname{sen}(2x)dx$
4) $\int x \operatorname{arc\,tg}(x)dx$
5) $\int \operatorname{sen}(x^2)x^3dx$
6) $\int \frac{1}{x^3-x^2-x+1}dx$
7) $\int \frac{\exp(2t)}{\exp(t)+1}dt$
8) $\int \frac{2}{x\log^2(x)}dx$
9) $\int \cos x \cos 2x \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 4x dx$
10) $\int \frac{z^3}{-4+4z-z^2+z^3}dz$
11) $\int \frac{y^5+y}{y^2}dy$
12) $\int \frac{\operatorname{sen}(\log(x))}{3x}dx$
13) $\int \tan(3x)dx$
14) $\int \cos^2(z)dz$
15) $\int \frac{1}{x+\sqrt{4-x^2}}dx$
16) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}dx$
17) $\int \operatorname{Ch}^2 x dx$
18) $\int x\sqrt{x-3}dx$
19) $\int \operatorname{arcsen}(x)dx$
20) $\int(x^2-x)e^{2x}dx$
21) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[4]{x-2}-1}dx$
22) $\int \frac{\sqrt{y^2+1}}{y^2}dy$
23) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)dx$
24) $\int \operatorname{tg}^2(3x)dx$
25) $\int \frac{z^3}{4z-z^2}dz$
26) $\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{1-\operatorname{sen}(t)}dt$
27) $\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{2-\cos(x)}dx$
28) $\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)dx$
29) $\int \cos^4(z)\operatorname{sen}^2(z)dz$
30) $\int \frac{x^3}{(1-x^4)^2}dx$
31) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}dx$
32) $\int(x^2-x)\log(3x)dx$
33) $\int \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$
34) $\int \frac{\sec^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}dx$
35) $\int \frac{1+\operatorname{Sh} t}{1+\operatorname{Ch} t}dt$
36) $\int e^x(1-e^x)^3dx$
37) $\int \frac{\sqrt{2+t^2}}{t^2}dt$
38) $\int e^{\operatorname{sen}^2 y}\operatorname{sen} 2y dy$
39) $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$

1.17. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Realiza las siguientes operaciones de números complejos y el resultado ponlo en la forma $A+Bi$:

a) $\sqrt{(a+c)+(b+a)i}$,
b) $[(a+c)+(b+c)i]^4$,
c) $\frac{(a+c)+(b+a)i}{(a+c)+2bi}$,
d) $ae^{ib}+ce^{ia}$.

1.18. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Factoriza el polinomio $x^4+2(b^2-a^2)x^2+(a^4+2a^2b^2+b^4)$ como producto de dos polinomios de grado 2 que no tengan raíces reales.

1.19. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Calcula:

$$\int \frac{cx+d}{x^2-2ax+(a^2+b^2)}\,\mathrm{d}x.$$

1.20. Resuelve la ecuación $x^4=-1$.

1.21. Factoriza el polinomio x^4+x^2+1 como producto de dos polinomios de grado 2 que no tengan raíces reales.

1.22. Resuelve la ecuación $a^4=b^4$ en $\mathbb{Z}_5$.

II. Matrices

2.1. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, demostrar que A^4 es la matriz nula.

2.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar $3AA^t - 2I_2$.

Solución: $\begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$

(b) Resolver la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solución: $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

2.3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

realizar si es posible, las siguientes operaciones

(a) $(2A + 3B^t)C$ (b) C^tA^t (c) $DC + E$ (d) $D(E + C)$
(e) B^tA^tCD (f) D^tC (g) $BACD$ (h) ED^tC

2.4. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Si $B = 2A - I_n$, demostrar que B^2 es igual a I_n.

2.5. Dadas matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, demuestra o pon un contraejemplo a la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Solución: La igualdad es falsa, basta con tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6. Sea A una matriz cuadrada. Demostrar que las matrices AA^t y A^tA son siempre simétricas.

2.7. Demostrar que si una matriz cuadrada A verifica que $A^2 - A - I_2 = 0$, entonces existe la inversa de A. Calcularla.
Solución: Como $A^2 - A - I_2 = 0$ entonces $A^2 - A - I_2 = 0 \Rightarrow A^2 - A = I_2$ y por lo tanto se verifica $A(A - I_2) = I_2$ y $(A - I_2)A = I_2$. Así que por la definición de inversa de una matriz tenemos $A^{-1} = A - I_2$.

2.8. Se considera la matriz con coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Demostrar que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces $A^n = A$ para todo entero positivo.

2.9. Calcular el rango de las siguientes matrices empleando operaciones elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1-\pi & e \\ \pi & 1-e \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 43 & 76 \end{pmatrix}$$

Solución: Los rangos de las matrices anteriores los reflejamos en la siguiente tabla respetando el orden en el que aparecen las matrices:

2	2	2
4	2	3
3	2	2
2	3	2

2.10. Calcular mediante el método de Gaüss o el método de la matriz adjunta, las matrices inversas de las matrices del ejercicio anterior si las hay.

2.11. Calcular el rango de la siguiente matriz en función de los valores de a y b:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Solución:

Utilizando el método de transformaciones elementales por filas y columnas, tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ a & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \underset{\sim}{b \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ a & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & -a^2/b & 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & 0 & a^3/b^2 & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & 0 & 0 & b - a^4/b^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a/b \\ 0 & 0 & 0 & b - a^4/b^3 \end{pmatrix}$$

Así que si $b \neq 0$ se tienen las siguientes posibilidades:

- Si $b^4 = a^4$ entonces $\operatorname{rg} A = 3$. Además

$$b^4 = a^4 \Leftrightarrow \pm b^2 = \pm a^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow b = \pm a.$$

- Si $b \neq \pm a$ entonces $\operatorname{rg} A = 4$.

Cuando $b = 0$ tenemos $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y por lo tanto:

- si $a = 0$ entonces $\operatorname{rg} A = 0$
- si $a \neq 0$ entonces $\operatorname{rg} A = 4$

2.12. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Calcular las sucesivas potencias de A.

Solución: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $n \geq 4$.

(b) Sea $B = I_4 + A$, expresar B^n en función de I_4, A, A^2 y A^3.

Solución: Usando el binomio de Newton tenemos que

$$B^n = (I_4 + A)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} A^j I^{n-j}$$

Ahora suponemos que $n \geq 3$ y simplificamos la expresión anterior:

$$B^n = \sum_{j=0}^{3} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} A^j I^{n-j} = I_4 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}A^3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 & 0 \\ 2n+2(-1+n)n & 2n & 1 & 0 \\ 2n+4(-1+n)n+\frac{4}{3}(-2+n)(-1+n)n & 2n+2(-1+n)n & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $n = 1$ entonces $B^1 = I_4 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $n = 2$ entonces $B^2 = (I_4 + A)^2 = I_4^2 + A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Demostrar que la inversa de B es $I_4 - A + A^2 - A^3$.

Solución: Se trata de ver que $B(I_4 - A + A^2 - A^3) = I_4 = (I_4 - A + A^2 - A^3)B$. En efecto:

- $B(I_4-A+A^2-A^3) = (I_4+A)(I_4-A+A^2-A^3) = I_4-A+A^2-A^3+A-A^2+A^3-A^4 = I_4-A^4 = I_4$.
- $(I_4-A+A^2-A^3)B = (I_4-A+A^2-A^3)(I_4+A) = I_4-A+A^2-A^3+A-A^2+A^3-A^4 = I_4-A^4 = I_4$.

(d) Expresar B^{-3} en función de I_4, A, A^2 y A^3.

Solución: $B^{-3} = (I_4 - A + A^2 - A^3)^3 = (I_4 - A + A^2 - A^3)^2(I_4 - A + A^2 - A^3) = (I_4 - 2A + 3A^2 - 4A^3)(I_4 - A + A^2 - A^3) = I_4 - 3A + 6A^2 - 10A^3$.

2.13. Hallar la potencia n–ésima de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ poniendo $A = I_3 + B$, siendo B una matriz a determinar.

Solución:

La matriz B será $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.Como la matriz identidad conmuta con cualquier otra matriz podemos utilizar el binomio de Newton para calcular la potencia $A^n = (B + I_3)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$, así que tenemos que calcular las potencias de la matriz B.

$$B^0 = I_3 \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^4 = 0$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^n = 0 \quad \forall n \geq 4$$

Hacemos notar que $A^1 = A$ y que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Y ahora calculamos A^n para $n \geq 3$ siguiendo el binomio de Newton:

$$A^n = (B+I_3)^n = \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B^1 + \dots \binom{n}{n-1}B^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$
$$= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.14. En este ejercicio el parámetro a lo debes sustituir por la última cifra de tu DNI más 2, b por la penúltima más 3, c por la antepenúltima y d por la anterior a la antepenúltima. Hallar la potencia n–ésima de $A = \begin{pmatrix} 1 & d & a & b \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.15. Calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

2.16. Dada una matriz cuadrada A, ¿Qué valores puede tomar $\det(A)$ si $A^2 = A$? ¿y si $A = A^{-1}$?

2.17. De las afirmaciones siguientes, demostrar las verdaderas y dar un contraejemplo para las falsas:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Solución: Esta afirmación es falsa, para verlo tómense $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La misma afirmación es cierta cuando las matrices A y B conmutan. En cualquier caso sí que se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

(b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Solución: Esta igualdad también es falsa y se puede ver con las mismas matrices que en el ejercicio anterior.

(c) $A^{n+1} - I_n = (A - I_n)(I_n + A + A^2 + ... + A^n)$.

Solución: En este caso la igualdad es cierta ya que $(A - I_n)(I_n + A + A^2 + ... + A^n) = A + A^2 + \cdots + A^n + A^{n+1} - I_n - A - A^2 + ... - A^n = A^{n+1} - I_n$.

(d) Si P es una matriz regular, entonces $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$.

Solución: La igualdad es cierta porque

$$(PAP^{-1})^n = \underbrace{PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1}\dots PAP^{-1}}_{\text{n-veces}} = PA^nP^{-1}.$$

(e) Si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.

Solución: Verdadero. Puesto que A es antisimétrica se tiene que $A^t = -A$, entonces $(A^2)^t = (AA)^t = A^tA^t = (-A)(-A) = A^2$, es decir, A^2 es simétrica.

(f) Si A es antisimétrica y B es simétrica, entonces AB es antisimétrica si y sólo si $AB = BA$.

Solución: Verdadero. Por ser A antisimétrica y B simétrica se tiene que $A^t = -A$ y que $B^t = B$.

Demostramos primero que si AB es antisimétrica entonces $AB = BA$. En efecto, por ser AB antisimétrica tenemos que $-AB = (AB)^t = B^tA^t = B(-A) = -BA$ e igualando el primer y último miembro y dividiendo por -1 se tiene que $AB = BA$.

Finalmente hay que ver que si $AB = BA$ entonces AB es antisimétrica.

(g) Si $|AB| = 0$, entonces $|A| = 0$ ó $|B| = 0$.
Solución: Esta afirmación es cierta ya que si $|AB| = 0$ entonces $|AB| = |A||B| = 0$ y por lo tanto o bien $|A| = 0$ o bien $|B| = 0$.

(h) $|A + B| = |A| + |B|$.
Solución: Se puede comprobar fácilmente que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son un contraejemplo para esta igualdad.

(i) $|2A| = 2\,|A|$.
Solución: Se puede comprobar con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que la igualdad no se satisface.

2.18. Demostrar que si a, b, c son números reales se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 .$$

2.19. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.20. Sin desarrollar los determinantes, demostrar que:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{C_3^2(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+a+c \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3^1(-1)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Si a, b, c son las tres diferentes de 0, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1/b & b & b^2 \\ 1/c & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{C_1(abc)}{=} \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Supongamos ahora que una de ellas es 0, por ejemplo $a = 0$, en este caso se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} bc \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2 \\ 0 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

2.21. Calcular los siguientes determinantes de Vadermonde:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \quad V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2.22. De los dos métodos explicados para calcular la inversa de una matriz ¿Cuál requiere un número menor de operaciones?

2.23. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $AB = I_n$. Demuestra que $BA = I_n$

III. Sistemas de ecuaciones lineales

3.1. Discutir y resolver según el valor de los parámetros que aparezcan:

(a) $\begin{cases} \alpha x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \beta \\ 2x - 5y + \alpha z = -2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2\lambda x + \mu y + 2z = 1 \\ 2\lambda x + (2\mu - 1)y + 3z = 1 \\ 2\lambda x + \mu y + (\mu + 3)z = 2\mu - 1 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$

(f) $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -a & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 5 & -a-b & 7 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8+b \end{pmatrix}$.

3.2. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $Ax = b$, que admite solución única, entonces ésta es $x = A^{-1}b$.
Solución: Falso, por ejemplo se puede verificar que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 52 \\ 78 \end{pmatrix}$$

tiene como solución única a $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$. Sin embargo no existe la inversa de la matriz asociada al sistema por no ser cuadrada.

(b) Si los sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$ son compatibles, entonces lo es $Ax = b$ donde $b = b_1 + b_2$.
Solución: En efecto, si ambos son compatibles existirán soluciones respectivas x_1 y x_2 tales que $Ax_1 = b_1$ y $Ax_2 = b_2$.Por lo tanto $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = b_1 + b_2$. Esto quiere decir que $x_1 + x_2$ es solución de $Ax = b$, donde $b = b_1 + b_2$.

(c) Un sistema con más ecuaciones que incógnitas es siempre incompatible.
Solución: Falso. El contraejemplo del apartado (a) vale para este apartado.

(d) Si un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible determinado, entonces A es una matriz cuadrada.
Solución: Falso, además el contraejemplo del apartado (a) también vale para este apartado.

(e) Si $Ax = b$ es un sistema incompatible con 5 ecuaciones y 4 incógnitas y el $r(A) = 4$ entonces $r(A|b) = 5$.
Solución: Verdadero. En efecto, sabemos que $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|b)$, además al ser el sistema incompatible entonces la desigualdad es estricta. Así que $4 < \operatorname{rg}(A|b)$ y como el tamaño de $(A|b)$ es 5×5 entonces $\operatorname{rg}(A|b) \leq 5$. Por lo tanto $\operatorname{rg}(A|b) = 5$.

3.3. Calcular las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones tanto por el método de Gauss, como por el método de Crammer (por determinantes).

(a) $\begin{cases} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 6x - y + 3z = 6 \\ -6x + 8y = -10 \\ 2x - 5y - z = 4 \end{cases}$

3.4. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = a + 1 \\ ax + y + (a-1)\, z = a \\ x + ay + z = 1 \end{array} \right.$$

3.5. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} kx + y + z + t = k \\ x + ky + z + t = k \\ x + y + kz + t = k \\ x + y + z + kt = k \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{r} 2\,(k+1)\, x + 3y + kz = k + 4 \\ (4k-1)\, x + (k+1)\, y + (2k-1)\, z = 2k + 2 \\ (5k-4)\, x + (k+1)\, y + (3k-4)\, z = k - 1. \end{array} \right.$$

3.6. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de a y b:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{c} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{c} ax + 2y + 3z + u = 6 \\ x + 3y - z + 2u = b \\ 3x - ay + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z + 3u = 9. \end{array} \right.$$

3.7. Se tienen tres lingotes de oro de 100 gramos cuya composición es la siguiente

Lingote	Oro	Plata	Cobre
1	20	30	50
2	30	40	30
3	40	50	10

¿Que peso habrá que tomarse de cada uno de los tres lingotes para formar uno nuevo que contenga 42 gramos de oro, 57 gramos de plata y 51 gramos de cobre?

3.8. La suma de las tres cifras de un número es igual a 6. La cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de unidad y decena. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 198 unidades. Calcular dicho número.

3.9. Una empresa tiene dos tipos de procesos productivos: torno y fresadora. Cada uno de estos procesos se utiliza para fabricar tres tipos de productos A, B y C. Se dispone de 120 horas semanales de torno y de 260 horas de fresadora, y las necesidades asociadas a cada proceso, por unidad de producto, son las siguientes:

Producto	Torno	Fresadora
A	0.1h	0.20h
B	0.25h	0.30h
C	-	0.40h

Si el beneficio unitario que se obtiene con la venta se los productos A, B y C es de 3, 5 y 4 unidades monetarias, respectivamente. ¿Cómo debe de distribuirse la producción semanal para obtener un beneficio de 3800 u.m., si se utilizan todos los recursos disponibles?

3.10. Resuelve el siguiente sistema tomando como cuerpo base $\mathbb{Z}_5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{array} \right.$$

Solución: Construimos la matriz asociada al sistema y hacemos operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & | & k \\ 1 & k & 1 & | & k \\ 1 & 1 & k & | & k \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & | & k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & 1 & 1 & | & k \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_3^1(4k) \\ F_2^1(4) \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & | & k \\ 0 & 1+4k & k+4 & | & 0 \\ 0 & 1+4k^2 & 1+4k & | & k+4k^2 \end{pmatrix}$$

Discutimos el sistema ahora calculando el rango de la matriz asociada y ampliada. Para ello calculamos el determinante de la matriz asociada al último sistema, C.

$$\begin{aligned}\det C = (1+4k)^2-(k+4)(1+4k^2) &= 1+3k+k^2-(k+4k^3+4+k^2)\\ &= 1+3k+k^2+4k+k^3+1+4k^2 = 2+2k+k^3\end{aligned}$$

Para ver si este valor se hace cero evaluamos la expresión anterior en los elementos del cuerpo:

k	$\det C$
0	2
1	0
2	4
3	0
4	4

Así que el determinante de C se anula para los valores $k=1$ y $k=3$. Así que:

a) Para $k=0,2,4$ es sistema es compatible y determinado ya que $\det C = \det(C|d) = 3$. Las soluciones se pueden calcular por Crammer:

$$x = \frac{\left|\begin{pmatrix} k & k & 1\\ 0 & 1+4k & k+4\\ k+4k^2 & 1+4k^2 & 1+4k\end{pmatrix}\right|}{2+2k+k^3},$$
$$y = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & k & 1\\ 0 & 0 & k+4\\ 0 & k+4k^2 & 1+4k\end{pmatrix}\right|}{2+2k+k^3},$$
$$z = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & k & k\\ 0 & 1+4k & 0\\ 0 & 1+4k^2 & k+4k^2\end{pmatrix}\right|}{2+2k+k^3}.$$

b) Para $k=1$ se tiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

Como aquí tenemos $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg}(C|d) = 1$ se tiene que el sistema es compatible e indeterminado. La soluciones quedan en función de dos parámetros, λ y μ, del cuerpo $\mathbb{Z}_5$:

$$z=\lambda, y=\mu, x=1+4\lambda+4\mu.$$

c) Para $k=3$ se tiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3\\ 0 & 3 & 2 & | & 0\\ 0 & 2 & 3 & | & 4\end{pmatrix} \overset{F_3^2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3\\ 0 & 3 & 2 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 4\end{pmatrix}$$

Como aquí tenemos $\operatorname{rg} C = 2 \neq 3\operatorname{rg}(C|d)$ se tiene que el sistema es incompatible.

IV. Espacios vectoriales

4.1. En $\mathbb{R}^2$ definimos la operación interna $+$ dada por:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)\ \forall\,(x,y)\,,(u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

y la operación externa $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\alpha*(x,y)=(\alpha x,y)\,,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ y\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

¿Tiene la terna $\left(\mathbb{R}^2,+,*\right)$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Solución: No puede tener estructura de espacio vectorial porque $0*(1,1)=(0,1)$ y debe valer $(0,0)$ en cualquier espacio vectorial.

4.2. En $\mathbb{Z}_3^2$ definimos la operación interna $+$ dada por:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)\ \forall\,(x,y)\,,(u,v)\in\mathbb{Z}_3^2,$$

y la operación externa $*:\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_3^2\to\mathbb{Z}_3^2$ dada por:

$$\alpha*(x,y)=\left(\alpha x,\alpha^2 y\right)\,,\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_3\ y\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{Z}_3^2.$$

¿Tiene la terna $\left(\mathbb{Z}_3^2,+,*\right)$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$?

Solución: No porque $(1+1)*(1,2)=2*(1,2)=(2,2)\neq 1*(1,2)+1*(1,2)=(2,1)$.

4.3. ¿Es $(\mathbb{R},+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Solución: Por las propiedades de los números reales sabemos que $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano. Así que los cuatro primeros axiomas de espacio vectorial (los referentes a la suma) se satisfacen.

Veamos ahora que también se cumplen las propiedades referentes al producto. Para ello tomamos escalares cualesquiera $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y vectores $v,w\in\mathbb{R}$. Comprobamos que se satisfacen los cuatro axiomas en los que está involucrado el producto:

a) $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$ se cumple, es la propiedad distributiva de los números reales.

b) $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$, otra vez se trata de la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

c) $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$, esta es la propiedad asociativa de los números reales.

d) $1v=v$ es cierto ya que 1 es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}$.

Así que se satisfacen todos los axiomas de espacio vectorial y por lo tanto $(\mathbb{R},+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

4.4. Considera el conjunto de vectores $S=\{(1,2,1),(2,1,2)\}\subset\mathbb{Z}_3^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

Solución: Para ver si son linealmente independientes nos planteamos la ecuación vectorial:

$$\alpha(1,2,1)+\beta(2,1,2)=(0,0,0),$$

en la que tanto α como β son escalares de $\mathbb{Z}_3$. Si existe alguna solución diferente de $\alpha=\beta=0$ entonces el conjunto S es linealmente dependiente. Es fácil ver que $\alpha=1=\beta$ es solución, así que S es linealmente dependiente.

4.5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $S=\{u,v,w\}$ un sistema libre. ¿Es $T=\{u+v+w,v+3w,2v+w\}$ un sistema libre de vectores?

Solución:

Veamos que T es linealmente independiente, para ello tomamos una combinación lineal de vectores de S igual al vector $\mathbf{0}$ y demostramos que los coeficientes son todos cero:

$$\begin{aligned}&\alpha(u+v+w)+\beta(v+3w)+\gamma(2v+w)\\=\ &\alpha u+(\alpha+\beta+2\gamma)v+(\alpha+3\beta+\gamma)w=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\overset{S\text{ l.i.}}{\Rightarrow}\ \left\{\begin{array}{l}\alpha=0,\\ \alpha+\beta+2\gamma=0,\\ \alpha+3\beta+\gamma=0.\end{array}\right.$$

Como el sistema anterior es compatible y determinado (por tener su matriz asociada rango 3) se tiene que la única solución es $\alpha=\beta=\gamma=0$ y T es un sistema libre.

4.6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_5$ y sea $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. ¿Es $\{u + v + w, v + 3w, 2v + w\}$ un sistema libre de vectores?

Solución:

Veamos que T es linealmente dependiente y por lo tanto no es libre. Para ello basta con encontrar una combinación lineal de vectores de S igual al vector $\mathbf{0}$ y con no todos sus coeficientes cero:

$$\begin{aligned} 0(u + v + w) + 3(v + 3w) + 1(2v + w) \\ = 0v + 0w = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

4.7. Sean $\{u, v, w\}$ vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ ¿Forman $\{u+v, u+w, v+w\}$ una base de dicho espacio vectorial?

4.8. Decir si los siguientes vectores, de $\mathbb{Z}_5^4$ y $\mathbb{Z}_5^3$ respectivamente, son linealmente independientes:

(a) $\{(1, 0, 0, 2), (3, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$.
Solución: Son linealmente dependientes porque $2(1, 0, 0, 2)+(3, 0, 0, 1)+0(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ y no todos los escalares de esta combinación lineal son 0.

(b) $\{(1, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 1)\}$.
Solución: Son linealmente independientes porque al ponerlos en una matriz por filas, ésta tiene rango 3 al tener determinante diferente de cero, $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2.$

4.9. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$. Ver que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y dar una base de S. Si T es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, calcular los subespacios $S \cap T$ y $T \cap S$.

4.10. Sea $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Probar que el conjunto de vectores $T = \{v_1, v_2, w\} \subset \mathbb{R}^n$, donde $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ y $\alpha_3 \neq 0$ es linealmente independiente.

4.11. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}, \\ T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.

(b) Calcular $S \cap T$ y $S + T$, dando una base de dichos subespacios.

(c) ¿Es la suma $S + T$ directa?

4.12. Dados los subespacios de $\mathbb{Z}_5^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_5^3 : x = y = 0\}, \\ T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_5^3 : x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.
Solución: La matriz asociada al sistema que define S es:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la dimensión de S es $3 - \operatorname{rg} A = 3 - 2 = 1$.
Una base de S estará formada por un vector no nulo y que pertenezca a S:

$$\beta_S = \{(0, 0, 1)\}$$

.

Ahora calculamos los datos solicitados de T. La matriz asociada al sistema que define T es:

$$(C|d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la dimensión de S es $3 - \operatorname{rg} C = 3 - 1 = 2$.
Una base de T estará formada por dos vectores linealmente independiente que pertenezcan a T:

$$\beta_T = \{(1,0,4),(0,2,3)\}$$

.

(b) Calcular $S \cap T$ y $S + T$, dando una base de dichos subespacios.
Solución:

$$S \cap T$$

La matriz asociada al sistema que define este subespacio (unión de las ecuaciones que define a S y a T) es:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2^1(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3^2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $\dim S \cap T = 3 - \operatorname{rg} A = 0$, $S \cap T = \{(0,0,0)\}$ y $\beta_{S\cap T} = \emptyset$.

$$S + T$$

Utilizando la fórmula de Grassman se tiene: $\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 2 + 1 = 3$.
Por lo tanto $S + T = \mathbb{Z}_5^3$ y $\beta_{S+T} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(c) ¿Es la suma $S + T$ directa?
Solución: Sí porque la intersección $S \cap T = \{(0,0,0)\}$

(d) $\operatorname{Card} \mathbb{Z}_5^3$, $\operatorname{Card} S$ y $\operatorname{Card} T$.
Solución: $\operatorname{Card} \mathbb{Z}_5^3 = 5^3 = 125 = \operatorname{Card} T$.

4.13. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales generados por $S_1 = \{(1,1,1,1),(1,-1,-1,1)\}$ y $S_2 = \{(1,1,0,1),(1,2,-1,$
respectivamente. Calcular:

(a) La base y la dimensión de $< S_1 >$ y $< S_2 >$.
(b) Calcular $< S_1 > \cap < S_2 >$ y $< S_1 > + < S_2 >$ dando bases de dichos subespacios.
(c) ¿Pertenece el vector $(4,0,-2,1)$ a $< S_1 > \cap < S_2 >$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto a la base obtenida en la parte (b).
(d) ¿Pertenece el vector $(4,0,-2,1)$ a $< S_1 > + < S_2 >$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto a la base obtenida en la parte (b).

4.14. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}, \\ T &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y, 2z = t\}, \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.
(b) Calcular $S \cap T$ y $S + T$ dando unas bases de dichos subespacios.

4.15. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, estudiar si los siguientes conjuntos de matrices son subespacios vectoriales. En caso de que sean subespacios vectoriales, calcular las ecuaciones cartesianas de estos respecto de la base:

$$\beta = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) $M_1 = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\ /\ A \text{ es simétrica}\}$

Solución: M_1 es un subespacio vectorial ya que:

- Si $A, B \in M_1$ entonces $A^t = A$ y $B^t = B$. Por lo tanto $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, es decir, $A + B \in M_1$.
- Si $A \in M_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $A^t = A$ y $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$, es decir, $\alpha A \in M_1$.

Calculamos ahora las ecuaciones de M_1 respecto de la base β: sea $H \in M_1$ con coordenadas en β las que siguen:

$$H = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Como $H^t = H$ entonces $y = z$, es decir, $y - z = 0$. Ésta es la ecuación lineal homogénea que satisfacen las coordenadas de los vectores de M_1 en la base β.

Calculamos ahora una base del subespacio M_1. Si S es la matriz asociada al sistema que define a M_1, la dimensión de M_1 es $\dim M_{2\times2}(\mathbb{R}) - \operatorname{rg} S = 4 - 1 = 3$.

Así que basta con dar 3 vectores linealmente independientes de M_1 para tener una base:

$$\beta_{M_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $M_2 = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\ /\ A^2 = A\}$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$, pero $5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_2$, así que M_2 no es un subespacio vectorial.

c) $M_3 = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\ /\ \det(A) = 0\}$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3$, pero $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M_3$, así que M_3 no es un subespacio vectorial.

d) $M_4 = \{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\ /\ a \in \mathbb{R}\ \}$

Solución: M_4 es un subespacio vectorial porque:

- Si $A, B \in M_4$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, así que: $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in M_4$.
- Si $A \in M_4$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $\alpha A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha a \end{pmatrix} \in M_4$.

Como cualquier elemento de M_4 es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\beta_{M_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de M_4 al ser un sistema generador y linealmente independiente.

4.16. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

(a) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\right\}$.
Solución: Es un subespacio vectorial por ser sus elementos las soluciones de un sistema lineal homogéneo. Además la dimensión es 3 menos el rango de la matriz que define el sistema, es decir la dimensión es $3 - 1 = 2$.

(b) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\right\}$.
Solución: No es un subespacio vectorial porque $(1, 0, 0) \in W$ pero $2(1, 0, 0) \notin W$.

(c) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\right\}$.
Solución: Es un subespacio vectorial por ser sus elementos las soluciones de un sistema lineal homogéneo. Además la dimensión es 3 menos el rango de la matriz que define el sistema, es decir la dimensión es $3 - 2 = 1$.

(d) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \ y \ x_3 - x_2 = 0\right\}$.
Solución: Es un subespacio vectorial por ser sus elementos las soluciones de un sistema lineal homogéneo. Además la dimensión es 3 menos el rango de la matriz que define el sistema, es decir la dimensión es $3 - 2 = 1$.

(e) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2^2 = 0\right\}$.
Solución: No es un subespacio vectorial porque $(-1, 1, 0) \in W$ pero $5(-1, 1, 0) \notin W$.

4.17. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{Z}_5^3$ son subespacios vectoriales:

(a) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2 = 0\right\}$.
Solución: Por los mismos motivos que en el ejercicio anterior (el mismo apartado) W es un subespacio vectorial. La dimensión sigue siendo la misma por un razonamiento análogo.

(b) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\right\}$.
Solución: No es un subespacio vectorial porque $(1, 0, 0) \in W$ pero $2(1, 0, 0) \notin W$.

(c) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 = x_2 = 0\right\}$.
Solución: Por los mismos motivos que en el ejercicio anterior (el mismo apartado) W es un subespacio vectorial. La dimensión sigue siendo la misma por un razonamiento análogo.

(d) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2 = 0 \text{ y } x_3 - x_2 = 0\right\}$.
Solución: Por los mismos motivos que en el ejercicio anterior (el mismo apartado) W es un subespacio vectorial. La dimensión sigue siendo la misma por un razonamiento análogo.

(e) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 : x_1 + x_2^2 = 0\right\}$.
Solución: No es un subespacio vectorial porque $(4, 1, 0) \in W$ pero $2(4, 1, 0) = (3, 2, 0) \notin W$ ya que $3 + 2^2 = 3 + 4 = 2 \neq 0$.

(f) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_3^3 : x_1(x_1^2 + 2) = 0\right\}$.
Solución: Busquemos otra descripción del conjunto W. El vector $(x, y, z) \in W$ si y sólo si $x(x^2 - 1) = 0$, así que $x = 0$ ó $x^2 = 1$. Además la ecuación $x^2 = 1$ se satisface para los valores de $x = 1$ y $x = 2$.
Así que $W = \mathbb{Z}_3^3$ y por lo tanto es un subespacio vectorial.

4.18. Dado un espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{K}$, y dados dos subespacios vectoriales W_1, W_2 de V, demostrar que $W_1 \cap W_2$ es subespacio vectorial de V. Dar un ejemplo que ponga de manifiesto que $W_1 \cup W_2$ no tiene porque ser subespacio vectorial.

4.19. Decir si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes:

(a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.

(b) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.

(c) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 0, 0)\}$.

4.20. Extraer un conjunto linealmente independiente de los conjuntos del ejercicio **4.19**.

4.21. ¿Alguno de los conjuntos del ejercicio **4.19** son una base de $\mathbb{R}^4$?.

4.22. Calcular el subespacio vectorial generado por los conjuntos del ejercicio **4.19**.

4.23. Se considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial W cuyas ecuaciones respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ son:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Si se elige una nueva base $\mathcal{B}' = \{u_1 - u_2,\ u_2 - u_3,\ u_3 - u_4,\ u_4\}$

a) Calcula las matrices de cambio de base $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ y $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

b) Calcula las ecuaciones de W respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Obtén las coordenadas de $v = u_1 - u_2$ respecto de $\mathcal{B}'$. ¿Pertenece este vector a W?.

d) Calcula la dimensión de W y dos bases de este subespacio vectorial, una con vectores cuyas coordenadas estén expresadas en la base $\mathcal{B}$ y otra con vectores expresados en la base $\mathcal{B}'$.

e) ¿Son los vectores $(1, 2, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ y $(3, 6, 3, 0)_{\mathcal{B}'}$ linealmente dependientes?

f) Sea W' el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ y $(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$. Calcula las ecuaciones de este subespacio respecto a la base $\mathcal{B}$ y después respecto a la base $\mathcal{B}'$.

g) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones de $W \cap W'$.

h) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones de $W + W'$.

i) ¿Es la suma $W + W'$ directa?

4.24. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ y $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ calcular:

(a) Un conjunto generador linealmente independiente de W_1 y W_2.

(b) Calcular $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

(c) ¿Es la suma de W_1 y W_2 directa?.

(d) Calcular las dimensiones de $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

4.25. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Demostrar que el conjunto de vectores $\mathcal{B}' = \{u_1, ..., u_n\}$ dado por $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2, ..., u_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ es también una base de V.

4.26. Sea $P_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que cuatro. Dadas las siguientes bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{x,\ x^2+1,\ 2x^4+x^3,\ x^3-x^2+x,\ x^2+x\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{2x^4+1,\ x^3-1,\ x^3+2x,\ x^2,\ x^3-x^2\}$$

a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Solución: Recurrimos a la definición y calculamos las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1$. Para simplificar la notación denotaremos a los vectores de ambas bases como sigue:

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}.$$

$$\begin{aligned}
v_1 = 2x^4+1 = 3u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - 2u_5 &= (3, 1, 1, -1, -2)_{\mathcal{B}_1},\\
v_2 = x^3 - 1 = -3u_1 - u_2 + u_4 + 2u_5 &= (-3, -1, 0, 1, 2)_{\mathcal{B}_1},\\
v_3 = x^3 + 2x = u_4 + u_5 &= (0, 0, 0, 1, 1)_{\mathcal{B}_1},\\
v_4 = x^2 = -u_1 + u_5 &= (-1, 0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}_1},\\
v_5 = x^3 - x^2 = -u_1 + u_4 &= (-1, 0, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}_1},
\end{aligned}$$

Así que:

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Halla las coordenadas respecto de dichas bases del polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Solución: Calculamos primero las coordenadas de $p(x)$ en la base $\mathcal{B}_2$:

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + 2v_4 + v_5 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right)_{\mathcal{B}_2}$$

Ahora para calcular las coordenadas del vector en $\mathcal{B}_1$ basta con hacer la multiplicación:

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right)^t_{\mathcal{B}_2} = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t_{\mathcal{B}_1}$$

4.27. Sean a y b dos números reales con $b \neq 0$. Se considera el conjunto E de todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tales que

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

a) Comprobar por inducción que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ queda determinada por la relación de recurrencia anterior cuando se conocen sus dos primeros términos x_1, x_2.

Solución: Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : x_n \text{ está definido}\}$. Entonces está claro que $1 \in S$. Además si $\{1, 2, \ldots, k\} \in S$ entonces $k + 1 \in S$ ya que:

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1}.$$

Así que por el principio de inducción $S = \mathbb{N}$.

b) Comprobar que el conjunto E tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que la dimensión de E es 2.

Solución: E es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Así que bastará con ver que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Para ello comprobamos que la suma de dos vectores de E es un vector de E y que el producto de un vector de E por un escalar es un vector de E.

- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ y $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ entonces:

  $$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \text{ y } v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots.$$

  Sumando ahora las dos ecuaciones anteriores:

  $$u_n + v_n = a(u_{n-1} + v_{n-1}) + b(u_{n-2} + v_{n-2}), \quad n = 3, 4, 5, \ldots.$$

  Así que $u + v \in E$.
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

  $$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots.$$

  Multiplicando la ecuación anterior por α:

  $$\alpha u_n = a\alpha u_{n-1} + b\alpha u_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots.$$

  Así que $\alpha u \in E$.

Por último comprobamos que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de E que verifica $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ y $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión que verifica $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, entonces el conjunto $\beta = \{u, v\}$ es una base de E. Hacemos notar que ambas sucesiones están bien definidas según se ha visto en el apartado anterior.

Ahora probamos que β es una base viendo que es un sistema linealmente independiente y generador. Para ver que β es generador cogemos un vector $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ y vemos que es combinación lineal de los vectores de β. En efecto:

$$w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = w_1(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + w_2(v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Por otro lado β es linealmente independiente ya que si tomamos una combinación lineal de vectores de β igual a cero:

$$\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbf{0}$$

entonces todos los miembros de la sucesión son cero, en concreto los dos primeros: $\lambda u_1 = \lambda = 0$ y $\mu u_2 = \mu = 0$, es decir, los escalares involucrados en la combinación lineal son todos 0.

Así que E tiene dimensión 2.

c) Para hallar una base de este espacio vectorial se considera la ecuación de segundo grado, llamada ecuación característica, $r^2 = ar + b$.

1) Demostrar que si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas α y β, las sucesiones $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituyen una base de E.

   Solución: Empezaremos probando que ambas sucesiones pertenecen efectivamente a E. Hacemos sólo la demostración para $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, el caso de $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es análogo. Para probar esto hay que ver que $\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2}$.

   Por ser $b \neq 0$ entonces $\alpha \neq 0$ y por otro lado $\alpha^2 = a\alpha + b$. Si multiplicamos la ecuación anterior por α^{n-2} se obtiene lo que queríamos demostrar.

   Ahora vemos que las dos sucesiones son linealmente independientes y por lo tanto serán una base por tener E dimensión 2.

   Tomamos una combinación lineal de ambas sucesiones igual a la sucesión cero y después vemos que los coeficientes son ambos cero.

   $$\lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$$

Igualamos los dos primeros miembros de ambas sucesiones:

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0$$
$$\lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 = 0$$

Como $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\beta - \alpha) \neq 0$ entonces el sistema anterior es compatible y determinado y por lo tanto $\lambda = \mu = 0$.

2) Demostrar que si la ecuación característica tiene sus dos raíces complejas conjugadas $\alpha = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, $\beta = \rho(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$ entonces las sucesiones reales $(\rho^n \cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\rho^n \operatorname{sen} n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base de E.

3) Demostrar que si la ecuación característica tiene una raíz doble α, las sucesiones $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituyen una base de E.
Solución: Empezaremos probando que ambas sucesiones pertenecen efectivamente a E. Hacemos sólo la demostración para $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, el caso de $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se hace igual que en el primera apartado. Para probar esto hay que ver que $n\alpha^n = a(n-1)\alpha^{n-1} + b(n-2)\alpha^{n-2}$.
Por ser $b \neq 0$ entonces $\alpha \neq 0$ y la ecuación anterior es (dividiendo por α^{n-2}) equivalente a la ecuación $n\alpha^2 = a(n-1)\alpha + b(n-2)$.
Como α es solución de la ecuación característica tenemos que $\alpha^2 = a\alpha + b$ y multiplicando por n: $n\alpha^2 = na\alpha + nb = a(n-1)\alpha + (n-2)b + a\alpha + 2b$. Así que es suficiente con demostrar que $a\alpha + 2b = 0$.
α es solución doble de la ecuación $r^2 - ar - b = 0$, por lo tanto:

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$
$$a^2 + 4b = 0$$
$$\alpha = \frac{a}{2}$$

Ahora evaluamos la cantidad $a\alpha + 2b$:

$$a\alpha + 2b = a\frac{a}{2} + 2b = \frac{a^2 + 4b}{2} = 0.$$

4.28. Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)\},$$

$$\beta_C = \{w_1 = (1,1,0), w_2 = (0,1,1), w_3 = (0,0,1)\}, \quad B = \{(2,2,1)_{\beta_C}\}$$

y se pide:

a) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$.
Solución: Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_C respecto a β_A. Calculamos esas coordenadas:

- $w_1 := (1,1,0) = 2v_1 - v_2 - v_3 = (2,-1,-1)_{\beta_A}$,
- $w_2 := (0,1,1) = v_2 = (0,1,0)_{\beta_A}$,
- $w_3 := (0,0,1) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1,1,1)_{\beta_A}$.

Así que:

$$M_{\beta_A\beta_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$.
Solución: Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_A respecto a β_C.

- $v_1 := (1,1,1) = w_1 + w_3 = (1,0,1)_{\beta_C}$,
- $v_2 := (0,1,1) = w_2 = (0,1,0)_{\beta_C}$,

- $v_3 := (1,0,1) = w_1 - w_2 + 2w_3 = (1,-1,2)_{\beta_C}$,

así que:

$$M_{\beta_C\beta_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A.
Solución: Usando la matriz $M_{\beta_A\beta_C}$ es fácil calcular esas coordenadas:

- $\left[M_{\beta_A\beta_C}(2,2,1)^t_{\beta_C}\right]^t = (3,1,-1)_{\beta_A}$.

Por lo tanto:

$$B = \{(3,1,-1)_{\beta_A}\}.$$

d) Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A.
Solución:
Antes de nada tenemos claro que se necesitan dos ecuaciones (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de $< B >$).
Un vector $(x,y,z)_{\beta_A} \in < B >$ si y sólo si

$$(x,y,z)_{\beta_A} = \alpha(3,1,-1)_{\beta_A} = (3\alpha,\alpha,-\alpha)_{\beta_A}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\alpha, \\ y = \alpha, \\ z = -\alpha \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 0, \\ y + z = 0. \end{array} \right.}$$

4.29. Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}, \quad \beta_C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$
$$B = \{(1,2,1),(0,1,0)\}$$

y se pide:

a) Comprobar que β_A es una base de $\mathbb{R}^3$,
Solución: Para comprobar que es una base basta con ver que el determinante que de la matriz formada al poner los vectores de β_A por columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$.
Solución: Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_C respecto a β_A. Calculamos esas coordenadas (para simplificar la notación denotaremos a los vectores de la base β_A por v_1, v_2 y v_3):

- $e_1 = (1,0,0) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_{\beta_A}$,
- $e_2 = (0,1,0) = v_2 - v_3 = (0,1,-1)_{\beta_A}$,
- $e_3 = (0,0,1) = v_3 = (0,0,1)_{\beta_A}$.

Así que:

$$M_{\beta_A\beta_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$.
Solución: Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_A respecto a β_C. Así que:

$$M_{\beta_C\beta_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A.
Solución: Usando la matriz $M_{\beta_A\beta_C}$ es fácil calcular esas coordenadas:

- $[M_{\beta_A\beta_C}(1,2,1)^t]^t = (1,2,-2)_{\beta_A}$.
- $[M_{\beta_A\beta_C}(0,1,0)^t]^t = (0,1,-1)_{\beta_A}$.

Por lo tanto:
$$B = \{(1,2,-2)_{\beta_A}, (0,1,-1)_{\beta_A}\}.$$

e) Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A.
Solución:
Antes de nada tenemos claro que se necesita 1 ecuación (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de $< B >$).
Un vector $(x,y,z)_{\beta_A} \in < B >$ si y sólo si
$$(x,y,z)_{\beta_A} = \alpha(1,2,-2)_{\beta_A} + \beta(0,1,-1)_{\beta_A} = (\alpha, 2\alpha+\beta, -2\alpha-\beta)_{\beta_A}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = 2\alpha+\beta, \\ z = -2\alpha-\beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{y+z=0.}$$

4.30. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:
$$S = < (1,0,0,0), (0,1,1,1) > \quad \text{y} \quad T = \{(x,y,z,t) : x = 0, 2y-z-t = 0\}$$
y se pide:

a) Una base, la dimensión y las ecuaciones de S.
Solución: Los dos vectores que generan S también son linealmente independientes, por lo tanto son una base de S:
$$\beta_S = \{(1,0,0,0), (0,1,1,1)\}.$$
Ahora calculamos las ecuaciones que debe satisfacer un vector $(x,y,z,t) \in S$:
$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,1,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \beta, \\ t = \beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} y-z=0, \\ y-t=0 \end{array} \right.}$$

b) Una base y la dimensión de T.
Solución: Como la dimensión de T es 2 (dim$\mathbb{R}^4$-número de ecuaciones linealmente independientes que definen a T) bastará con encontrar dos vectores linealmente independientes en T para dar una base:
$$\beta_T = \{(0,0,1,-1), (0,1,2,0)\}.$$

c) Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S \cap T$.
Solución: Las ecuaciones de $S \cap T$ se obtienen como la unión de las ecuaciones de S con las ecuaciones de T:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ 2y-z-t = 0, \\ y-z = 0, \\ y-t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$
$$\begin{array}{c} F_2 - F_3 - F_4 \\ \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y-z = 0, \\ y-t = 0 \end{array} \right.}$$
Así que dim$S \cap T = 4 - \text{rg}\, A = 1$ (A es la matriz asociada al sistema que define $S \cap T$).
Ahora obtenemos la base de $S \cap T$:
$$\beta_{S \cap T} = \{(0,1,1,1)\}.$$

d) Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S+T$.
Solución:
Usando la fórmula de Grassman se tiene que:

$$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S\cap T = 2+2-1=3.$$

Un conjunto generador de $S+T$ se obtiene uniendo conjuntos generadores de S y de T, es decir:

$$S+T = <(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,-1),(0,1,2,0)>,$$

de estos cuatro vectores ahora nos quedamos con tres que sean linealmente independientes y tendremos una base de $S+T$. Es fácil darse cuanta que los tres primeros vectores son linealmente independientes, luego:

$$\beta_{S+T} = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,-1)\}.$$

Acabamos dando las ecuaciones que satisface el subespacio $S+T$, para ello tomamos $(x,y,z,t)\in S+T$ y recordamos que necesitamos 1 ecuación ($\dim\mathbb{R}^4 - \dim S+T$), entonces:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,1,1)+\gamma(0,0,1,-1) = (\alpha,\beta,\beta+\gamma,\beta-\gamma) \tag{.1}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\alpha,\\ y=\beta,\\ z=\beta+\gamma,\\ t=\beta-\gamma. \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{z+t-2y=0.} \tag{.2}$$

e) Dada la base $\beta = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, justifica si el vector $(1,2,3,4)_\beta$ pertenece a alguno de los subespacios $S, T, S\cap T, S+T$.
Solución: Obtenemos fácilmente las coordenadas del vector $(1,2,3,4)_\beta$ en la base canónica:

$$(1,2,3,4)_\beta = (1,0,0,0)+2(1,1,0,0)+3(1,1,1,0)+4(1,1,1,1) = (10,9,7,4).$$

Se comprueba fácilmente que este vector no satisface las ecuaciones de ninguno de los subespacios dados. Así que $(1,2,3,4)_\beta$ no pertenece a ninguno de los subespacios propuestos.

V. Aplicaciones lineales

5.1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=(x-y,2x-y^2)$.
b) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y,z,u)=(x-y,\ u+z,\ z,\ 2x-y)$.
c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y)=(x-y,\ x-2y,\ 3y)$.
d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z)=(x-z+y,\ 2x-y-3z,\ z+y)$.

5.2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean f y g dos aplicaciones lineales de V en V de manera que para una base $\mathcal{B}=\{u_1,u_2)$ se tiene que:

$$f(u_1)=u_2 \quad f(u_2)=u_1 \qquad g(u_1)=-u_1 \quad g(u_2)=u_2$$

Demuestra que en estas condiciones las aplicaciones $f\circ g$ y $g\circ f$ son distintas.

5.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $f:V\longrightarrow V$ una aplicacion lineal. Se define el **conjunto invariante** de f, denotado $\mathrm{Inv}(f)$, como el conjunto de vectores los vectores v que permanecen invariantes por la aplicación, es decir,

$$\mathrm{Inv}(f)=\{v\in V: f(v)=v\}$$

Demuestra que el conjunto invariante de una aplicación lineal es un subespacio vectorial.

5.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$.

Solución: $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ por ser $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores del núcleo, así que $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y por lo tanto $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$.

5.5. Dada una aplicación lineal $f : V \to V$ con V un K-espacio vectorial, demuestra que $f^2 = 0$ (es decir, $f \circ f$ es la aplicación nula) si y solo si $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.

5.6. Sea $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial V y sea:

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1,\, u_1 + u_2,\, u_1 + u_2 + u_3,\, u_1 + u_2 + u_3 + u_4\}$$

Se pide:

a) Demostrar que $\mathcal{B}_2$ es una base de V.

b) Encontrar la matriz de cambio de base.

c) Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_1$ de un vector cuyas coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_2$ son $(1, -1, 0, 1)$.

5.7. Consideremos la aplicación $D : P_4[x] \longrightarrow P_3[x]$ de forma que si $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_4[x]$, se tiene que:

$$Dp(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

a) Prueba que D es una aplicación lineal.

b) Encuentra la matriz de D asociada a las bases canónicas de $P_4[x]$ y $P_3[x]$.

c) Si sobre $P_4[x]$ se considera la base

$$\mathcal{B} = \{(1+x)^4,\, (1+x)^3x,\, (1+x)^2x^2,\, (1+x)x^3,\, x^4\}$$

obtén la matriz de D en esta nueva base y la base canónica de $P_3[X]$.

5.8. Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\square}(g) = M_{\beta_8\square}M_{\square\beta_6}(g)M_{\beta_1\square}$;

b) $M_{\beta_3\beta_5}(g) = M_{\square\square}M_{\beta_1\beta_8}(g)M_{\square\square}$.

Solución:

$$M_{\beta_1\beta_8}(g) = M_{\beta_8\beta_6}M_{\beta_1\beta_6}(g)M_{\beta_1\beta_1}$$

$$M_{\beta_3\beta_5}(g) = M_{\beta_5\beta_8}M_{\beta_1\beta_8}(g)M_{\beta_1\beta_3}$$

5.9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida respecto a esta base por la relación:

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$$

Se pide que:

a) Calcules la matriz de f respecto a la base $\mathcal{B}$.

b) Encuentres los vectores invariantes de f (ver ejercicio **5.3**.).

c) Calcules el núcleo y la imagen de f.

d) Determines una base de $\operatorname{Ker}(f)$ y la amplíes a una base de $\mathbb{R}^3$.

e) Halles la matriz de f respecto a esta nueva base.

f) Calcules el rango de f.

5.10. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por:

$$\begin{aligned} g(-1,1,3) &= (6,-4,16) \qquad g(-2,1,1) = (-2,-5,1) \\ g(3,2,-1) &= (1,14,-12) \end{aligned}$$

Se pide hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, las ecuaciones del núcleo y la imagen de f y una base de ambos subespacios. Calcula además el rango de f.

5.11. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$\begin{array}{ll} f(1,1,1,1) = (0,0,1) & f(1,0,1,0) = (1,1,-1) \\ f(1,1,1,0) = (0,0,-1) & f(-1,-2,0,0) = (1,1,1) \end{array}$$

Se pide calcular:

a) La matriz de f respecto a las bases canónicas.

b) La dimensión y ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

c) La matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),\,(1,0,1),\,(1,1,0)\}$$

así como las ecuaciones de la imagen de f en esta última base.

d) La matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,$ de $\mathbb{R}^3$, así como las ecuaciones del núcleo y la imagen de f en estas bases.

e) El rango de la aplicación.

5.12. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) La expresión analítica de f en las bases canónicas.

b) El núcleo y la imagen de f.

c) La matriz de f respecto a las bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),\,(1,1,1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1),\,(0,2)\}$.

d) El rango de f.

e) Dos bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$ de manera que la matriz de f asociada a dichas bases es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.13. Sean g y f las aplicaciones lineales de los ejercicios **5.10** y **5.11**. Calcula la matriz de la aplicación compuesta $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. Calcula además el rango, el núcleo, la imagen y el espacio invariante de dicha aplicación.

5.14. Se considera la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (x+y,y,0) \end{array}$$

a) Demuestra que f es lineal.

b) Halla la dimensión de los subespacios $\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ así como bases de los mismos.

c) Representa gráficamente los dos subespacios anteriores.

5.15. Contesta de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones,

a) Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal y $v \in V$ de forma que $f(v) = f(-v)$, entonces $v = 0$.

b) Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal tal que $\dim(\,\mathrm{Ker}(f)) > 0$, entonces f^{-1} es una aplicación.

c) Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$, si f es suprayectiva, se tiene entonces que $\dim(V) \geq \dim(W)$.

d) Si $f : V \longrightarrow V$, entonces $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

e) Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

representan el mismos endomorfismo respecto de bases diferentes.

5.16. Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabiendo que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array} \}$$

y $f(1,0,0) = (-1,2,0)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$.

5.17. * Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base. Para cada $1 \leq i \leq n$ se define una aplicación lineal, $u_i : V \longrightarrow K$ de forma que:

$$u_i(e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Si V^* es el conjunto de las aplicaciones lineales de V en K (llamado espacio dual de V), prueba que

a) V^* es un espacio vectorial sobre K.

b) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V^*.

c) La aplicación,

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & V & \longrightarrow & V^* \\ & x & \mapsto & \Gamma x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, u_i \end{array}$$

es un isomorfismo entre los espacios vectoriales V y V^*.

5.18. * Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se consideran las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ & (x,y,z) & \mapsto & F(x,y,z) = x\,\mathrm{sen}^2(t) + y\cos^2(t) + z \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} G : & \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \phi & \mapsto & G(\phi) = (\phi(0), \phi(-\frac{\pi}{2})) \end{array}$$

a) Comprueba que ambas aplicaciones son lineales.

b) calcula sus núcleos y sus imágenes.

c) Comprueba que $\{\mathrm{sen}^2(t), \cos^2(t)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(F)$.

d) Halla el núcleo de $G \circ F$.

- Sugerencia: Para una mejor formación, se sugiere hacer problemas del libro: Problemas de Algebra volumen 3 de los autores Anzola, Caruncho y Pérez–Canales

5.19. *(2007, ITOP)* Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal de la que sabemos que

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y que $(1,0,-1,-1) \in \mathrm{Ker}\, f$. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se pide:

a) Encontrar los valores a, b y c.

Solución: Utilizaremos que $(1,0,-1,-1) \in \operatorname{Ker} f$:

$$f(1,0,-1,-1)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ -1-b \\ c-1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

así que $a = 1$,$b = -1$ y $c = 1$.

b) Encontrar las ecuaciones, bases y dimensiones de los espacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

Solución:

$\boxed{\text{Cálculo de } \operatorname{Ker} f}$

Un vector (x, y, z, t) estará en $\operatorname{Ker} f$ si y sólo si se verifican las siguientes ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Las matrices que siguen también definen todas a las ecuaciones que dan el $\operatorname{Ker} f$ en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que las ecuaciones se pueden escribir simplificadamente como sigue:

$$2x + y + z + t = x + y + z = 0.$$

La dimensión de $\operatorname{Ker} f$ será $4 - \operatorname{rg} M_{\beta_c^4 \beta_c^4} = 4 - 2 = 2$. Y una base de $\operatorname{Ker} f$ es:

$$\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,-1,0,-1), (0,-1,1,0)\}$$

$\boxed{\text{Cálculo de } \operatorname{Im} f}$

Podemos calcular de manera sencilla la dimensión de $\operatorname{Im} f$, esta será $4 - \dim \operatorname{Ker} f = 2$.
Recordamos que las columnas de la matriz $M_{\beta_c^4 \beta_c^4}$ generan $\operatorname{Im} f$, así que dos de ellas linealmente independientes serán una base:

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1,1,-1,0), (1,0,1,1)\}.$$

Un vector $(x, y, z, t) \in \operatorname{Im} f$ si y sólo si $(x, y, z, t) = \alpha(1,1,-1,0) + \beta(1,0,1,1)$. Así que: $x = \alpha + \beta; y = \alpha; z = -\alpha + \beta; t = \beta$ y eliminando parámetros obtenemos dos ecuaciones cartesianas $x - y - t = z + y - t = 0$.

c) Demostrar que $\beta = \{v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,1,1,0), v_3 = (0,1,0,1), v_4 = (1,0,-1,0)\}$ es una base y calcular $M_{\beta\beta}(f)$.

Solución: β es una base ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$. Para obtener la matriz solicitada usamos la relación:

$$M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta_c^4} M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(f) M_{\beta_c^4 \beta}.$$

Es fácil calcular

$$M_{\beta_c^4 \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y ahora

$$M_{\beta\beta_c^4} = M_{\beta_c^4\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} M_{\beta\beta}(f) &= M_{\beta\beta_c^4} M_{\beta_c^4\beta_c^4}(f) M_{\beta_c^4\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 3 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & -1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Encontrar las ecuaciones de los espacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ respecto de la base β.
Solución:

$\boxed{\text{Cálculo de las ecuaciones de } \operatorname{Ker} f}$

Un vector $(x, y, z, t)_\beta$ está en $\operatorname{Ker} f$ si y sólo si $M_\beta\beta(x, y, z, t)^t_\beta = \mathbf{0}$. Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & -1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Como $\dim\operatorname{Ker} f = 2$ sólo necesitamos 2 ecuaciones linealmente independientes para definir a $\operatorname{Ker} f$. Éstas pueden ser las dos primeras definidas por la relación matricial anterior:

$$\begin{cases} x + 6y + 2z - t = 0 \\ 3x + 2y + 2z + t = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Cálculo de las ecuaciones de } \operatorname{Im} f}$

Ya sabemos que $\dim\operatorname{Im} f = 2$ y por lo tanto necesitamos $4 - 2 = 2$ ecuaciones para determinar a este subespacio. Recordamos que las columnas de $M_{\beta\beta}(f)$ son un sistema generador de $\operatorname{Im} f$ y por lo tanto

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 1, 0, 1)_\beta, (3, 1, -1, -1)_\beta\}$$

Un vector $(x, y, z, t)_\beta$ está en $\operatorname{Im} f$ si y sólo si $(x, y, z, t)_\beta = \gamma(1, 1, 0, 1)_\beta + \delta(3, 1, -1, -1)_\beta$. Es decir:

$$\begin{cases} x = \gamma + 3\delta \\ y = \gamma + \delta \\ z = -\delta \\ t = \gamma - \delta \end{cases}$$

Eliminamos los parámetros y obtenemos las dos ecuaciones que necesitamos para definir a $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{cases} -y - 2z + t = 0 \\ x + 4z - t = 0 \end{cases}$$

e) Determinar, según los valores de m, el conjunto $f^{-1}(m, 0, m^2, -1) = \{(x, y, z, t) : f(x, y, z, t) = (m, 0, m^2, -1)\}$
Solución: Sea $(x, y, z, t) \in f^{-1}(m, 0, m^2, -1)$, entonces:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^4}(x, y, z, t)^t = (m, 0, m^2, -1)^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m^2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así que el vector (x, y, z, t) satisface los siguientes sistemas matriciales:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 1 & 1 & -1 & m^2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^2-m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-m \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m(m-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-m \end{array}\right) = (A|b)$$

Como $\operatorname{rg} A = 2 < \operatorname{rg}(A|b) = 3$ entonces el sistema es incompatible y $f^{-1}(m, 0, m^2, -1) = \emptyset$.

Considéresen las mismas cuestiones para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

5.20. Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal de la que sabemos que

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se pide:

a) Encontrar las ecuaciones, bases y dimensiones de los espacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

Solución:

$$\boxed{\operatorname{Ker} f}$$

Un vector $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Así que $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$ son:

$$\begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(-1, -1, 1, 1)\}$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 4 - 1 = 3$ y como $\operatorname{Im} f = < (1, 0, 1, 1), (0, 2, 1, 1), (2, 1, 0, 1), (-1, 1, 2, 1) >$
Es fácil ver que los tres primeros vectores son linealmente independientes, así que:

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 0, 1, 1), (0, 2, 1, 1), (2, 1, 0, 1)\}.$$

Ahora calculamos las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$. Sea $(x, y, z, t) \in \operatorname{Im} f$, entonces:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(0, 2, 1, 1) + \gamma(2, 1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow x = \alpha + 2\gamma, y = 2\beta + \gamma, z = \alpha + \beta, t = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow$$

b) Determinar bases β y β' tales que: $M_{\beta_c^4\beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Encontrar $M_{\beta\beta}(f)$ y $M_{\beta'\beta'}(f)$.

Considéresen las mismas cuestiones para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

5.21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ y que $f(0,0,1) = (-2,-1,0)$. Se pide:

a) Encuentra los valores de a, de b y de c.
Solución: Como $f(0,0,1)$ es el vector que está en la tercera columna de la matriz dada, se ve que $a = -1, b = -1, c = 0$.

b) Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcula $f(x,y,z)$.
Solución: $f(x,y,z) = [M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)(x,y,z)^t]^t = (x+y-z, x-z, 0)$.

c) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base canónica de $\operatorname{Ker} f$.
Solución:
Un vector $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si $f(x,y,z) = 0$, es decir, (x,y,z) satisface las ecuaciones $x+y-z = x-z = 0$, que claramente son linealmente independientes. Así que $\dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1$ y una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,0,1)\}$.

d) Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.
Solución: β es una base ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Para obtener la matriz solicitada usamos la relación:

$$M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta}.$$

Es fácil calcular

$$M_{\beta_c^3\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y ahora

$$M_{\beta\beta_c^3} = M_{\beta_c^3\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base β de $\operatorname{Ker} f$.
Solución: Un vector $(x,y,z)_\beta \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si $f((x,y,z)_\beta) = [M_{\beta\beta}(x,y,z)^t]^t = (-y-2z, z, y+z)_\beta = \mathbf{0}$, así que las ecuaciones del núcleo en la base β son $-y-2z = z = y+z = 0$. Como sólo se necesitaban dos linealmente independientes, nos quedamos con $z = y+z = 0$, que se pueden simplificar y queda $z = y = 0$. Ya sabíamos que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ y ahora $\beta'_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,0,0)_\beta\}$.

f) Calcula el vector $f((x,y,z)_\beta)$ expresando sus coordenadas en la base canónica. **Solución**:

$$f((x,y,z)_\beta) = [M_{\beta\beta}(x,y,z)^t]^t = (-y-2z, z, y+z)_\beta$$
$$= (-y-2z)(1,1,1) + z(0,1,1) + (y+z)(0,0,1) = (-y-2z, -y-z, 0).$$

Considéresen las mismas cuestiones para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

5.22. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ que verifica:

$$f(1,0,1) = (1,0), \quad f(0,1,1) = (2,3), \quad f(0,0,1) = (1,1).$$

En este ejercicio usaremos la notación β_A para denotar a la base definida en el ejercicio anterior. Además β_C^3 y β_C^2 serán respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Se pide:

a) Decir quiénes son n y k.
Solución: $n = 3$ y $k = 2$.

b) Calcular $M_{\beta_A \beta_C^2}(f)$.
Solución: De las imágenes que nos dan de los vectores de β_A obtenemos:

$$M_{\beta_A \beta_C^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Calcular $M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f)$.
Solución:

$$M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f) = M_{\beta_C^2 \beta_C^2} M_{\beta_A \beta_C^2}(f) M_{\beta_A \beta_C^3} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$.
Solución: Un vector (x,y,z) pertenece a $\operatorname{Ker} f$ si y sólo si $M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f)(x,y,z)^t = \mathbf{0}$. Así que:

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f) = 1$ y $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,-1)\}$.

e) Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$.
Solución: Sabemos que

$$\operatorname{Im} f =< (0,-1), (1,2), (1,1) > .$$

Como el primer y segundo vector forman un conjunto de vectores linealmente independientes y maximal entonces $\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(0,-1), (1,2)\}$. Así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y no se pueden dar ecuaciones de este subespacio.

5.23.

PROBLEMA DE REPASO

En este problema consideraremos los siguientes conjuntos:

$$\beta_1 = \{(1,0,1,0), (1,0,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1)\},$$
$$\beta_2 = \{(1,1,1,0), (1,1,0,0), (0,1,1,1), (0,0,1,1)\},$$
$$\beta_3 = \{(1,0,0,a), (1,0,1,1), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\},$$
$$\beta_4 = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,0,1)\},$$
$$\beta_5 = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\},$$
$$\beta_6 = \{(1,0,1), (0,0,-1), (0,1,1)\}$$

y las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ y $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definidas por:

- $f(x,y,z,t)_{\beta_1} = (x+y+z, x, y-t)_{\beta_4}$,

- $M_{\beta_4\beta_5}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $M_{\beta_4\beta_5}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que los conjuntos β_1, β_2 y β_3 son bases de $\mathbb{R}^4$.
Solución: Para ver que estos conjuntos son bases basta con poner los vectores por filas en una matriz y ver que el determinante es diferente de 0.
Para el conjunto β_1 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$
Para el conjunto β_2 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$
Para el conjunto β_3 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

b) Comprueba que los conjuntos β_4, β_5 y β_6 son bases de $\mathbb{R}^3$.
Solución: Igual que en el apartado anterior:
Para el conjunto β_4 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$
Para el conjunto β_5 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$
Para el conjunto β_6 tendríamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

c) Calcula las siguientes matrices:

$$M_{\beta_1\beta_2}, M_{\beta_2\beta_3}, M_{\beta_1\beta_3}, M_{\beta_4\beta_5}, M_{\beta_4\beta_6}, M_{\beta_5\beta_6}.$$

Solución:
Antes de empezar a calcular estas matrices adoptaremos la notación siguiente:
- v_i^j será el vector i-ésimo de la base β_j, para valores de i entre 1 y 4 y de j entre 1 y 3.
- w_i^j será el vector i-ésimo de la base β_j, para valores de i entre 1 y 3 y de j entre 4 y 6.

Así que con esta notación tenemos por ejemplo: $v_4^3 = (0,0,0,1)$ y $w_2^6 = (0,0,-1)$.

$$\boxed{M_{\beta_1\beta_2}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_2 en la base β_1:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 2v_1^1 - v_2^1 - v_3^1 + v_4^1 \\ v_2^2 &= 1v_1^1 + 0v_2^1 - v_3^1 + v_4^1 \\ v_3^2 &= 1v_1^1 - v_2^1 + 0v_3^1 + v_4^1 \\ v_4^2 &= 0v_1^1 + 0v_2^1 + 1v_3^1 + 0v_4^1 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_1\beta_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{M_{\beta_2\beta_3}}$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_3 en la base β_2:

$$\begin{aligned} v_1^3 &= -av_1^2 + (1+a)v_2^2 - v_3^2 + (1+a)v_4^2 \\ v_2^3 &= 0v_1^2 + 1v_2^2 - v_3^2 + 2v_4^2 \\ v_3^3 &= 1v_1^2 - v_2^2 + 1v_3^2 - v_4^2 \\ v_4^3 &= -1v_1^2 + 1v_2^2 + 0v_3^2 + 1v_4^2 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_2\beta_3} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 & -1 \\ 1+a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1+a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{M_{\beta_1\beta_3}}$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_3 en la base β_1:

$$\begin{aligned} v_1^3 &= -av_1^1 + (1+a)v_2^1 + av_3^1 + 0v_4^1 \\ v_2^3 &= 0v_1^1 + 1v_2^1 + 1v_3^1 + 0v_4^1 \\ v_3^3 &= 2v_1^1 - 2v_2^1 - 1v_3^1 + v_4^1 \\ v_4^3 &= -1v_1^1 + 1v_2^1 + 1v_3^1 + 0v_4^1 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_1\beta_3} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 2 & -1 \\ 1+a & 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{M_{\beta_4\beta_5}}$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_5 en la base β_4:

$$\begin{aligned} w_1^5 &= w_1^4 + 0w_2^4 - w_3^4 \\ w_2^5 &= 0w_1^4 + 1w_2^4 + 0w_3^4 \\ w_3^5 &= w_1^4 - w_2^4 + 0w_3^4 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_4\beta_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{M_{\beta_4\beta_6}}$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_6 en la base β_4:

$$\begin{aligned} w_1^6 &= 0w_1^4 + w_2^4 + w_3^4 \\ w_2^6 &= 0w_1^4 + 0w_2^4 - w_3^4 \\ w_3^6 &= w_1^4 - w_2^4 + 0w_3^4 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_4\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_5\beta_6}}$$

Para construir esta matriz hay que poner las coordenadas de los vectores de la base β_6 en la base β_5:

$$\begin{aligned} w_1^6 &= -w_1^5 + 2w_2^5 + w_3^5 \\ w_2^6 &= w_1^5 - w_2^5 - w_3^5 \\ w_3^6 &= 0w_1^5 + 0w_2^5 + 1w_3^5 \end{aligned}$$

Ahora ponemos estas coordenadas por columnas y obtenemos la matriz solicitada:

$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Dados los subespacios vectoriales

$$S = \{(x, y, z, t)_{\beta_3} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\} \text{ y } T =< (1, 2, 0, 1)_{\beta_2} >,$$

se pide:

- Calcular las dimensiones de S y T y bases de cada uno de los subespacios (se pide que las coordenadas de los vectores de esas bases estén dadas en la base β_1).
  Solución: Está claro que la dimensión de T es 1 porque viene generado por un único vector no nulo, que por tanto será una base de T. En cuanto a S se tiene que su dimensión es 4 menos el rango del sistema que lo define, es decir, $\dim S = 4 - 1 = 3$.
  Hemos dicho en el párrafo anterior que $\beta_T = \{(1, 2, 0, 1)_{\beta_2}\}$ es una base de T, pero necesitamos expresar el vector de β_T en la base β_1, para ello podemos utilizar la igualdad:

  $$(x, y, z, t)_{\beta_1} = [M_{\beta_1\beta_2}(1, 2, 0, 1)^t_{\beta_2}]^t,$$

  donde $(x, y, z, t)_{\beta_1}$ son las coordenadas del vector $(1, 2, 0, 1)_{\beta_2}$ en la base β_1. Haciendo el producto marcado se obtiene que $(1, 2, 0, 1)_{\beta_2} = (4, -1, -2, 3)_{\beta_1}$ y la base solicitada de T puede ser:

  $$\beta_T = \{(1, 2, 0, 1)_{\beta_2}\} = \{(4, -1, -2, 3)_{\beta_1}\}$$

  Para encontrar una base de S podríamos utilizar sus ecuaciones, pero esto nos daría una base con coordenadas en β_3 y luego tendríamos que cambiar éstas a la base β_1. Otra opción sería expresar las ecuaciones de S respecto de la base β_1 y luego obtener la base. Este es el procedimiento que vamos a usar porque con él respondemos parcialmente a la siguiente pregunta. Para calcular las ecuaciones de S respecto de la base β_1 tomamos un vector $u = (x', y', z', t')_{\beta_1} \in S$ y buscamos las ecuaciones que satisfacen x', y', z', t'. Empezamos calculando las coordenadas del vector u en β_3 ($u = (x, y, z, t)_{\beta_3}$):

  $$\begin{aligned} (x, y, z, t)^t_{\beta_3} = M_{\beta_3\beta_1}(x', y', z', t')^t_{\beta_1} = M^{-1}_{\beta_1\beta_3}(x', y', z', t')^t_{\beta_1} = \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & a & 2-a \end{pmatrix} (x', y', z', t')^t_{\beta_1} = \\ (y' - z' + t', x' + z' - t', t', -x' - ay' + az' + (2 - a)t')^t_{\beta_3}. \end{aligned}$$

  Así que:

  $$\begin{aligned} x &= y' - z' + t', \\ y &= x' + z' - t', \\ z &= t', \\ t &= -x' - ay' + az' + (2 - a)t' \end{aligned}$$

y las ecuaciones de S en β_1 son:

$$\begin{aligned} 0 &= x+y+z+t \\ &= y'-z'+t'+x'+z'-t'+t'-x'-ay'+az'+(2-a)t' \\ &= \boxed{(1-a)y'+az'+(3-a)t'=0}. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que obtener tres vectores de S linealmente independientes y que satisfagan las ecuaciones últimas obtenidas. Estos vectores pueden ser, por ejemplo, $(1,0,0,0)_{\beta_1}, (0,0,a-3,a)_{\beta_1}, (0,3,2,-1)_{\beta_1}$ y

$$\beta_S = \{(1,0,0,0)_{\beta_1}, (0,0,a-3,a)_{\beta_1}, (0,3,2,-1)_{\beta_1}\}$$

- Calcula las ecuaciones cartesianas de S y de T en la base β_1.
  Solución: Las ecuaciones de S en la base β_1 ya las hemos calculado en el apartado anterior, eran:

  $$S = \{(x',y',z',t')_{\beta_1} \in \mathbb{R}^4 : (1-a)y'+az'+(2-a)t'=0\}.$$

  Para calcular las ecuaciones de T en la base β_1 seguimos el procedimiento usual. Tomamos $(x',y',z',t')_{\beta_1} \in T$, por lo tanto $(x',y',z',t')_{\beta_1} = \alpha(4,-1,-2,3)_{\beta_1}$. Ahora tenemos que eliminar el parámetro α y obtener 3 ecuaciones homogéneas que definan a T:

  $$\begin{aligned} & x' = 4\alpha, y' = -\alpha, z' = -2\alpha, t' = 3\alpha \\ \Rightarrow & \boxed{x'+4y' = z'-2y' = t'+3y' = 0.} \end{aligned}$$

- Calcula los espacios $S \cap T$ y $S+T$ (da las ecuaciones de ambos espacios en la base β_1 y bases cuyos vectores tengan sus coordenadas expresadas respecto a β_1).
  Solución:

  $$\boxed{S \cap T}$$

  Las ecuaciones de la intersección son:

  $$(1-a)y'+az'+(2-a)t' = x'+4y' = z'-2y' = t'+3y' = 0,$$

  este sistema tiene como matriz asociada a:

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-a & a & 2-a & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

  que tiene rango[1] 4 si $a \neq \frac{5}{4}$ y tiene rango 3 si $a = \frac{5}{4}$.
  - Si $a \neq \frac{5}{4}$ se tiene que $\dim S \cap T = 4-4 = 0$ y por lo tanto $S \cap T = \{(0,0,0,0)_{\beta_1}\}$ y $\beta_{S\cap T} = \emptyset$ es una base de $S \cap T$.
  - Si $a = \frac{5}{4}$ se tiene que $\dim S \cap T = 4-3 = 1$ y puesto que el vector no nulo $(-4,1,2,-3)_{\beta_1} \in S \cap T$ entonces $\beta_{S\cap T} = \{(-4,1,2,-3)_{\beta_1}\}$ es una base de $S \cap T$.

  $$\boxed{S+T}$$

  Distinguimos dos casos:
  - Empezamos tomando $a \neq \frac{5}{4}$, en este caso $S+T = \mathbb{R}^4$ porque $\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 3+1-0 = 4$.
  - Ahora tomamos $a = \frac{5}{4}$ y tenemos que $\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 3+1-1 = 3$. Calculamos el subespacio suma:

    $$\begin{aligned} S+T = <& (4,-1,-2,3)_{\beta_1}, (1,0,0,0)_{\beta_1}, \\ & (0,0,a-3,a)_{\beta_1}, (0,3,2,-1)_{\beta_1} > . \end{aligned}$$

    Como sabemos que $\dim S+T = 3$ y los 3 últimos vectores son linealmente independientes (son la base que hemos calculado de S), obtenemos que:

    $$\beta_{S+T} = \beta_S = \{(1,0,0,0)_{\beta_1}, (0,0,a-3,a)_{\beta_1}, (0,3,2,-1)_{\beta_1}\}$$

[1] Este rango se calcula usando el determinante de la matriz quitándole la columna de los términos independientes.

y que

$$S + T = S.$$

Finalmente:

$$S + T = S = \{(x', y', z', t')_{\beta_1} \in \mathbb{R}^4 : (1-a)y' + az' + (2-a)t' = 0\}.$$

- ¿Es la suma de ambos subespacios directa?
  Solución: Es directa excepto cuando $a = \frac{5}{4}$.

e) Di cuáles son los valores de k, l, m y n.
Solución:

$$k = l = m = n = 3.$$

f) Calcula las ecuaciones, una base y la dimensión de $\operatorname{Ker} f$ (todo ello respecto de la base β_2).
Solución: Puesto que en este apartado nos piden datos sobre $\operatorname{Ker} f$ respecto de la base β_2 y en el siguiente sobre $\operatorname{Im} f$ relativos a la base β_6, disponer de la matriz $M_{\beta_2\beta_6}(f)$ será de utilidad. Sin embargo empezaremos calculando $M_{\beta_1\beta_4}(f)$ por ser fácil de obtener y posteriormente usaremos la igualdad:

$$M_{\beta_2\beta_6}(f) = M_{\beta_6\beta_4} M_{\beta_1\beta_4}(f) M_{\beta_1\beta_2} \tag{.3}$$

Cálculo de $\mathbf{M_{\beta_1\beta_4}(f)}$. Por definición tendremos que calcular las imágenes (mediante f) de los elementos de la base β_1 y expresar sus coordenadas en β_4. Esas coordenadas se ponen finalmente por columnas en una matriz:

$$\begin{aligned}
f(v_1^1) &= f((1,0,0,0)_{\beta_1}) = (1,1,0)_{\beta_4};\\
f(v_2^1) &= f((0,1,0,0)_{\beta_1}) = (1,0,1)_{\beta_4};\\
f(v_3^1) &= f((0,0,1,0)_{\beta_1}) = (1,0,0)_{\beta_4};\\
f(v_4^1) &= f((0,0,0,1)_{\beta_1}) = (0,0,-1)_{\beta_4}.
\end{aligned}$$

Así que:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{M_{\beta_6\beta_4}}$.
Procedemos igual que en el apartado **5.23***c*:

$$\begin{aligned}
w_1^4 = (1,1,1) &= w_1^6 + w_2^6 + w_3^6 = (1,1,1)_{\beta_6};\\
w_2^4 = (1,0,0) &= w_1^6 + w_2^6 = (1,1,0)_{\beta_6};\\
w_3^4 = (0,0,1) &= -w_2^6 = (0,-1,0)_{\beta_6}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$M_{\beta_6\beta_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos la fórmula (.3) y obtenemos:

$$M_{\beta_2\beta_6}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Cálculo de Ker}\, f}$

Ahora un vector $(x,y,z,t)_{\beta_2} \in \text{Ker}\, f$ si y sólo si $f((x,y,z,t)_{\beta_2}) = (0,0,0)_{\beta_6}$. Hacemos ahora cálculos para obtener las ecuaciones de Ker f.

$$\begin{aligned} [f((x,y,z,t)_{\beta_2})]^t &= M_{\beta_2\beta_6}(f)(x,y,z,t)^t_{\beta_2} \\ \Rightarrow [f((x,y,z,t)_{\beta_2})]^t &= (2x+y+z+t, 4x+2y+3z+t, t)_{\beta_6} = (0,0,0)_{\beta_6} \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{array}{ll} 2x+y+z+t=0, & \text{sistema} \\ 4x+2y+3z+t=0, & \text{matricial} \\ t=0 & \Rightarrow \end{array} \right. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ahora tenemos que la dimensión de Ker f es 4 menos el rango de la matriz asociada al sistema (3), es decir dimKer $f = 1$. El vector $(1,-2,0,0)_{\beta_2}$ pertenece a Ker f, por lo tanto $\beta_{\text{Ker}\, f} = \{(1,-2,0,0)_{\beta_2}\}$ es una base de Ker f

g) Calcula las ecuaciones, una base y la dimensión de Im f (todo ello respecto de la base β_6).

Solución:

Sabemos que dimIm $f = \dim\mathbb{R}^4 - \text{dimKer}\, f = 4 - 1 = 3$ y por otro lado:

$$\text{Im}\, f =< (2,4,0)_{\beta_6}, (1,2,0)_{\beta_6}, (1,3,0)_{\beta_6}, (1,1,1,)_{\beta_6} > .$$

Del sistema generador $\{(2,4,0)_{\beta_6}, (1,2,0)_{\beta_6}, (1,3,0)_{\beta_6}, (1,1,1,)_{\beta_6}\}$ de Im f se puede extraer fácilmente la base:

$$\beta_{\text{Im}\, f} = \{(1,2,0)_{\beta_6}, (1,3,0)_{\beta_6}, (1,1,1,)_{\beta_6}\}.$$

Puesto que la dimensión de Im f es 3 no se pueden calcular las ecuaciones.

h) Calcula las matrices siguientes:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f), M_{\beta_1\beta_5}(f), M_{\beta_4\beta_4}(g \circ h), M_{\beta_4\beta_4}(h \circ g), M_{\beta_4\beta_4}(h),, M_{\beta_4\beta_4}(g)$$

Solución:

$\boxed{M_{\beta_1\beta_4}(f)}$

Para calcular esta matriz es necesario obtener las imágenes, mediante f, de los vectores de β_1 y dar las coordenadas del vector imagen en la base β_4. Esto ya se ha hecho en un apartado anterior:

$$\begin{array}{ll} f(v_1^1) = (1,1,0)_{\beta_4}; & f(v_2^1) = (1,0,1)_{\beta_4}; \\ f(v_3^1) = (1,0,0)_{\beta_4}; & f(v_4^1) = (0,0,-1)_{\beta_4}. \end{array}$$

Con estos datos tenemos:

$$M_{\beta_1\beta_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{M_{\beta_1\beta_5}(f)}$

Para calcular esta matriz es necesario obtener las imágenes, mediante f, de los vectores de β_1 y dar las coordenadas del vector imagen en la base β_5:

$$\begin{aligned} f(v_1^1) = (1,1,0)_{\beta_4} &= (2,1,1) = (0,2,1)_{\beta_5}; \\ f(v_2^1) = (1,0,1)_{\beta_4} &= (1,1,2) = (-1,2,2)_{\beta_5}; \\ f(v_3^1) = (1,0,0)_{\beta_4} &= (1,1,1) = (0,1,1)_{\beta_5}; \\ f(v_4^1) = (0,0,-1)_{\beta_4} &= (0,0,-1) = (1,-1,-1)_{\beta_5}. \end{aligned}$$

Con estos datos tenemos:

$$M_{\beta_1\beta_5}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(g)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g) = M_{\beta_4\beta_5}M_{\beta_4\beta_5}(g)M_{\beta_4\beta_4} = M_{\beta_4\beta_5}M_{\beta_4\beta_5}(g)I_4 = M_{\beta_4\beta_5}M_{\beta_4\beta_5}(g)$$

Así que:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g) = M_{\beta_4\beta_5}M_{\beta_4\beta_5}(g)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(h)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h) = M_{\beta_4\beta_5}M_{\beta_4\beta_5}(h)$$

Así que:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h) = M_{\beta_4\beta_5}M_{\beta_4\beta_5}(h)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(g \circ h)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g \circ h) = M_{\beta_4\beta_4}(g)M_{\beta_4\beta_4}(h) =$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta_4\beta_4}(g \circ h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\beta_4\beta_4}(h \circ g)}$$

Para este cálculo usaremos la fórmula:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h \circ g) = M_{\beta_4\beta_4}(h)M_{\beta_4\beta_4}(g) =$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta_4\beta_4}(h \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) ¿Es la aplicación g biyectiva? ¿Cuál es su inversa?

Solución: Para que sea biyectiva debe ser simultáneamente inyectiva y suprayectiva, es decir, se debe tener simultáneamente que $\operatorname{Ker} g = 0$ y que $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^3$, o lo que es lo mismo, $\dim\operatorname{Ker} g = 0$ y $\dim\operatorname{Im} g = 3$. Como $\dim\operatorname{Im} g = \operatorname{rg} M_{\beta_4\beta_5}(g) = 3$ (porque el determinante de $M_{\beta_4\beta_5}(g)$ es -1) y $\dim\operatorname{Ker} f = 3 - \dim\operatorname{Im} f = 0$, se tiene que g es biyectiva.

Para calcular la inversa de g bastará con calcular la matriz asociada a g^{-1} respecto de algunas bases. Obtendremos esta matriz usando que $\mathrm{Id} = g \circ g^{-1}$, por lo que:

$$M_{\beta_4\beta_5}(g)M_{\beta_5\beta_4}(g^{-1}) = M_{\beta_5\beta_5}(\mathrm{Id}) = I_3 \Rightarrow M_{\beta_5\beta_4}(g^{-1}) = (M_{\beta_4\beta_5}(g))^{-1}.$$

Haciendo los cálculos necesarios obtenemos:

$$M_{\beta_5\beta_4}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$j)$ Determina $\mathrm{Ker}\, g, \mathrm{Ker}\, h, \mathrm{Im}\, g$ e $\mathrm{Im}\, h$ (todo respecto de la base β_4) y di si se verifica que alguna de las dos sumas siguientes es directa:

$$\mathrm{Ker}\, h + \mathrm{Im}\, h, \quad \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, g.$$

Solución:
Empezamos calculando las dimensiones de los espacios que queremos calcular:

$$\mathrm{dimIm}\, g = \mathrm{rg}\, M_{\beta_4\beta_5}(g) = 3 \Rightarrow \mathrm{dimKer}\, g = \dim\mathbb{R}^3 - \mathrm{dimIm}\, g = 0.$$
$$\mathrm{dimIm}\, h = \mathrm{rg}\, M_{\beta_4\beta_5}(h) = 3 \Rightarrow \mathrm{dimKer}\, h = \dim\mathbb{R}^3 - \mathrm{dimIm}\, h = 0.$$

Así que:

$$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, h = \{(0,0,0)_{\beta_4}\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, h = \mathbb{R}^3$$

Finalmente es claro que ambas sumas son directas puesto que:

$$\mathrm{Ker}\, g \cap Img = \mathrm{Ker}\, h \cap \mathrm{Im}\, h = \{(0,0,0)_{\beta_4}\}$$

VI. Diagonalización de matrices

6.1. Dada la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, diremos que λ es valor propio de T si lo es de la matriz asociada a la aplicación lineal T respecto de las bases canónicas. Supongamos que λ y μ son valores propios de T.

a ¿Es $\lambda + \mu$ valor propio de T?

$a)$ ¿Y $\lambda\mu$?

6.2. Dada la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide probar que la matriz dada es diagonalizable y calcular las matrices diagonal D y de paso T y T^-1. Diagonaliza también H^{-1} y H^2 calculando sus matrices de paso.

6.3. Estudiar en función de los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ es diagonalizable o no.

6.4. Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

$a)$ Un vector propio de A está asociado a un único valor propio.

$b)$ Si $u \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Au = 0$ entonces u es un vector propio de A

$c)$ Si u y v son dos valores propios distintos, entonces el vector $w = u + v$ es un vector propio de A.

$d)$ Si A es invertible y λ es un valor propio de A entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}.

6.5. De la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) El polinomio característico de B.
Solución:
$p_B(x) = |B - xI_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 + 2 - 3(1-x) = (1-x)^3 - 1 + 3x = 3x^2 - x^3 = x^2(3-x).$

b) Las raíces del polinomio característico y sus multiplicidades.
Solución: Las raíces son 0 y 3 con multiplicidades 2 y 1 respectivamente.

c) Determinar, justificadamente, si la matriz B es diagonalizable.
Solución: Según se vio en teoría, por ser $m(3) = 1$ entonces $\dim V_3 = m(3) = 1$.
Falta ahora por ver, para demostrar que B es diagonalizable, que $\dim V_0 = m(0) = 2$. Pero esto es cierto porque $\dim V_0 = 3 - \operatorname{rg}(B - 0I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$
Por lo tanto B es una matriz diagonalizable.

d) Si la matriz B es diagonalizable calcula la matriz diagonal D y la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}BP$. Si la matriz no es diagonalizable calcula B^2 y B^3.
Solución:
Para dar la matriz P calculamos bases de V_0 y de V_3.
$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (B - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_3$ si y sólo si[2]

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

Así que una base de V_3 es $\beta_3 = \{(1, 1, 1)\}$.
$V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (B - 0I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_2$ si y sólo si[3]

$$\left\{ \; x + y + z = 0 \right.$$

Así que una base de V_0 es $\beta_0 = \{(0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$.
Ahora obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.6. De una matriz diagonalizable A sabemos que tiene como polinomio característico $p(x) = (x-1)(x-3)^2(x+1)$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 3x\}$?
Solución: Por ser la matriz diagonalizable se tiene que la dimensión del subespacio anterior V_3 coincide con la multiplicidad de 3 en el polinomio característico. Así que $\dim V_3 = 2$.

[2] Fíjate que he quitado la primera ecuación porque $B - 3I_3$ tiene rango 2 y por lo tanto sólo son necesarias dos ecuaciones linealmente independientes.

[3] Fíjate que me he quedado con una única ecuación porque $B - 0I_3$ tiene rango 1.

b) ¿Cuál es el determinante de A? ¿Por qué?

Solución: Por ser la matriz A diagonalizable se tiene que $P^{-1}AP = D$, así que $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A| = |D| \Rightarrow |A| = |D|$. Así que $|A| = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -9$.

c) Escribe una matriz diagonal, D, para A.

Solución:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) ¿Cuál es el tamaño de la matriz A?

Solución: El tamaño es el mismo que el tamaño de D, es decir, 4×4.

e) De los subespacios invariantes V_1, V_3 y V_{-1} conocemos unas bases: $\beta_{V_1} = \{(1,0,0,0)\}$, $\beta_{V_3} = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $\beta_{V_{-1}} = \{(1,1,0,0)\}$. Da la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

Solución:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el polinomio característico p_A.

Solución:

$$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 \\ -3 & 3 & 5-x \end{vmatrix} = 20 - 24x + 9x^2 - x^3 = -(x-5)(x-2)^2$$

b) Calcular el espectro σ_A y especificar la multiplicidad de cada raíz.

Solución: $\sigma_A = \{5, 2\}$. Además $m(5) = 1$ y $m(2) = 2$.

c) Justificar si la matriz A es diagonalizable.

Solución: Según se vio en teoría, por ser $m(5) = 1$ entonces $\dim V_5 = m(5) = 1$.

Falta ahora por ver, para demostrar que A es diagonalizable, que $\dim V_2 = m(2) = 2$. Pero esto es cierto porque $\dim V_2 = 3 - \mathrm{rg}\,(A - 2I_3) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$.

Por lo tanto A es una matriz diagonalizable.

d) Dar la matriz diagonal D.

Solución: Elijo $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Dar la matriz de paso P.

Solución:

Para dar esta matriz calculamos bases de V_5 y de V_2.

$V_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x,y,z) \in V_5$ si y sólo si[4]

$$\begin{cases} -3x + 3z = 0, \\ -3x + 3y = 0. \end{cases}$$

Así que una base de V_5 es $\beta_5 = \{(1,1,1)\}$.

[4] Fíjate que he quitado la primera ecuación porque $A - 5I_3$ tiene rango 2 y por lo tanto sólo son necesarias dos ecuaciones linealmente independientes.

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x,y,z) \in V_2$ si y sólo si[5]

$$\left\{ \; -3x + 3y + 3z = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \; -x + y + z = 0 \right.\right.$$

Así que una base de V_2 es $\beta_2 = \{(0,1,-1),(1,1,0)\}$.
Ahora obtenemos ya:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Especificar la relación entre A, D y P.
Solución:

$$D = P^{-1}AP.$$

6.8. Calcular la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Cayley-Hamilton.

6.9. De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2 + 25)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Solución:

Como $\sigma_A = 5i, -5i$ la matriz tiene valores propios complejos y por lo tanto no es diagonalizable.

6.10. De una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2+25)$. Da los valores de n y de m.

Solución: El tamaño de la matriz será 2×2, es decir, $n = m = 2$.

6.11. De una matriz $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{1, 2\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(2) = m(1) = 2$. El espacio invariante V_1 tiene como base a $\beta_{V_1} = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ y el espacio invariante V_2 tiene como base a $\beta_{V_2} = \{(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$. Se pide:

a) Justificar por qué C es diagonalizable.
Solución: C es diagonalizable porque todos los valores propios son reales y además $m(2) = \dim V_2 = 2$ y $m(1) = \dim V_1 = 2$.

b) Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.
Solución:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcular el vector $C(1,1,1,1)^t$.
Solución: Obsérvese que $(1,1,1,1) \in V_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = 1x\}$, así que $C(1,1,1,1)^t = 1(1,1,1,1)^t = (1,1,1,1)^t$

d) Calcular el vector $C(0,0,1,1)^t$.
Solución: Como $(0,0,1,1) \in V_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = 2x\}$, entonces $C(0,0,1,1)^t = 2(0,0,1,1)^t = (0,0,2,2)^t$.

e) Dar el valor de $|C|$.
Solución: $|C| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |P||D|\frac{1}{|P|} = |D| = 4$.

---

[5] Fíjate que me he quedado con una única ecuación porque $A - 2I_3$ tiene rango 1.

VII. Cálculo: funciones reales de variable real

7.1. Calcular los siguientes límites utilizando la regla de l'Hôpital.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}.\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2}.\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\tan(5x)}.\quad \text{(e)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{sen}mx)}{\ln(\operatorname{sen}x)}.\quad \text{(f)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}.$$

7.2. Calcular los desarrollos de Taylor en $x=0$ de grado k de las funciones

$$\text{(a)}\ f(x)=e^x.\quad \text{(b)}\ f(x)=\operatorname{sen}x.\quad \text{(c)}\ f(x)=\cos x.$$

$$\text{(d)}\ f(x)=\frac{1}{1+x}.\quad \text{(e)}\ f(x)=\log(1+x).\quad \text{(f)}\ f(x)=\cos(x^2).$$

Solución: Puedes comprobar sin mucha dificultad que los desarrollos son:

a) Para $f(x)=e^x$, $P_k(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$.

b) Para $f(x)=\operatorname{sen}x$, dado $n\in\mathbb{N}$ tenemos: $P_{2n+1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

c) Para $f(x)=\cos x$, dado $n\in\mathbb{N}$ tenemos: $P_{2n}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{(n+1)}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

d) Para $f(x)=\frac{1}{1+x}$, tenemos: $P_k(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots+(-1)^kx^k$.

e) Para $f(x)=\log(1+x)$, tenemos: $P_k(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$.

f) Para $f(x)=\cos(x^2)$, tenemos: $P_{4n+4}(x)=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^12}{6!}+\cdots+(-1)^{(n+1)}\frac{x^{4n+4}}{(2n+2)!}$

7.3. Utilizar el polinomio de Taylor en $x=0$ de grado 3 para calcular aproximadamente los valores $\sqrt[4]{e}$, $\cos(0{,}5)$, $\log(1{,}5)$, estableciendo cual ha sido el error máximo en la aproximación.

Solución:

Cálculo de $\cos(0{,}5)$

El desarrollo de Mac Laurin de orden 3 de $f(x)=\cos x$ es $P_3(x)=1-\frac{x^2}{2!}$. Así que la aproximación pedida es $P_3(1/2)=0{,}875$.

Como mucho hemos cometido el siguiente error para algún $\chi\in(0,\frac{1}{2})$:

$$E=\left|\frac{f^{(iv)}(\chi)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right|\le\frac{1}{4!2^4}=\frac{1}{384}$$

7.4. Calcular los límites de la actividad **7.1** usando desarrollos de Taylor.

7.5. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{1-\cos(x^3)}.$$

Solución: Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 6:

- $\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$,
- $\operatorname{sen}x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)$,
- $\operatorname{sen}^3x^2=x^6+o(x^6)$,
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$,
- $\cos x^3=1-\frac{x^6}{2!}+o(x^6)$,

- $1-\cos x^3 = \frac{x^6}{2!}+o(x^6)$.

Así que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6+o(x^6)}{\frac{x^6}{2!}+o(x^6)} = \frac{1+\frac{o(x^6)}{x^6}}{\frac{1}{2!}+\frac{o(x^6)}{x^6}} = 2.$$

7.6. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)}.$$

Solución: Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 7:

- $\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)$,
- $\operatorname{sen}^2 x = x^2+\frac{x^6}{36}-2\frac{x^4}{3!}+2\frac{x^6}{5!}+o(x^7)$,
- $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2 x = x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}+\frac{x^7}{36}+o(x^7)$,
- $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7)$,
- $\cos x^2 = 1-\frac{x^4}{2!}+o(x^7)$,
- $\cos^2 x^2 = 1-2\frac{x^4}{2!}+o(x^7)$.
- $1-\cos^2 x^2 = 2\frac{x^4}{2!}+o(x^7)$.
- $[1-\cos^2 x^2]\operatorname{sen}^3 x = x^7+o(x^7)$.
- $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+o(x^7)$.
- $\log(1+x^6) = x^6+o(x^7)$.
- $x\log(1+x^6) = x^7+o(x^7)$.

Así que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^7+o(x^7)}{x^7+o(x^7)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^7)}{x^7}}{1+\frac{o(x^7)}{x^7}} = 1$$

7.7. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\ (10\text{–}2\text{–}1997).$$

7.8. Utilizar el desarrollo de Taylor de grado dos de la función $f(t)=e^{-t^2}$ para calcular la integral $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ de forma aproximada. Dar una cota del error cometido. (3–9–1997).

7.9. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3\left(1-3x^2\right)}{x^4-x^4\cos^2(2x)}\ (3\text{–}9\text{–}1997).$$

Solución: $\frac{-27}{4}$ haciendo desarrollos de orden 6.

7.10. Calcular el desarrollo de Taylor de grado 2 en $x=0$ de la función

$$f(x)=\int_0^x te^{-t}dt,$$

y utilizarlo para calcular aproximadamente $\int_0^{0,1} te^{-t}dt$. Dar una estimación del error cometido. (1–12–1997).

7.11. Calcular el siguiente límite funcional

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen} x^2}\ (14\text{–}2\text{–}1998).$$

Solución: $\frac{9}{2}$ haciendo desarrollos de orden 2.

7.12. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}}{\ln(x+1)} \quad (2\text{–}7\text{–}1998).$$

Solución: 0

7.13. Usando el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x$, obtener $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 10^{-4}. (2–7–1998).

7.14. Utiliza un desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = \log x$ para aproximar el valor de $\log(1,1)$. Da una estimación del error cometido.

7.15. Calcula los límites siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \lim_{x\to 0} \frac{x^5 - x\log(1+x^4)}{\operatorname{sen}^3(x^2)} & \text{(b)} & \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{x^5 - x\log(1+x^4)} \\ \text{(c)} & \lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)} & \text{(d)} & \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{1-\cos^3(x)} \end{array}$$

Solución:

(a) 0, haciendo un desarrollo de orden 6; (b) el límite no existe, aunque sí que existen los límites laterales ($+\infty$ cuando x tiende a 0 por la izquierda y $-\infty$ cuando x tiende a 0 por la derecha). Se necesitan hacer desarrollos de orden 6 y luego investigar el signo de la función que aparece en el denominador $[f(x) = x(x^4 - \log(1+x^4))]$ cuando x es cercano a 0; (c)

7.16. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3\log(1+3x^3)}$$

Solución: Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 6:

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$,
- $\operatorname{sen}(2x^4) = 2x^4 + o(x^6)$,
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$.
- $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$.
- $\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4) = 2x^6 + o(x^6)$.
- $\log(1+3x^3) = 3x^3 - \frac{9x^4}{2} + o(x^6)$.
- $x^3\log(1+3x^3) = 3x^6 + o(x^6)$.

Así que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3\log(1+3x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^6 + o(x^6)}{3x^6 + o(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{o(x^6)}{x^6}}{3 + \frac{o(x^6)}{x^6}} = \frac{2}{3}$$

7.17. Calcula el límite siguiente usando desarrollos de Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x^4}{1-\cos(x^2)}$$

Solución: Hacemos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + o(x^4)}{1 - 1 + x^4/2 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = 4.$$

VIII. Límites y continuidad de funciones de varias variables

8.1. Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x > 1\}$

8.2. Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x \leq 1\}$

8.3. Calcular los puntos de acumulación, la clausura, el interior y la frontera de los conjuntos de los dos ejercicios anteriores.

8.4. Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
Solución: Dom $f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$.
Solución: Dom $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$

(c) $f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2-1}, \frac{xy}{x^2+y^2-4}\right)$.
Solución:

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 < 1 \text{ ó } 1 < x^2 + y^2 < 4 \text{ ó } 4 < x^2 + y^2\}$$

(d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
Solución: Dom $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\}$

(e) $f(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2-4}, \log\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)\right)$.
Solución: Dom $f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \neq 4\}$

8.5. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Solución: Demostraremos que el límite es 0, para ello, fijado $\epsilon > 0$ tendremos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|(x, y) - (0, 0)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ entonces $\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} < \epsilon$.

Como

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} < \frac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 < \delta^2,$$

entonces basta con tomar $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

8.6. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\left(x+y^2,\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Solución: Para que exista el límite debe existir el límite de las dos componentes. Puesto que la primera componente es una función continua, el límite será el valor de la función en $(0,0)$, es decir, 0.

Veamos ahora qué pasa con la segunda componente. Definamos $g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Si calculamos el límite por la dirección $y=mx$ tenemos:

$$\lim_{x\to 0} g(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}.$$

Como el límite direccional depende de m deducimos que el límite de $g(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ no existe. Por lo tanto tampoco existe el de $f(x,y)$.

8.7. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Solución: Hacemos un límite direccional acercándonos por las rectas $y=mx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+mx}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+mx}{x\sqrt{(1+m^2)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x+m}{\sqrt{(1+m^2)}}=\frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}}$$

Como el límite direccional depende de la recta por la que nos acerquemos al punto $(0,0)$ entonces no existe el límite doble planteado.

8.8. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^2+y}{x^2+y^2}.$$

Solución: Hacemos un límite direccional acercándonos por la parábola $y=\lambda x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda x^2}{x^2+\lambda^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\lambda)}{x^2(1+\lambda x^2)}=1+\lambda$$

Como el límite direccional depende de la parábola elegida entonces no existe el límite doble planteado.

Si se utilizan límites reiterados se obtienen diferentes valores y también se puede justificar de esta manera que el límite doble no existe:

- $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y^2}=\pm\infty$ (dependiendo el signo de si el límite se hace por la derecha o por la izquierda).
- $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$

8.9. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Solución:

Si hacemos el límite por coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\\
&= \lim_{r\to 0}\frac{r^4}{r^4}(\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta)\\
&= \cos^4\theta + 3\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta
\end{aligned}$$

Como este límite depende del ángulo θ no va a existir el límite. Demostramos la no existencia recurriendo a los límites direccionales.

Hacemos un límite direccional acercándonos por las rectas $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4 + 3x^2m^2x^2 + 2xm^3x^3}{(x^2 + m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}\frac{1 + 3m^2 + 2m^3}{(1 + m^2)^2} = \frac{1 + 3m^2 + 2m^3}{(1 + m^2)^2}$$

Como el límite direccional depende de m entonces no existe el límite doble planteado.

8.10. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{2x^5 + 2y^3\left(2x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Solución:

Empezamos calculando los límites reiterados para ver si nos da alguna información:

- $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{x^4} = 0$
- $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-2y^5}{y^4} = 0$

Así que si existe el límite valdría 0.

Intentamos ver si realmente existe usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) &= \lim_{r\to 0}\frac{2r^5\cos^5\theta + 2r^3\operatorname{sen}^3\theta(2r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta)}{r^4}\\
&= \lim_{r\to 0}\frac{r^5(2\cos^5\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta)}{r^4}\\
&= \lim r(2\cos^5\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta) = 0
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que hacer la acotación de $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0|$ por una función $F(r)$ que sólo dependa de r y que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

$$\begin{aligned}
|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0| &= |r(2\cos^5\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta)|\\
&\le r\left[2|\cos^5\theta| + 4|\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta| + 2|\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta|\right] \le 8r = F(r)
\end{aligned}$$

Como $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$ entonces obtenemos finalmente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

8.11. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y) = \left(xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, xy, \sqrt{|xyz|}\right).$$

Solución:

Según la teoría el límite existirá si existen a su vez los límites de las funciones componentes $f_1(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = xy$ y $f_3(x,y) = \sqrt{|xyz|}$. Ahora bien la segunda y tercera componentes son continuas y por lo tanto los límites existirán y valdrán:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = f_2(0,0) = 0$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = f_3(0,0) = 0$.

Estudiemos ahora el límite de la primera componente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

usando coordenadas polares:

- Primero calculamos el valor de $f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$,

$$\begin{aligned} f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) &= r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta\frac{r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \\ &= r^2(\cos^2 - \operatorname{sen}^2)\cos\theta\operatorname{sen}\theta = r^2\cos(2\theta)\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta). \end{aligned}$$

- $\lim_{r\to 0} f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 0$.
-

$$|f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0| = |r^2\cos(2\theta)\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)| \le r^2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{r^2}{2} = F(r).$$

Como $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$ entonces existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$ y su valor es $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{r\to 0} f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 0$.

Finalmente tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0,0).$$

8.12. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}.$$

Solución: Se puede demostrar que no existe el límite haciendo uso de los límites direccionales y eligiendo las direcciones $y = mx$.

8.13. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Solución: Lo mismo que en el ejercicio anterior pero con las direcciones $y = m\sqrt{x}$.

8.14. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}.$$

Solución: Usando coordenadas polares obtenemos:

-

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) &= \lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}{r^2 + r^4\cos^4\theta} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}{1 + r^2\cos^4\theta} = 0. \end{aligned}$$

- Además tenemos la acotación

$$|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} - 0| = |r\frac{(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}{1 + r^2\cos^4\theta}| \le 2r = F(r)$$

Puesto que $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$ entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = 0.$$

8.15. Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \operatorname{sen}\left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \right) \right).$$

8.16. Dadas las funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y|, \\ 0 & \text{si } |x| = |y|, \end{cases}$$

y

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

se pide:

(a) Hallar $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ en los siguientes casos: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ y $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, donde k es un número real.

(b) ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(c) Comprobar si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

8.17. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

8.18. ¿Es posible definir las funciones de los ejercicios **8.5**, **8.6**, **8.8**, **8.9**, **8.10**, **8.11**, **8.12**, **8.13**, **8.14** y **8.15** de manera que éstas sean continuas?

8.19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
\text{(a) } f(x,y) &= \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \\
\text{(b) } f(x,y) &= \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(xy)\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \\
\text{(c) } f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} y & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{si } (x,y) = (0,y). \end{cases} \\
\text{(d) } f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{si } (x,y) = (0,y). \end{cases}
\end{aligned}$$

Solución:

Resolución del apartado (c)

Para decidir si es continua hay que ver si se verifica:

$$\lim_{(x,y)\to(0,k)} f(x,y) = f(0,k) = k.$$

Si se verifica la igualdad anterior entonces la función f será continua. En caso contrario no lo sería.

Comprobamos que en este caso se verifica $\lim_{(x,y)\to(0,k)} f(x,y) = k$. Así que, fijado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|(x,y) - (0,k)\|_1 = |x| + |y-k| < \delta$ entonces $|f(x,y) - k| < \epsilon$.

Primera consideración: puesto que $\lim_{x\to 0} 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, para $\epsilon_x = \frac{\epsilon}{4(|k|+1)}$ existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|x - 0| < \delta_0$ entonces

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{.4}$$

Segunda consideración: elegimos ahora

$$\delta = \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{8}, \delta_0\}. \tag{.5}$$

Demostración del límite: suponemos ahora que $\|(x,y)-(0,k)\|_1 = |x| + |y-k| < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-k| &\leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} y - k\right| + |y-k| \\
&\leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) y + y - k\right| + |y-k| \\
&\leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) y\right| + 2|y-k| \\
&\leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)\right| |y| + 2|y-k| \text{ (usando ahora la ecuación (.4))} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4(|k|+1)}|y| + 2|y-k| \text{ (usando (.5) tenemos que } \frac{|y|}{|k|+1} < 1) \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + 2|y-k| \leq \text{ (usando (.5)} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + 2\frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Solución:

<u>Resolución del apartado (d)</u>

Para demostrar que la función es continua tendremos que ver que para todo $k \in \mathbb{R}$ se verifica $k = f(0,k) = \text{lím}_{(x,y)\to(0,k)} f(x,y) = \text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y+k) = \text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x}$. Es decir, fijado $\epsilon > 0$ tendremos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|(x,y)-(0,0)\|_\infty < \delta$ entonces $\left|\frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x} - k\right| < \epsilon$.

Puesto que $\text{lím}_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$ se tiene que para $\epsilon_z = \frac{\epsilon}{2(1+|k|)}$ existe $\delta_z > 0$ tal que $\left|\frac{\operatorname{sen} z}{z} - 1\right| < \epsilon_z$ si $|z| < \delta_z$.

El δ que necesitamos es $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta_z}{1+|k|}\}$ ya que si $\|(x,y)\|_\infty < \delta$ entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x} - k\right| &= \left|\frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x(y+k)}(y+k) - k\right| \\
&= \left|\left(\frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x(y+k)} - 1\right)(y+k) + (y+k) - k\right| \\
&\leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x(y+k)} - 1\right)(y+k)\right| + |y| = H_1
\end{aligned}$$

Hacemos notar que $|x(y+k)| \leq |x||y+k| \leq |x|(1+|k|) \leq \frac{\delta_z}{1+|k|}(1+|k|) = \delta_z$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{\operatorname{sen}[x(y+k)]}{x(y+k)} - 1\right)(y+k)\right| < \epsilon_z|y+k| &\leq \frac{\epsilon}{2(1+|k|)}|y+k| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(1+|k|)}(|y|+|k|) \leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos que $H_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

8.20. ¿Qué tiene que valer el número real k para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

sea continua?

Solución: $k = 0$ (demuéstralo).

8.21. ¿Qué tiene que valer el número real k para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

sea continua?

Solución:

Esta función no puede ser continua (demuéstralo).

8.22. Da una razón que justifique que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(y+x)$, no es una norma.

Solución: La aplicación no es una norma porque $f(0,\pi) = 0$ y $(0,\pi) \neq (0,0)$.

8.23. Pon un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ y justifica por qué no es compacto.

Solución: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 5\}$ no es compacto porque no está acotado.

8.24. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 5$.

Solución: Estudiamos el límite utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{3r^6 \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta}{r^3} + 5 = \lim_{r\to 0} 3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta + 5 = 5$$

Ahora, si $f(x,y) = \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, intentamos acotar $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0|$ con una función $F(r)$ que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 5| = |3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta| \leq 3r^3 = F(r)$$

Como $F(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0$.

8.25. Da una razón que justifique que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x,y) = |\cos(x)\cos(y+x)|$, no es una norma.

Solución: La aplicación no es una norma porque $f(0,0) = 1 \neq 0$.

8.26. Da una razón por la que el conjunto $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 4\}$ no es compacto.

Solución: No es compacto porque no es ni cerrado ni acotado.

8.27. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$.

Solución: Estudiamos el límite utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{3r^4 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to 0} 3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

Ahora, si $f(x,y) = \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, intentamos acotar $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0|$ con una función $F(r)$ que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0| = |3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta| \leq 3r^3 = F(r)$$

Como $F(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0$.

8.28. Da una razón que justifique que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(y+x)$, no es una norma.

Solución: La aplicación no es una norma porque $f(0,\pi) = 0$ y $(0,\pi) \neq (0,0)$.

8.29. ¿Existe algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea a la vez abierto y cerrado? Pon un ejemplo en caso de responder afirmativamente..

Solución: Sí, por ejemplo todo $\mathbb{R}^2$ o el conjunto vacío.

8.30. Pon un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ y justifica por qué no es compacto.

Solución: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 5\}$ no es compacto porque no está acotado.

8.31. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 5$.

Solución: Estudiamos el límite utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{3r^6 \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta}{r^3} + 5 = \lim_{r\to 0} 3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta + 5 = 5$$

Ahora, si $f(x,y) = \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, intentamos acotar $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0|$ con una función $F(r)$ que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 5| = |3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta| \leq 3r^3 = F(r)$$

Como $F(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0$.

8.32. Dibuja los conjuntos que siguen

$$\begin{array}{lll} A = \{(x,y) : x^2 > 1\} & B = \{(x,y) : y^2 \leq 1\} & C = \{(x,2x) : x \in \mathbb{R}\} \\ D = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} & E = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\} & F = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ G = \{(x, \frac{2}{x}) : x \in \mathbb{R}\} & H = \{(k,k) : k = 1,2,3,4,5,6\}. & \end{array}$$

Calcula:

a) el interior, la clausura y la frontera de cada uno de ellos;

b) el interior y la clausura de $A \cup B \cup C$;

c) los puntos de acumulación y aislados del conjunto D;

Responde:

d) ¿Qué conjuntos son cerrados?

e) ¿Cuáles son abiertos?

f) ¿Cuáles son acotados?

g) ¿Hay algún conjunto compacto? ¿Cuál o cuáles?

IX. Cálculo diferencial de funciones de varias variables

9.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0,0)$ y $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0,0)$, pero no son iguales.

9.2. Se consideran las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y) = \left(x^2y^4, x^3y^3 + 4xy^2\right)$ y $g(x,y) = (x\operatorname{sen} y, y\operatorname{sen} x)$. Sea $F = g \circ f$. Calcular la matriz jacobiana de F en el punto $(2,-1)$.

9.3. Se consideran las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(t) = \left(t^2, 3t-1, 1-t^2\right)$ y $g(x,y,z) = \left(x^2 - y - zx, y^2 + xy + z^2\right)$. Sea $F = g \circ f$. Calcular la matriz jacobiana de F en el punto -1. ¿Es posible calcular la matriz jacobiana de la función $G = f \circ g$ en el punto $(1,1,1)$?

Solución: Utilizaremos la fórmula:

$$JF(-1) = Jg \circ f(-1) = Jg(f(-1))Jf(-1) = Jg(1,-4,0)Jf(-1).$$

Calculamos ambos jacobianos:

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - z & -1 & -x \\ y & 2y + x & 2z \end{pmatrix} \qquad Jf(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Así que:

$$JF(-1) = Jg(1,-4,0)Jf(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -7 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

9.4. Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y)=f(g(x)k(y),g(x)+h(y)),$$

donde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ y $g,h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son de clase $C^1(\mathbb{R})$.

9.5. Calcular la expresión de las derivadas parciales de la función $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z)=f(x^y,y^z,z^x)$$

donde $f:M\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(M)$ con

$$M=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}.$$

Solución:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^y,y^z,z^x)yx^{y-1}+\frac{\partial f}{\partial z}(x^y,y^z,z^x)z^x\log z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^y,y^z,z^x)x^y\log x+\frac{\partial f}{\partial y}(x^y,y^z,z^x)zy^{z-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x^y,y^z,z^x)y^z\log y+\frac{\partial f}{\partial z}(x^y,y^z,z^x)xz^{x-1}$$

9.6. Calcular la expresión de las derivadas parciales de la funciones $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dadas por

(a) $F(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}\operatorname{sen}t\,dt$.

(b) $F(x,y,z)=\int_0^{xyz}t\operatorname{sen}t\,dt$.

(c) $F(x,y,z)=\int_{x^2+y^2}^{xyz}\operatorname{sen}t\,dt$.

9.7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y)=f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\quad\text{con } x,y\neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x^2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y^2\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$.

b) $2x^2y^2(x+y)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)-x^4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+y^4\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x,y)=0$ admitiendo que $f'=f''$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y^2\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\\&=x^2\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+y^2\frac{-1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=\\&=f'\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)-f'\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0\end{aligned}$$

b)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2}{x^3} f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3} f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{y^4} f''\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2}\frac{-1}{y^2} f''\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

Ahora definiendo $A = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&2x^2y^2(x+y)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) - x^4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + y^4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) \\
&= 2x^2y^2(x+y)\left[\frac{1}{x^2}\frac{-1}{y^2}f''(A)\right] \\
&-x^4\left[\frac{-2}{x^3}f'(A) + \frac{1}{x^4}f''(A)\right] + y^4\left[\frac{2}{y^3}f'(A) + \frac{1}{y^4}f''(A)\right] \\
&= 2(-x-y)f'(A) \\
&+2xf'(A) - f''(A) + 2yf'(A) + f''(A) \\
&= -2f''(A)(x+y) + 2f'(A)(x+y) \\
&= 2(x+y)[f'(A) - f''(A)] = 0
\end{aligned}$$

9.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \frac{f(y/x)}{x} \text{ con } x \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) + F(x,y) = 0.$

b) $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 2F(x,y).$

Solución:

a) Definiendo $A = \frac{y}{x}$ y calculando obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{f'(A)\frac{-y}{x^2}x - f(A)}{x^2} = \frac{-yf'(A) - xf(A)}{x^3},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x^2}f'(A).$$

Así que:

$$\begin{aligned}
&x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) + F(x,y) \\
&= x\frac{-yf'(A) - xf(A)}{x^3} + y\frac{1}{x^2}f'(A) + \frac{f(A)}{x} = 0
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\left[-yf''(A)\frac{-y}{x^2} - f(A) - xf'(A)\frac{-y}{x^2}\right]x^3 - 3x^2\left[-yf'(A) - xf(A)\right]}{x^6}$$
$$= \frac{y^2xf''(A) - x^3f(A) + yx^2f'(A) + 3x^2yf'(A) + 3x^3f(A)}{x^6}$$
$$= \frac{y^2xf''(A) + 4yx^2f'(A) + 2x^3f(A)}{x^6}$$
$$= \frac{y^2f''(A) + 4yxf'(A) + 2x^2f(A)}{x^5}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^3}f''(A)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\frac{-y}{x^2}f''(A)x^2 - 2xf'(A)}{x^4}$$
$$= \frac{-yf''(A) - 2xf'(A)}{x^4}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
&x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) \\
&= x^2\frac{y^2f''(A) + 4yxf'(A) + 2x^2f(A)}{x^5} \\
&+ y^2\frac{1}{x^3}f''(A) \\
&+ 2xy\frac{-yf''(A) - 2xf'(A)}{x^4} \\
&= f''(A)\left(\frac{y^2}{x^3} + \frac{y^2}{x^3} - 2\frac{y^2}{x^3}\right) \\
&+ f'(A)\left(4\frac{y}{x^2} - 4\frac{y}{x^2}\right) \\
&+ f(A)\left(2\frac{1}{x}\right) \\
&= 2\frac{f(A)}{x} = 2F(x,y).
\end{aligned}$$

9.9. Dada $f(x,y,z)$ se define el gradiente de f como

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right).$$

Dadas las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z, \end{cases}$$

obtener el gradiente de f en estas coordenadas.

Solución: La función f en cilíndricas es:

$$F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z),$$

así que definiendo $A = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$, tenemos:

$$\mathrm{grad} F(r,\theta,z)$$
$$= \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(A) + \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial y}(A), -r\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial x}(A) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A)\right)$$

9.10. Si ahora tenemos las coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

obtener el gradiente de la función del ejercicio anterior en estas nuevas coordenadas.

Solución: La función f en esféricas es:

$$F(r,\theta,\phi) = f(r\cos\theta\operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\phi),$$

así que definiendo $A = (r\cos\theta\operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\phi)$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}F\,(r,\theta,\phi) \\ = \Big(&\cos\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial x}(A) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial y}(A) + \cos\phi\frac{\partial f}{\partial z}(A), \\ &-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial x}(A) + r\cos\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial y}(A), \\ &r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial x}(A) + r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial y}(A) - r\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial z}(A)\Big) \end{aligned}$$

9.11. Suponiendo que ϕ es suficientemente diferenciable comprueba que:

a) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ si $z = \phi(x^2+y^2)$,

b) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ si $z = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \phi'(x^2+y^2)2x, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \phi'(x^2+y^2)2y, \end{aligned}$$

$$\boxed{y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\phi'(x^2+y^2) - 2xy\phi'(x^2+y^2) = 0.}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2}{3}\frac{-1}{x^2} + y\phi'(xy) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{3x} + x\phi'(xy) \\ x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 &= x^2\left(\frac{y^2}{3}\frac{-1}{x^2} + y\phi'(xy)\right) - xy\left(\frac{2y}{3x} + x\phi'(xy)\right) + y^2 \\ &= \frac{-y^2}{3} + yx^2\phi'(xy) - \frac{2y^2}{3} - x^2y\phi'(xy) + y^2 = 0 \end{aligned}$$

9.12. Dadas dos constantes, a y b, comprueba que la función $u = \log\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}[2(x-a)]$$
$$= \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2} = \frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}[2(y-b)]$$
$$= \frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2} = \frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}+\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2} = 0.$$

9.13. Demuestra que si la función $u(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace, entonces la función $v(x,y) = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ también la satisface.

Solución:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Denotamos ahora $A = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x}(A)\frac{-2x(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)2y(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial y}(A)\frac{-2y(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x}(A)\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial y}(A)\frac{-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&\qquad +\frac{\partial u}{\partial x}(A)\frac{-2x(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad +\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\qquad +\frac{\partial u}{\partial y}(A)\frac{-2y(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)2x(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&\qquad +\frac{\partial u}{\partial x}(A)\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\\
&\quad +\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\qquad +\frac{\partial u}{\partial y}(A)\frac{-2y^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

Finalmente tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)\left[\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\\
&\quad +\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\left[\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\\
&\quad +\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\left[\frac{2(x^2-y^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(-2xy)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]\\
&\quad +\frac{\partial u}{\partial x}(A)\left[\frac{-2x^3+6xy^2+2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\\
&\quad +\frac{\partial u}{\partial y}(A)\left[\frac{-2y^3+6yx^2+2y^3-6yx^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\\
&= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\right]\left[\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

9.14. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$ si

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x + 2y + 3x^2 - 6xy + 4x^3 - 8xy^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 6x - 6y + 12x^2 - 8y^2$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 + 24x$$
$$\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24}$$
$$\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0}$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -6 - 16y$$
$$\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16}$$

9.15. Comprobar que la ecuación $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto del punto $x = 1$ en el cual toma el valor $y = 2$. Calcular la primera y segunda derivada de dicha función en el punto $x = 1$.

9.16. Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2xz = 0 \end{cases}$$

define a (x, y) como funciones implícitas de z en un abierto del punto $z = 0$ con los valores $(x, y) = (0, 0)$. Calcular las derivadas primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.

Solución:

Definimos las funciones:

$$f_1(x, y, z) = x + y + z$$
$$f_2(x, y, z) = x - y - 2xz$$

Puesto que:

a) $f_1(0, 0, 0) = f_2(0, 0, 0) = 0$ y

b) $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$

deducimos:

a) Existe un abierto U de $(0, 0)$ y V de 0 tales que $U \times V \subset \mathbb{R}^3$.

b) Existe

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \to & U \\ z & \to & (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \end{array}$$

tal que $f_i(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z) = 0$ para todo $z \in V$ y para $i \in \{1, 2\}$. Tanto φ_1 como φ_2 son funciones de clase C^∞.

c) $\varphi_1(0) = 0 = \varphi_2(0)$.

Ahora usamos que $\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + z = 0$ y que $\varphi_1(z) - \varphi_2(z) - 2z\varphi_1(z) = 0$. Derivamos ambas expresiones y obtenemos: $\varphi_1'(z) + \varphi_2'(z) + 1 = 0$ y $\varphi_1'(z) - \varphi_2'(z) - 2\varphi_1(z) - 2z\varphi_1'(z) = 0$. Particularizando ahora ambas expresiones en $z = 0$ tenemos:

$$\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) + 1 = 0,$$
$$\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0) = 0.$$

Resolviendo este sistema se tiene que $\varphi_1'(0) = \frac{-1}{2} = \varphi_2'(0)$.

9.17. Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y - z^2 - t^2 = 0 \\ x^2 - y - z^2 - t = 0 \end{cases}$$

define a (z,t) como funciones implícitas de (x,y) en un abierto del punto $(x,y) = (2,1)$ con los valores $(z,t) = (1,2)$. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.

9.18. Idem para el sistema

$$\begin{cases} xe^t + yz - z^2 = 0 \\ y\cos t + x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

en el punto $(x,y) = (2,1)$ y $(z,t) = (2,0)$.

9.19. Estudiar si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x - xy + z = 4 \end{cases}$$

define a dos cualesquiera variables como función implícita de la tercera con los valores de la terna $(0,2,4)$. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de dichas funciones en el punto considerado.

9.20. Estudiar la existencia de función inversa de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

Solución: Hacemos notar que la función $f(x,y)$ es de clase C^∞, su jacobiano es:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Además:

$$|Jf(x,y)| = e^x \cos^2 y + e^x \operatorname{sen}^2 y = e^x \neq 0.$$

Por lo tanto, fijado un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existen abiertos U y V de (x,y) y de $f(x,y)$ respectivamente tales que:

a) $f|_U : U \to V$ es biyectiva y $f^{-1}|_U$ es de clase C^∞.

b) $Jf^{-1}(f(x,y)) = (Jf(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}^{-1}$

9.21. Idem para la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right).$$

9.22. Idem para la aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2}, \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}\right)$$

donde $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$.

9.23. Calcular los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$;

b) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ con $x > 0$ e $y > 0$;

c) $f(x,y) = xy \log(x^2 + y^2)$ siendo $(x,y) \neq (0,0)$;

Solución:

Empezamos haciendo las parciales para buscar los puntos candidatos a extremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\log(x^2+y^2) + xy\frac{1}{x^2+y^2}2x = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\log(x^2+y^2) + xy\frac{1}{x^2+y^2}2y = 0,$$

Ahora resolvemos este sistema:

$$y\log(x^2+y^2) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \tag{.6}$$

$$x\log(x^2+y^2) = -\frac{2xy^2}{x^2+y^2}, \tag{.7}$$

de aquí deducimos:

$$\frac{y}{x} = \frac{2x^2y}{2xy^2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$$

Sustituyendo el valor obtenido para y en la ecuación (.6):

$$\begin{aligned} \pm x\log(2x^2) = \mp x \Rightarrow \pm x\log(2x^2) \pm x = 0 \\ \Rightarrow \pm x(\log(2x^2)+1) = 0 \Rightarrow \log(2x^2)+1 = 0 \\ \Rightarrow \log(2x^2) = -1 \Rightarrow e^{-1} = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{2e} = x^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2e}} \\ x = \frac{1}{-\sqrt{2e}} \end{cases} \end{aligned}$$

Así que los puntos donde posiblemente se encuentran los extremos relativos son:

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \quad p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$
$$p_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \quad p_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

Estudiamos ahora el hessiano de f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y^2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4yx^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \log(x^2+y^2) + y\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{2x^2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Finalmente calculamos el hessiano, para ello distinguiremos dos casos, primero lo calcularemos en los puntos en los que $x = y$, p_1 y p_3, y luego lo calcularemos en los puntos en los que $x = -y$, p_2 y p_4. Es importante que te des cuenta de que no hace falta recurrir al valor exacto de x e y, lo que simplifica los cálculos.

Puntos p_1 y p_3.

$$Hf(p_1) = Hf(p_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para estos dos puntos, como la sucesión $1, \Delta_1 = 2$, $\Delta_1 = 4$, está formada por términos positivos se deduce que en ellos hay un mínimo relativo.

Puntos p_2 y p_4.

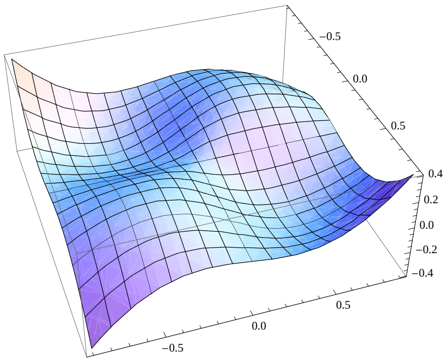

Figura 1: Representación gráfica de la función $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$

$$Hf(p_2) = Hf(p_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para estos dos puntos, como la sucesión $1, \Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = 4$, está formada por términos alternadamente positivos y negativos se deduce que en ellos hay un máximo relativo.

d) $f(x, y, z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$ donde $a > 0$;

Solución: Empezamos calculando las parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y^2z^3(a - x - 2y - 3z) - xy^2z^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2xyz^3(a - x - 2y - 3z) - 2xy^2z^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 3xy^2z^2(a - x - 2y - 3z) - 3xy^2z^3 = 0, \end{aligned}$$

este sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} y^2z^3(a - x - 2y - 3z) &= xy^2z^3 \\ 2xyz^3(a - x - 2y - 3z) &= 2xy^2z^3 \\ 3xy^2z^2(a - x - 2y - 3z) &= 3xy^2z^3, \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda y la tercera entre la segunda obtenemos el siguiente sistema (para hacer esta división estamos suponiendo $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $a - x - 2y - 3z \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{y}{2x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\frac{y}{z} &= \frac{3}{2}, \\ 2xyz^3(a - x - 2y - 3z) &= 2xy^2z^3 \end{aligned}$$

Así que deducimos $y = z = x$ y $x^5(a - 6x) = x^6$, por lo tanto $a - 6x = x$ y $x = y = z = \frac{a}{7}$. El primer candidato a extremo relativo es $\boxed{P_1 = (\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7})}$.

Los demás candidatos a extremos serán soluciones que satisfacen alguna o varias de las condiciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ó $a - x - 2y - 3z = 0$:

- Los puntos $\boxed{P_2 = (x, 0, z)}$ y $\boxed{P_3 = (x, y, 0)}$ son también candidatos a extremos para cualesquiera valores de x, y, z.

- Si buscamos una solución distinta a las anteriores y con $x = 0$ entonces debe ocurrir que $a - 2y - 3z = 0$. Por lo tanto $\boxed{P_4 = (0, y, \frac{a-2y}{3})}$ es otro candidato a extremo para cualquier $y \in \mathbb{R}$.

Ahora calculamos el hessiano de f.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -y^2z^3 - y^2z^3 = -2y^2z^3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= 2xz^3(a-x-2y-3z) - 4xyz^3 - 4xyz^3 \\
&= 2xz^3(a-x-2y-3z) - 8xyz^3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= 6xy^2z(a-x-2y-3z) - 9xy^2z^2 - 9xy^2z^2 \\
&= 6xy^2z(a-x-2y-3z) - 18xy^2z^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) &= 2yz^3(a-x-2y-3z) - 2y^2z^3 - 2xyz^3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) &= 3y^2z^2(a-x-2y-3z) - 3y^2z^3 - 3xy^2z^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) &= 6xyz^2(a-x-2y-3z) - 6xyz^3 - 6xy^2z^2
\end{aligned}$$

<u>Estudio del punto $P_1 = (\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7})$</u>

$$Hf(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}) = \begin{pmatrix} -2\frac{a^5}{7^5} & -2\frac{a^5}{7^5} & -3\frac{a^5}{7^5} \\ -2\frac{a^5}{7^5} & -6\frac{a^5}{7^5} & -6\frac{a^5}{7^5} \\ -3\frac{a^5}{7^5} & -6\frac{a^5}{7^5} & -12\frac{a^5}{7^5} \end{pmatrix} = -\frac{a^5}{7^5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Ahora construimos la sucesión:

$$1, \Delta_1 = -2\frac{a^5}{7^5}, \Delta_2 = -10\frac{a^{10}}{7^{10}}, \Delta_3 = -42\frac{a^{15}}{7^{15}}$$

e) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(x+y+z)$ donde $x, y, z \in (0, \pi)$;

9.24. Calcular los extremos de las siguientes funciones sujetas a las ligaduras fijadas:

a) $f(x,y) = xy$ si $x + y = 1$;

Solución: La función de Lagrange será:

$$L(x,y) = xy + \lambda(x + y - 1)$$

y se deben satisfacer las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = x + \lambda = 0, \\ g(x,y) = x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\lambda = x, \\ -2\lambda - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{-1}{2}, \\ x = y = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Así que el punto candidato a extremo relativo es $(x,y) = (1/2, 1/2)$ para $\lambda = -1/2$.
Calculamos el jacobiano de g: $Jg(x,y) = (1,1) \Rightarrow Jg(1/2,1/2) = (1,1)$. Calculamos seguidamente los vectores (h_1, h_2) tales que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(1/2,1/2), \frac{\partial g}{\partial y}(1/2,1/2)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -h_1.$$

Ahora hacemos el cálculo del hessiano de L para $\lambda = -1/2$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el signo de $(h_1,h_2)HL(x,y)(h_1,h_2)^t$ cuando $h_2 = -h_1 \neq 0$ y $x = y = 1/2$:

$$(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = (h_1,-h_1)\begin{pmatrix} -h_1 \\ +h_1 \end{pmatrix} = -h_1^2 - h_1^2 < 0$$

Así que en el punto $(1/2,1/2)$ es un máximo condicionado.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

c) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ si $x - y = \frac{\pi}{4}$;
Solución: Estudiaremos la función lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(x - y - \pi/4), \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -2\cos x \operatorname{sen} x + \lambda = 0 \Rightarrow 2\cos x \operatorname{sen} x = \lambda, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2\cos y \operatorname{sen} y - \lambda = 0 \Rightarrow 2\cos y \operatorname{sen} y = -\lambda. \end{aligned}$$

Por otro lado impondremos la ligadura:

$$g(x,y) = x - y - \pi/4 = 0 \Rightarrow x - y = \pi/4.$$

Así que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x) &= \lambda, \\ \operatorname{sen}(2y) &= -\lambda, \\ x - y &= \pi/4. \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema y obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \pi/4 + y, \\ \operatorname{sen}(\pi/2 + 2y) = \lambda = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(2y) + \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(2y) \Rightarrow \cos(2y) &= \lambda. \end{aligned}$$

Ahora tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(2y) = \lambda \\ \operatorname{sen}(2y) = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \tan(2y) = -1 \Rightarrow 2y = -\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{\pi}{8} + k\pi/2, \\ x = \frac{\pi}{8} + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Así que los puntos candidatos a extremos condicionados son:

$$(x_k, y_k) = (\frac{\pi}{8} + k\pi/2, -\frac{\pi}{8} + k\pi/2), k \in \mathbb{Z},$$
$$\lambda_k = \operatorname{sen}(2x_k) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculamos ahora el jacobiano de g en estos puntos:

$$Jg(x_k, y_k) = (1, -1),$$

y ahora los vectores (h_1, h_2) tales que $Jg(x_k, y_k)(h_1, h_2)^t = 0$:

$$(1, -1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h_1 - h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Estudiamos el hessiano para decidir si hay extremos condicionados:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\cos(2x) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\cos(2y)$$

$$H_2L(x_k, y_k) = \begin{pmatrix} -2\cos(2x_k) & 0 \\ 0 & -2\cos(2y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k & 0 \\ 0 & -2\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Finalmente computamos el signo de $(h_1, h_1)H_2L(x_k, y_k)(h_1, h_1)^t$ para todo $h_1 > 0$:

$$(h_1, h_1)H_2L(x_k, y_k)(h_1, h_1)^t = (h_1, h_1)\begin{pmatrix} \sqrt{2}(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(-1)^{k+1} \end{pmatrix}(h_1, h_1)^t$$
$$= (h_1, h_1)\begin{pmatrix} h_1\sqrt{2}(-1)^{k+1} \\ h_1\sqrt{2}(-1)^{k+1} \end{pmatrix} = h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} + h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} =$$
$$2h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1}$$

Así que si k es par entonces $2h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} < 0$ y tenemos un máximo condicionado en (x_k, y_k). Por el contrario si k es impar entonces $2h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} > 0$ y tenemos un mínimo condicionado en (x_k, y_k).

d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$ si $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, donde $x, y, z \in \mathbb{R}^+$;

e) $f(x, y) = xy + yz$ si $x^2 + y^2 = 2$ e $y + z = 2$, donde $x, y \in \mathbb{R}^+$;

9.25. Calcula los extremos condicionados de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ con ligadura $4x^2 + y^2 = 4$. Di si son máximos o mínimos condicionados.

9.26. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x, y) = (x + xe^y, x + y, y^2 \operatorname{sen} x) \qquad g(x, y, z) = (x + e^{xyz}, y - xz).$$

Se pide:

a) $Jf(x, y)$.
Solución:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + e^y & xe^y \\ 1 & 1 \\ y^2\cos x & 2y\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

b) $Jg(x, y)$.
Solución:

$$Jg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + e^{zxy}yz & e^{xyz}zx & e^{xyz}xy \\ -z & 1 & -x \end{pmatrix}$$

c) ¿Se puede hacer la composición $g \circ f$? En caso afirmativo da la matriz $J(g \circ f)(0,0)$.
Solución: Sí se puede hacer la composición porque f se aplica sobre $\mathbb{R}^3$ y g parte de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} Jg \circ f(0,0) &= Jg(f(0,0))Jf(0,0) = Jg(0,0,0)Jf(0,0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Usando la fórmula del jacobiano de una composición de aplicaciones se pide calcular $Jf \circ g(0,0,0)$.
Solución:

$$\begin{aligned} Jf \circ g(0,0,0) &= Jf(g(0,0,0))Jg(0,0,0) = Jf(1,0)Jg(0,0,0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) A la vista de los resultados de antes se piden los valores de $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f \circ g}{\partial y}(0,0,0)$.
Solución: Según la teoría estas parciales aparecen en las columnas de la matrices calculadas en los dos apartados anteriores. En concreto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,0) &= (2,1), \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial y}(0,0,0) &= (1,1,0). \end{aligned}$$

9.27. Si $h : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$ es una aplicación de clase C^2, responde a las siguientes cuestiones para un $a \in \mathbb{R}^{2006}$.

a) Si $\det Jh(a) \neq 0$ sabemos que la aplicación h es localmente invertible de manera única. Llamemos h^{-1} a la inversa local de h ¿Quién es $Jh^{-1}(h(a))$?
Solución: $Jh^{-1}(h(a)) = (Jh(a))^{-1}$

b) ¿Coinciden el tamaño de la matriz Hessiana $Hh(a)$ y el de la matriz jacobiana $Jh(a)$?
Solución: En este caso sí. El tamaño de ambas es 2006×2006.

c) ¿Puedes asegurar que alguna de las dos matrices anteriores es simétrica?
Solución: Sí, la matriz hessiana es simétrica por ser la aplicación de clase C^2. En cuanto a la matriz jacobiana, aunque sea cuadrada, no podemos asegurar que sea simétrica.

9.28. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$f(x,y) = (x + y^2 x, xy) \qquad g(x,y) = (x + e^{xy}, y - x, \operatorname{sen}(xy)).$$

Se pide:

a) $Jf(x,y)$.
Solución:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & 2yx \\ y & x \end{pmatrix}$$

b) $Jg(x,y)$.
Solución:

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + e^{xy}y & xe^{xy} \\ -1 & 1 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$$

c) Da la expresión de la aplicación $g \circ f$.
Solución:

$$g \circ f(x,y) = g(x + y^2x, xy) = \Big(x + y^2x + e^{(x+y^2x)xy}, xy - x - y^2x, \\ \operatorname{sen}[(x+y^2x)xy]\Big)$$

d) Usando la fórmula del jacobiano de una composición de aplicaciones se pide calcular $Jg \circ f(0,1)$.
Solución:

$$\begin{aligned} Jg \circ f(0,1) &= Jg(f(0,1))Jf(0,1) = Jg(0,0)Jf(0,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) A la vista del resultado del apartado anterior, se piden los valores de $\frac{\partial g\circ f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial g\circ f}{\partial y}(0,1)$.
Solución: Según la teoría estas parciales aparecen en las columnas de la matriz calculada en el apartado anterior. Es decir:

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,1) = (2,-1,0),$$
$$\frac{\partial g \circ f}{\partial y}(0,1) = (0,0,0).$$

9.29. Si $h : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{2000}$ es una aplicación de clase C^1, responde a las siguientes cuestiones para un $a \in \mathbb{R}^{2000}$.

a) ¿Cuál es el tamaño de $Jh(a)$?
Solución: El tamaño es 2000×2000.

b) ¿Es la matriz $Jh(a)$ simétrica?
Solución: No se puede asegurar que sea simétrica, si fuera de clase C^2 sí lo podríamos asegurar.

c) ¿Qué condición le exigirías a h para asegurar que $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_{2000}}(a) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_{2000} \partial x_1}(a)$?
Solución: Que la función sea de clase C^2.

9.30. De una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ conocemos su matriz jacobiana en un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Esta matriz es:

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los valores de n y de m? *(0,25 puntos)*
Solución: $n = m = 2$.

b) ¿Es la aplicación f localmente invertible en a? ¿Por qué? *(0,25 puntos)*
Solución: Por el teorema de la función inversa como $|Jf(a)| = 3$ tenemos que la aplicación f es localmente invertible en el punto a.

c) ¿Es la aplicación f globalmente invertible? ¿Por qué? *(0,25 puntos)*
Solución: Globalmente no se puede asegurar nada porque el teorema de la función inversa sólo da información de carácter local.

d) Si la aplicación f es localmente invertible en a calcula $Jf^{-1}(f(a))$ *(0,25 puntos)*.
Solución: Aplicando el teorema de la función inversa tenemos:

$$Jf^{-1}(f(a)) = Jf(a)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.31. Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ para valores de $(x,y) \in (0,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Solución: Empezamos haciendo las parciales e igualándolas a 0 para buscar los puntos candidatos a extremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Así que el punto candidato a extremo es $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Calculamos ahora el hessiano de f en este punto para determinar si hay un extremo relativo :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sen} x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

El hessiano es:

$$Hf(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como la sucesión 1,$\Delta_1 = -1$, $\Delta_1 = 1$, está formada por términos alternativamente positivos y negativos deducimos que en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ tenemos un máximo relativo.

9.32. Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + 2x^2y^2 + 3y^2$ y di si son máximos o mínimos.

Solución: Hacemos las parciales e igualamos a 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4xy^2 = 2x(1+2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4yx^2 + 6y = 2y(2x^2+3) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Así que el único punto candidato a que haya un extremo relativo es $(0,0)$. Estudiamos en él el Hessiano:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1+2y^2) & 8xy \\ 8xy & 2(2x^2+3) \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Como la sucesión $1, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 12$ está formada sólo por miembros positivos tenemos que en $(0,0)$ hay un mínimo relativo.

9.33. En las siguientes cuestiones nos referiremos a una aplicación $g : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$. Se hacen algunas preguntas para verificar que conoces la relación entre *continuidad, derivabilidad respecto a cualquier dirección, diferenciabilidad y clase* C^1.

a) Si la aplicación g es derivable respecto a sus 2006 variables ¿Podemos decir que g es continua? ¿Y diferenciable?.

Solución: Como se vio en teoría en este caso no se puede asegurar ni que g sea continua ni diferenciable.

b) Ahora suponemos que g es diferenciable ¿Qué dos propiedades más puedes asegurar de g?.

Solución: Podemos asegurar que es continua y que es derivable respecto de cualquier dirección.

c) ¿Y si g es de clase C^1 qué puedes decir?.

Solución: Podemos decir que es diferenciable, continua y derivable respecto de cualquier dirección.

9.34. Calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy[(1x)^2-(2y)^2]}{3^2(x^2+y^2)} & \text{si}(x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0)=-\frac{4}{9} \qquad \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)=\frac{1}{9}$$

9.35. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ defininidas por

$$f(x,y)=(1x^2+2y^2,3x^2+4y^2,2x^3y^3) \qquad g(x,y,z)=z^1+2zy.$$

Calcula la dirección por la que descenderíamos a máxima pendiente por la superficie $z=g\circ f(z,y)$ si estamos situados en el punto $(1,1,g\circ f(1,1))$ *(2 puntos)*

Solución: La dirección es: $(114,122)$

Para calcularla es necesario obtener:

$$Jf(x,y)=\begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 6x & 8y \\ 6x^2y^3 & 6x^3y^2 \end{pmatrix}, Jf(1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, f(1,1)=(3,7,2),$$

$$Jg(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & 2z & 2y+1z^0 \end{pmatrix} \; Jg(3,7,2)=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

9.36. Calcula el plano tangente a la superficie gráfica de $z=f(x,y)$ en el punto $(0,0,f(0,0))$, donde la función f es

$$f(x,y):=\begin{cases} \frac{y^3+x^5\operatorname{sen}\left(\frac{7}{(x^2+y^2)^7}\right)}{3(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(2 puntos)

Solución: Sacando las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, se tiene que $z=0$ es el plano tangente. Basta con aplicar la fórmula que me da el plano tangente mediante el uso de las derivadas parciales.

9.37. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x+y$ en el recinto

$$A=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4, x\leq 0\}$$

Dibuja el recinto A y explica por qué está garantizada la existencia de extremos absolutos.

9.38. Calcula los extremos condicionados de la función $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ sujeta a las condiciones $x^2=1$, $x+y+z=1$, considerando que f sólo está definida en $(\frac{-1}{2},+\infty)\times(\frac{-1}{2},+\infty)\times(\frac{-1}{2},+\infty)$.

Solución: Construimos la función Lagrangiana:

$$L(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^3+\lambda(x^2-1)+\mu(x+y+z-1)$$

Ahora calculamos las parciales de la Lagrangiana y calculamos los candidatos a extremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=2x+2x\lambda+\mu=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=4y+\mu=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=9z+\mu=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones deducimos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2x\lambda - 9z = 0 \\ 4y - 9z = 0 \\ x^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

Ahora tenemos que $x = 1$ y:

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 2\lambda - 9z = 0 \\ 4y - 9z = 0 \\ +y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1, y = z = 0, \lambda = -1, \mu = 0.$$

Nos ha salido un único candidato a extremo $P = (1, 0, 0)$ con $\lambda = -1$ y $\mu = 0$. Calculamos ahora el hessiano de L en dicho punto.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= 4 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, y, z) &= 9 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Así que

$$HL(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$HL(P) = (h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} (h_1, h_2, h_3)^t = (h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 4h_2 \\ 9h_3 \end{pmatrix} = 4h_2^2 + 9h_3^2 > 0$$

Así que P es un mínimo condicionado.

9.39. Calcula los extremos relativos, si existen, de la función $f(x, y) = (x^2 + x)(3 - 4y + y^2)$.

Solución: Imponemos las condiciones necesarias para la existencia de extremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (2x + 1)(3 - 4y + y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (x^2 + x)(4 + 2y) = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son:

- Si $2x + 1 = 0$ entonces $x = -\frac{1}{2}$ y debe ocurrir que $4 + 2y = 0$, es decir $y = -2$.
- Si $3 - 4y + y^2 = 0$ entonces $y = 3$ o $y = 1$ y forzosamente $x = 0$ o $x = -1$.

En consecuencia los puntos candidatos a extremos son $P_1 = (-\frac{1}{2}, -2)$, $P_2 = (0,3)$, $P_3 = (-1,3)$, $P_4 = (0,1)$, $P_5 = (-1,1)$. Para ver si estos puntos son extremos tenemos que calcular el Hessiano de f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(3-4y+y^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2x+1)(-4+2y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+x)2$$
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(3-4y+y^2) & (2x+1)(-4+2y) \\ (2x+1)(-4+2y) & (x^2+x)2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos uno a uno los puntos:

$$\boxed{P_1 = (-\frac{1}{2}, -2)}$$

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así que la sucesión asociada a este punto es:

$$1, 30, -15$$

que no me permite asegurar la existencia de extremos.

$$\boxed{P_2 = (0,3)}$$

$$Hf(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la sucesión asociada a este punto es:

$$1, 0, -4$$

que no nos permite asegurar la existencia de extremos.

$$\boxed{P_3 = (-1,3)}$$

$$Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la sucesión asociada a este punto es:

$$1, 0, -4$$

que no nos permite asegurar la existencia de extremos.

$$\boxed{P_4 = (0,1)}$$

$$Hf(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la sucesión asociada a este punto es:

$$1, 0, -4$$

que no nos permite asegurar la existencia de extremos.

$$\boxed{P_5 = (-1, 1)}$$

$$Hf(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que la sucesión asociada a este punto es:

$$1, 0, -4$$

que no nos permite asegurar la existencia de extremos.

9.40. Encuentra los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 6^2} \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Justifica si éstos extremos relativos son absolutos.

Solución: Tiene un mínmo absoluto en $(0, 0, 0)$

9.41. Encuentra los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14$. Justifica si éstos extremos relativos son absolutos.

Solución: Mínimo absoluto en $(1, 2, 3)$

9.42. De los paralepípedos (entendemos que todas las aristas que intersecan en un vértice lo hacen con un ángulo de 90 grados) cuyas aristas suman la longitud 24 encuentra el que tiene mayor volumen.

Solución: Se trataría de un cubo de arista $\frac{1}{3}6 = 2$.

9.43. Consideremos el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 8, y \geq 0\}$$

Encuentra los puntos de K más cercanos y más lejanos al punto $(-3, 5)$.

9.44. De todos los tríos de números reales cuyos cuadrados suman 24 encuentra los que maximizan o minimizan la suma de sus cubos.

Solución: Hay 14 puntos críticos para estudiar, de los cuales se saca que los máximo absolutos son $(0, 0, \sqrt{24})$, $(0, \sqrt{24}, 0)$, $(\sqrt{24}, 0, 0)$ y los mínimos absolutos son $(0, 0, -\sqrt{24})$, $(0, -\sqrt{24}, 0)$, $(-\sqrt{24}, 0, 0)$

9.45. Encontrar los puntos que están sobre el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = 1$ y sobre el plano de ecuación $x+y+z = 1$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea máxima o mínima

9.46. Encontrar los puntos que están sobre el cilindro "macizo" de ecuación $x^2 + y^2 \leq 1$ y sobre el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea máxima o mínima

9.47. Calcular la distancia máxima y mínima del origen a la siguiente elipse:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$$

9.48. Estudia los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = xyz$.

9.49. Estudia los extremos relativos condicionados de la función $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a la condición $x + y + z = 27$.

9.50. De entre las ternas de números positivos que suman una cantidad menor o igual a 27 ¿es cierto que su producto no excede de 729?

9.51. De entre las ternas de números cuyos valores absolutos suman una cantidad menor o igual a 27 ¿es cierto que su producto no excede de 729?

Usando el método explicado para encontrar extremos condicionados, calcula los extremos condicionados de la función $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ con ligadura $y = 4x^2$. Di si son máximos o mínimos condicionados.

Solución:

Empezamos escribiendo la lagrangiana del problema $L(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + \lambda(y - 4x^2)$.

Imponemos las condiciones necesarias para que existan extremos condicionados:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 4x - 8x\lambda = 0 \Rightarrow (4-8\lambda)x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 4y + \lambda = 0 \Rightarrow 4y = -\lambda$$
$$g(x,y) = y - 4x^2 = 0 \Rightarrow y = 4x^2$$

Si metemos el valor de la última ecuación en las dos primeras obtenemos: $16x^2 = -\lambda$ y $(4-8\lambda)x = 0$. De estas dos se tiene $(4 + 8\cdot 16x^2)x = 0$, que sólo tiene por resultado $x = 0$.

Como $x = 0$ e $y = 4x^2$, el único candidato a extremo es el punto $P = (0,0)$ con $\lambda = 0$.

Calculamos ahora el Hessiano de L:

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 4-8\lambda & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow HL(P) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora tomamos vectores $h = (h_1, h_2) \neq 0$ que verifiquen $dg(P)(h) = 0$ y vemos si las expresiones $h^i HL(P_i)(h^i)^t$ son positivas o negativas. Antes de calcular esos vectores computamos la expresión $hHL(P)(h)^t$ por si no intervinieran los valores de los vectores h para determinar el signo.

$$hHL(P)(h)^t = 4h_1^2 + 4h_2^2 > 0.$$

Así que en $P = (0,0)$ tenemos un mínimo condicionado.

X. Cálculo integral: funciones reales de varias variables

10.1. Calcular para $\Omega = [0,1]\times[0,3]$ las integrales

(a) $\iint_\Omega xy\,dxdy$. (b) $\iint_\Omega xe^y\,dxdy$. (c) $\iint_\Omega y^2 \operatorname{sen} x\,dxdy$.

10.2. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

a) $\iint_\Omega y\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

b) $\iint_\Omega (3y^3 + x^2)dxdy$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1, \}$.

c) $\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ y^2\le x\le y\}$.

d) $\iint_\Omega ye^x\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}$.

e) $\iint_\Omega y + \log x\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0{,}5\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$.

10.3. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\iint_\Omega (4-y^2)dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8-2x$.

b) $\iint_\Omega (x^4+y^2)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.

c) $\iint_\Omega (x+y)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1\le x\le 1$.

d) $\iint_\Omega (3xy^2 - y)dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x\in[-1,1]$.

10.4. Calcular la superficie de las siguientes regiones:

a) Círculo de radio R.

b) Elipse de semiejes a, b.

c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

10.5. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.

b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

c) Esfera de radio R.

d) Cono de altura h y radio de la base R.

e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

10.6. Calcular cambiando a coordenadas polares:

a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Solución: Conviene darse cuenta que el conjunto sobre el que estamos integrando es $\Omega = \{(x, y) : x^2+y^2 = 1, x \geq 0\}$ y que expresado en coordenadas polares es $\Omega_p = \{(r, \theta) : 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 < r \leq 1\} \cup \{(r, \theta) : \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi\}$. Así que:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\Omega_p} r^2 dr d\theta$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} r^2 dr d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_{0}^{1} r^2 dr d\theta = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

b) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx$.

Solución: La figura 2 muestra el recinto, Ω, de integración de la integral de este apartado. Este recinto se expresa en coordenadas polares como sigue: $\Omega_p = \{(r, \theta) : 0 < r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$. Así que la integral se resuelve como sigue:

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx = \iint_{\Omega_p} r^2 dr d\theta = \int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta dr = \frac{\pi}{2}\frac{8}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

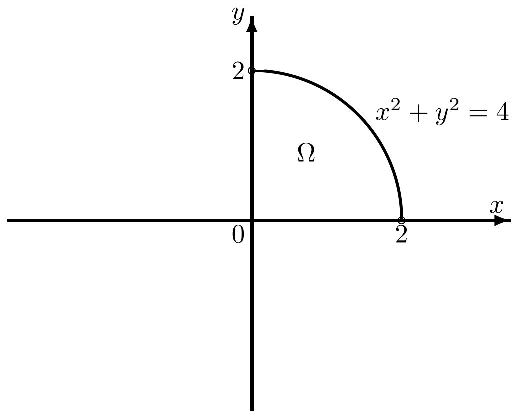

Figura 2: Recinto de la integral del apartado **10.6***b*

c) $\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}dydx$.

Solución: La figura 3 muestra el recinto, Ω, de integración de la integral de este apartado. Para expresar este recinto en coordenadas polares se requiere un poco de trabajo. Es claro que el ángulo θ varía entre 0 y el ángulo que forma el eje de abscisas con la recta que une el origen con el punto Q. Así que θ varía entre 0 y $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Ahora fijamos un ángulo θ en el rango anterior y vemos entre qué valores mínimo y máximo varía r. La variación máxima es independiente de θ e igual a 1. En cuanto a la mínima será la distancia entre P y el

origen de coordenadas. La recta que une O con P es $y = \tan\theta\, x$, así que $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\tan\theta)$ y la distancia de este punto al origen es $r = \frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{2\cos\theta}$.
Finamente el recinto Ω en coordenadas polares es:

$$\Omega_p = \{(r,\theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2\cos\theta} < r < 1\}.$$

Ahora la integral se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{3/2}dydx &= \iint_{\Omega_p} r^4 drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} r^4 drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1 - \frac{1}{2^5\cos^5\theta}\right)d\theta \\ = \frac{\pi}{3}\frac{1}{5} - \frac{1}{160}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}^2\theta)^3}d\theta &= \frac{\pi}{3}\frac{1}{5} - \frac{1}{160}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^3}dt\end{aligned}$$

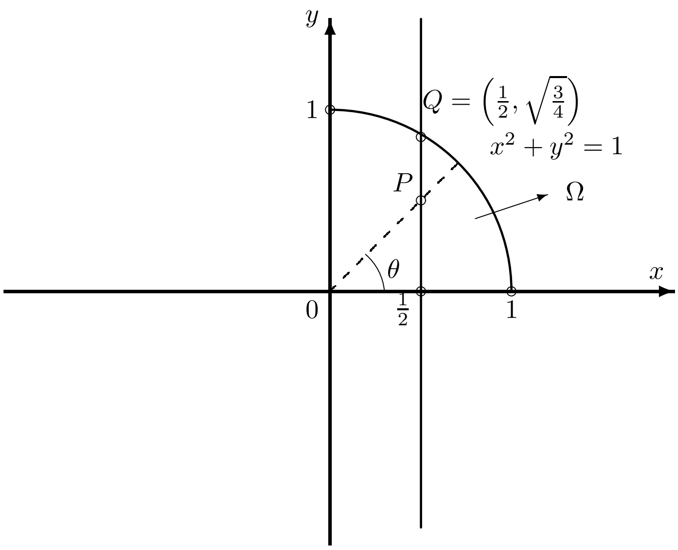

Figura 3: Recinto de la integral del apartado **10.6**c

d) $\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

10.7. Calcular para $\Omega = [0,1]\times[0,3]\times[-1,1]$ las integrales

(a) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$. (b) $\iiint_\Omega xe^{y+z}dxdydz$. (c) $\iiint_\Omega y^2z^3 \operatorname{sen} x dxdydz$.

10.8. Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\iiint_\Omega (y^3+z+x)dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
b) $\iiint_\Omega (y\operatorname{sen} z + x)dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x, y \leq 1\}$.
c) $\iiint_\Omega xdxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2+x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.
d) $\iiint_\Omega yxzdxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2+x,\ -1 \leq x, y \leq 1\}$.

10.9. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

10.10. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1-y^2$, inferiormente por el plano $2x+3y+z+10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2+y^2+x = 0$.

10.11. Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución: La gráfica de ambas funciones intersecan en los puntos (x, y, z) que verifican $2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, es decir: $x^2 + y^2 = 1$.

Haciendo un esbozo de ambas gráficas se ve que la proyección del sólido al que le queremos calcular el volumen da el recinto $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Así que el valor del volumen es:

$$V = \iint_\Omega [2 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)]dxdy = 2\iint_\Omega [1 - x^2 - y^2]dxdy$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 [1 - r^2]rdrd\theta = 4\pi[r^2/2 - r^4/4]_0^1 = \pi.$$

10.12. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

10.13. Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

a) El volumen de una esfera de radio R.

b) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ en el recinto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

c) El volumen del recinto del apartado (b).

10.14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

Solución: La figura 5 puede clarificar el sólido al que le queremos calcular el volumen. En efecto de dicho dibujo se deduce que este cuerpo es:

$$\Lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}, 0 < z < x^2 + 4y^2\}.$$

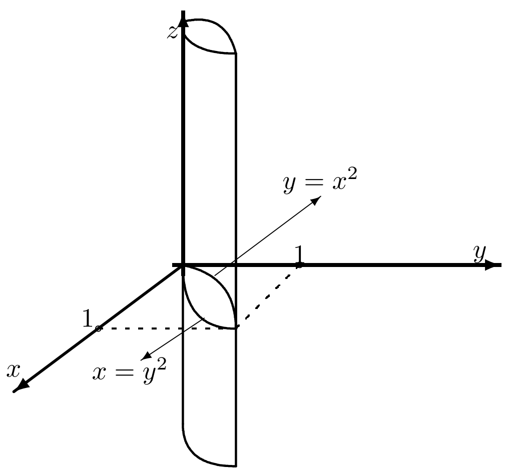

Figura 4: Cilindros

Así que

$$V = \iiint_\Lambda 1dxdydz = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^{x^2+4y^2} 1dzdydz = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)dxdy$$
$$= \int_0^1 [x^2y + 4y^3/3]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx = \int_0^1 (x^{5/2} + 4x^{3/2}/3) - (x^4 + 4/3x^6)dx$$
$$= \left[2/7x^{7/2} + 4/3 \cdot 2/5x^{5/2} - 1/5x^5 - 4/3 \cdot 1/7x^7\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= 2/7 + 8/15 - 1/5 - 4/21 = 3/7.$$

10.15. Calcular $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=1$.

Solución: Usamos el cambio de coordenadas $u = x+y$, $v = x-y$, es decir la función que nos relaciona las coordenadas u y v con las antiguas x e y es:

$$\begin{array}{rcl}\Phi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \to & (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}).\end{array}$$

Se puede comprobar que $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación biyectiva. En efecto, Φ es inyectiva ya que si $\Phi(u,v) = \Phi(u',v')$ entonces $u+v = u'+v'$ y $u-v = u'-v'$. Si sumamos las dos ecuaciones deducimos fácilmente $u = u'$ e inmediatamente $v = v'$. Así que Φ es inyectiva.

La aplicación Φ es suprayectiva ya que dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que $\Phi(x+y, x-y) = (x,y)$.

Así que Φ es un cambio de coordenadas y podemos aplicar la fórmula de cambio de coordenadas para integral doble. Para ello necesitamos primero calcular el valor absoluto del determinante del jacobiano de Φ :

$$|\det J\Phi(u,v)| = \left|\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\right| = |-1/2| = 1/2.$$

Además también necesitamos describir el recinto de integración Ω en las nuevas variables u y v. Para ello basta con transformar las rectas que limitan a Ω a las nuevas variables (las transformadas de esas rectas limitaran al conjunto Λ). Observa que:

a) La recta $x+y=1$ se transforma en la recta $u=1$.

b) La recta $x=0$ se transforma en $v=-u$.

c) La recta $y=0$ se transforma en $v=u$.

Así que:

$$\Lambda = \{(u,v) : 0 < u < 1, -u < v < u\}.$$

Por último aplicamos la fórmula del cambio de variable:

$$\begin{aligned} \iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy &= \iint_\Lambda e^{v/u}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u} e^{v/u}dvdu \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 [ue^{v/u}]_{v=-u}^{v=u}du &= \frac{1}{2}\int_0^1 (ue - ue^{-1})du = \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^1 udu \\ &= \frac{e-e^{-1}}{4} \end{aligned}$$

10.16. Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

Solución:

10.17. Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

10.18. Calcular $\iint_\Omega xydxdy$ donde Ω es la región limitada por las curvas $y = 2x$, $y = 2x-2$, $y = x$ e $y = x+1$. Indicación: hacer el cambio de variable $x = u - v$, $y = 2u - v$.

10.19. Calcular el volumen encerrado por un cilindro de radio $R/2$ y una esfera de radio R cuyo centro está situado en un punto de la superficie del cilindro. Indicación: hacer el cambio a coordenadas cilíndricas.

10.20. Calcular

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

Solución: Empezamos describiendo el recinto Ω en coordenadas esféricas:

$$\Omega_e = \{(r,\theta,\phi) : b \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\},$$

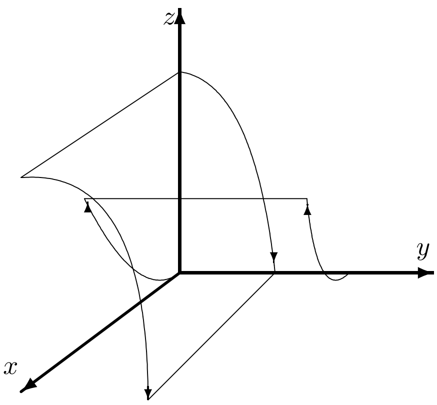

Figura 5: Cilindros

así que:

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{\Omega_e} \frac{r^2 \operatorname{sen}\phi}{r^3} dr d\theta d\phi = \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\phi}{r} d\phi d\theta dr$$
$$= \int_b^a \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta dr = 4\pi \int_b^a \frac{1}{r} dr = 4\pi \log \frac{a}{b}.$$

10.21. *Coordenadas cilíndricas.*

a) Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas: $\Phi(r,\theta,z) = \dots$. **Solución**: $\Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$

b) ¿En qué rango máximo (abierto) varían r, θ y z para que Φ sea biyectiva?. **Solución**: $(r,\theta,z) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$

c) Calcula el jacobiano de Φ y calcula el valor absoluto de su determinante (este determinante lo tienes que calcular explícitamente).
Solución:

$$J\Phi(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J\Phi(r,\theta,\phi)| = |r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)| = r$$

d) Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x,y,z) : 16 \leq x^2+y^2 \leq 81, x \leq 0, 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$.
Solución:

$$V = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \int_4^9 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{r^2} r dz d\theta dr = \int_4^9 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} r^3 d\theta dr$$
$$= [r^4/4]_4^9 \pi = \frac{6305\pi}{4}$$

10.22. *Coordenadas esféricas.*

a) Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas: $\Phi(r,\theta,\phi) = \dots$.
Solución: $\Phi(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta \operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, r\cos\phi)$

b) ¿En qué rango máximo (abierto) varían r y los ángulos θ y ϕ para que Φ sea biyectiva?.
Solución: $(r, \theta, \phi) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

c) Calcula el jacobiano de Φ y di cuál es el valor absoluto de su determinante (este determinante no hace falta que lo calcules explícitamente).
Solución:

$$J\Phi(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\phi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\cos\theta\operatorname{sen}\phi & r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

$$|\det J\Phi(r,\theta,\phi)| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$

d) Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x, y, z) : 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, y \geq 0\}$.
Solución:

$$V = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \int_5^7 \int_0^\pi \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta dr = [r^3/3]_5^7 [-\cos\phi]_0^\pi \pi$$
$$= \frac{2\pi}{3}(7^3 - 5^3) = \frac{436\pi}{3}$$

e) Calcula la integral $\iiint_\Omega \operatorname{sen}[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]dxdydz$, donde Ω es el conjunto del apartado anterior.
Solución:

$$\iiint_\Omega \operatorname{sen}[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]dxdydz = \int_5^7 \int_0^\pi \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}(r^3)\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta dr$$
$$= \frac{1}{3}\int_5^7 \int_0^\pi \int_0^\pi 3r^2 \operatorname{sen}(r^3)\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta dr = \frac{1}{3}[-\cos(r^3)]_{r=5}^{r=7}[-\cos\phi]_{\phi=0}^\pi \pi$$
$$= \frac{2\pi}{3}(\cos(125) - \cos(343))$$

10.23. Calcula el volumen limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.
Solución: Hacemos notar que el volumen queda limitado inferiormente por $z = x^2 + y^2$ y por $z = 2x^2 + 2y^2$. Lateralmente los límites los marcan el plano $y = x$ y el cilindro $y = x^2$, es decir que el volumen será:

$$V = \iint_\Omega [2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)]dxdy = \iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy,$$

siendo Ω el recinto plano limitado por $y = x$ e $y = x^2$. Así que:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Hacemos cálculos:

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)dydx = \int_0^1 [x^2 y + \frac{y^3}{3}]_{x^2}^x dx$$
$$= \int_0^1 (x^3 + \frac{x^3}{3}) - (x^4 + \frac{x^6}{3})dx \int_0^1 \frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3})dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21})\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{35 - 21 - 5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}$$

10.24. Dadas constantes $0 < a < b$, calcula el volumen limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, suponiendo además $z \geq 0$.
Solución: El sólido al que le tenemos que calcular el volumen está limitado por las esferas de radio a y b. Estas esferas las hemos cortado con el paraboloide $x^2 + y^2 = z^2$ (ver figura **10.24**).

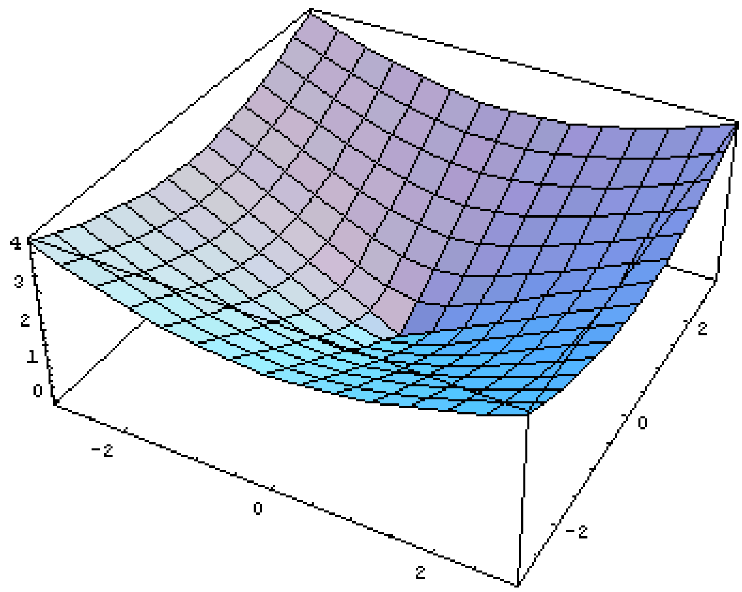

Figura 6: Gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

La intersección de la esfera E_1 $(x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$ con el paraboloide es el círculo $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ a una altura $z = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ y la intersección de la esfera E_1 $(x^2 + y^2 + z^2 = b^2)$ con el paraboloide es el círculo $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{2}$, a una altura $z = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$.

Es fácil darse cuenta que la intersección del paraboloide con las dos esferas limita dos sólidos, uno donde la z es siempre positiva y otro donde la z toma valores tanto positivos como negativos. Nosotros tenemos que calcular el volumen del primero.

La proyección del sólido sobre el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{2}$. Vamos a describir el sólido en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}\Omega_c &= \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \frac{a}{\sqrt{2}}, +\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le +\sqrt{b^2 - r^2}\} \\ &\bigcup \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, \frac{a}{\sqrt{2}} \le r \le \frac{b}{\sqrt{2}}, r \le z \le +\sqrt{b^2 - r^2}\}\end{aligned}$$

Ahora podemos calcular el volumen:

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_{\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} 1 r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{b^2-r^2}} 1 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{b^2 - r^2} - \sqrt{a^2 - r^2}\right] r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{b^2 - r^2} - r\right] r dr d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{b^2 - r^2} - \sqrt{a^2 - r^2}\right] r dr + \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{b^2 - r^2} - r\right] r dr \right) \\ &= -\pi \left(\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} -2 \left[\sqrt{b^2 - r^2} - \sqrt{a^2 - r^2}\right] r dr + \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} -2 \left[\sqrt{b^2 - r^2} - r\right] r dr \right) \\ &= -\pi \left\{ \frac{2}{3} \left[(b^2 - r^2)^{3/2} - (a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \left[\frac{2}{3}(b^2 - r^2)^{3/2} + \frac{2}{3} r^3\right]_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} \right\} \\ &= \ldots \text{(haz los cálculos)} \ldots \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3).\end{aligned}$$

10.25. Calcula el área de la figura limitada por $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ con $x^2+y^2 \geq a^2$.

Solución: Pasamos esta gráfica a coordenadas polares y obtenemos:

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \Rightarrow r^2 = 2a^2\cos(2\theta).$$

Así que $r = +\sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)}$, estando esta última función definida para $2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \cup [\frac{7\pi}{2}, 4\pi]$, es decir, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$. Para dibujar estas gráficas usamos la representación en coordenadas polares y tenemos en cuenta que es simétrica tanto respecto al eje de ordenadas como al de abscisas (ver la figura 7).

Así que el recinto de integración expresado en coordenadas polares es

$$\Omega_p = \{(r,\theta) : \theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi], r \in [a, +\sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)}]\}$$

Aclaración: *los valores* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ *y* $\frac{11\pi}{6}$ *del recinto anterior se obtienen de resolver la ecuación* $r = \sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)} = a$.

Así que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_a^{+\sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr d\theta + \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} \int_a^{+\sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr d\theta \\ &\qquad + \int_{11\pi/6}^{2\pi} \int_a^{+\sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(2a^2\cos(2\theta) - a^2\right) d\theta + \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} \left(2a^2\cos(2\theta) - a^2\right) d\theta \right. \\ &\qquad \left. + \int_{11\pi/6}^{2\pi} \left(2a^2\cos(2\theta) - a^2\right) d\theta\right] \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos(2\theta) - 1)\, d\theta + \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} (2\cos(2\theta) - 1)\, d\theta \right. \\ &\qquad \left. + \int_{11\pi/6}^{2\pi} (2\cos(2\theta) - 1)\, d\theta\right] \\ &= \frac{a^2}{2}\left\{[\operatorname{sen}(2\theta) - \theta]_0^{\frac{\pi}{6}} + [\operatorname{sen}(2\theta) - \theta]_{5\pi/6}^{7\pi/6} + [\operatorname{sen}(2\theta) - \theta]_{11\pi/6}^{2\pi}\right\} \\ &= a^2\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} \end{aligned}$$

10.26. Calcula la siguiente integral

$$\iint_A xydxdy$$

donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, y \geq x\}$.

10.27. Calcula la integral $\iint_\Omega 4x^9 + e^{5z}dxdy$ siendo Ω el tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano $7x+4y+2z = 13$.

10.28. Calcula el volumen del conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z^2+y^2 \leq 1\}$

10.29. Calcular el volumen del conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : 25 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 81, z^2 \leq x^2+y^2\}$

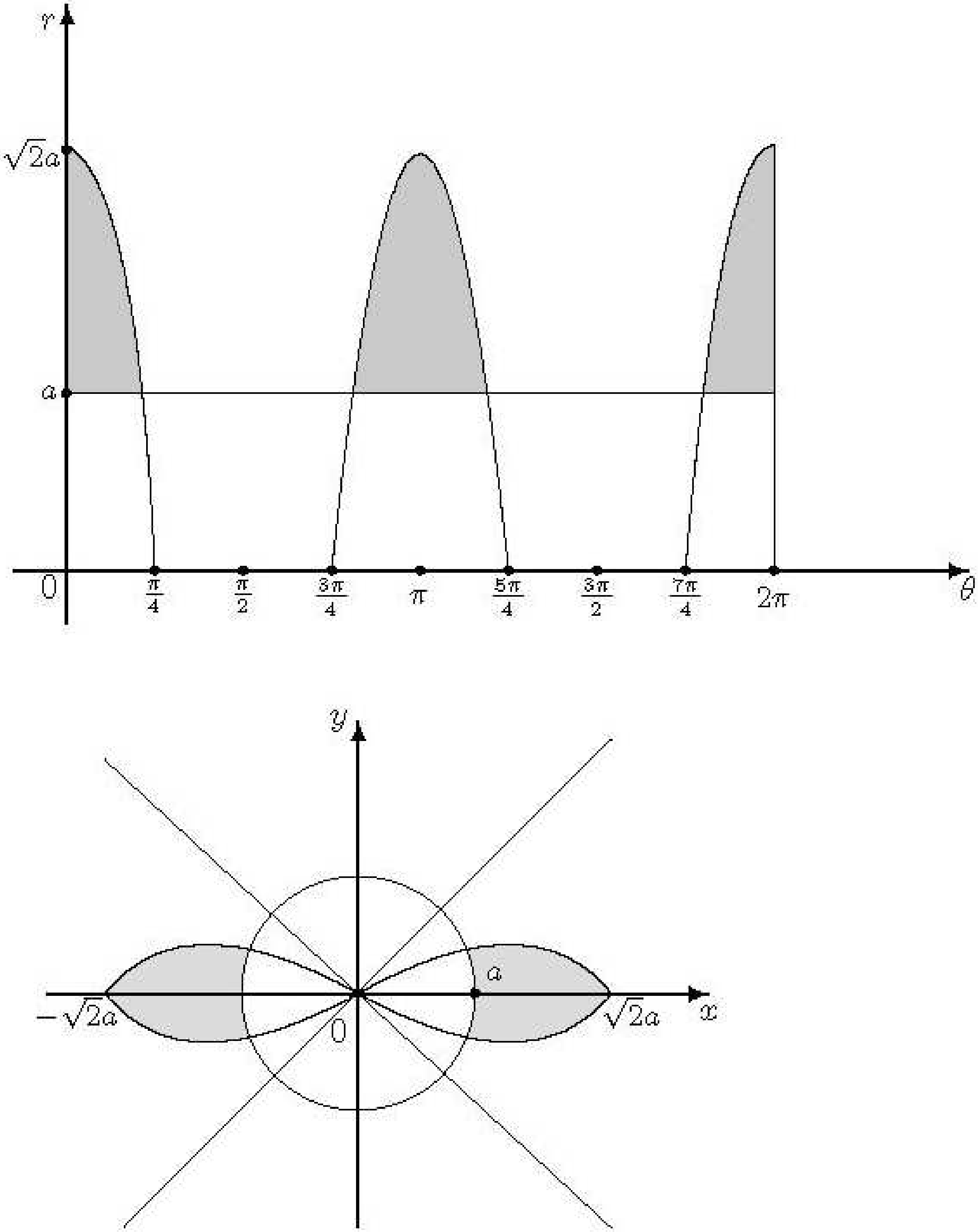

Figura 7: Figura relativa al ejercicio **10.25**