LÍMITES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Ej. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^3-y^3}$$

Intentemos el cambio a coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^6\theta + r^6 \operatorname{sen}^6\theta}{r^3(\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta)} = r^3 \frac{\cos^6\theta + \operatorname{sen}^6\theta}{\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta}.$$

Este límite es 0 siempre que no se anule el denominador.

Pero, ¿Qué pasa cuando se anule? Es decir cuando $\cos^3\theta = \operatorname{sen}^3\theta$.

Por ejemplo cuando $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, es decir cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$

Hagamos límites direccionales acercándonos a $(0,0)$ por rectas con pendiente 1:

- $\boxed{y = x}$ no es una dirección válida porque la función no está definida
- $\boxed{y = x^n + x}$ $\quad y' = nx^{n-1} + 1$ y si $n>1$ $y'(0) = 1$

Tomemos $y = x^n + x$ con $n > 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6+(x^n+x)^6}{x^3-(x^n+x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^3\left(\frac{x^n+x}{x}\right)^6}{1-\left(\frac{x^n+x}{x}\right)^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^3(x^{n-1}+1)^6}{1-(x^{n-1}+1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^3(x^{n-1}+1)^6}{-x^{3n-1}-3x^{2n-1}-3x^{n-1}}$$

Consideramos $\underline{\underline{n\geq 5}}$. $\lim_{x\to 0} \frac{1+(1+x^{n-1})^6}{-x^{3n-4}-3x^{2n-4}-3x^{n-4}} = \pm\infty$ (dependiendo de por dónde nos acerquemos)

Luego NO EXISTE EL LÍMITE.

Ejercicio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^5}{x^2-3y^3}$$

El paso a coordenadas polares nos da límite 0 salvo para una dirección (aquella en la que $x^2=3y^3$)

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{4}\,2}(\cos^4\theta + r\,\text{sen}^5\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta - 3r\,\text{sen}^3\theta)} = ?$$

Vamos a hacer un límite direccional por la dirección

$$3y^3 = x^2+x^5, \text{ es decir: } \quad y = \left(\frac{x^2+x^5}{3}\right)^{1/3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + \left(\frac{x^2+x^5}{3}\right)^{5/3}}{x^2-x^2-x^5} \overset{\text{dividimos por } x^{10/3}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^{4-\frac{10}{3}} + \left(\frac{x^2+x^5}{3x^2}\right)^{5/3}}{-x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{4-10/3} + \left(\frac{1+x^3}{3}\right)^{5/3}}{-x^5} = \infty$$

Luego no existe el límite doble.

Ejercicio Demuestra que $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si f_i es continua $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ siendo f_i las components de f. Es decir:

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots f_m(\vec{x}))$$

Dem

"$\Rightarrow$" Supongamos que f es continua en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y veamos que $f_i: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ también lo es. Probemos que f_i es continua en $\vec{x}_0$.

Sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon$ entonces $|f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{x}_0)| < \varepsilon$.

Aprovechando la continuidad de f podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de manera que si $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1$ entonces

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{x}_0)| < \varepsilon, \text{ luego}$$

para todo i $\quad |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{x}_0)| < \varepsilon$ y bastará tomar $\delta = \delta_1$.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $f_i: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\vec{x}_0$ $\forall i$. Demostremos la continuidad de $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Para ello tomamos $\varepsilon > 0$ y debemos encontrar $\delta > 0$ para el que se verifique $\|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)\|<\varepsilon$.

Como todas las f_i son continuas, para $\frac{\varepsilon}{m}$ podemos encontrar $\delta_i>0$ tal que si $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta_i$ entonces $|f_i(\vec{x})-f_i(\vec{x}_0)|<\frac{\varepsilon}{m}$

Tomamos $\delta=\min_i \delta_i$ y se verifica:

$$\|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)\|_1=\sum_{i=1}^{m}|f_i(\vec{x})-f_i(\vec{x}_0)|<\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon}{m}=m\cdot\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon.$$

Ejercicio Demuestre que $X_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua.
$(x_1, x_2, \ldots x_n) \to x_i$

Fijamos un punto $z = (z_1, z_2, \ldots z_n)$ donde vamos a verificar que X_i es continua. Sea $\varepsilon > 0$, ahora vamos a buscar $\delta > 0$ para que se verifique:

$$|X_i(x_1, x_2, \ldots x_n) - X_i(z_1, z_2 \ldots z_n)| = |x_i - z_i| < \varepsilon \quad \text{si}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) - (z_1, z_2, \ldots z_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| < \delta.$$

Observe que tomando $\delta := \varepsilon$ se cumple lo anterior y la función X_i es continua.

8.5 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

Usamos coordenadas polares:

- $\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4 \operatorname{sen}^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta) = 0$

- $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0| = |r^2(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)| = r^2(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)$

$\leq r^2\, 2 = F(r)$. Además $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$

Luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$

8.6

$$f(x,y) = (\underbrace{x+y^2}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{f_2(x,y)})$$

Recuerde que existe el límite de f si y sólo si existen los de las funciones componentes y:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y), \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)\right)$$

Puesto que f_1 es continua $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = f_1(0,0) = 0$

Sin embargo no existe el límite de la función $f_2(x,y)$ porque los límites direccionales por las direcciones $y = kx$ dependen de k:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 k}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

Conclusión: NO EXISTE EL LÍMITE

8.7 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

No existe el límite, basta con ver que los direccionales por las direcciones $y=kx$ dependen de k:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{x\sqrt{(1+k^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

Luego no existe el límite.

8.8 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$

No existe el límite, basta con ver que los direcciones por las direcciones $y=kx$ tienden hacia ∞:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+k}{x(1+k^2)} = \infty.$$

Luego no existe el límite.

8.11 $f(x,y) = \left(\overbrace{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}^{f_1(x,y)}, \overbrace{xy}^{f_2(x,y)}, \overbrace{\sqrt{|xy|}}^{f_3(x,y)} \right)$

(*) Estudiamos los límites de cada uno de las componentes. Para el primero recurrimos a coordenadas polares:

- $\lim\limits_{r\to 0} r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \dfrac{r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$

$= 0$

- $\left| f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0 \right| = \left| r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \right| \le$

$r^2 |\cos\theta| |\operatorname{sen}\theta| \left(|\cos^2\theta| + |\operatorname{sen}^2\theta| \right) \le r^2 \cdot 1 \cdot 2 = 2r^2 = F(r)$

$\lim\limits_{r\to 0} F(r) = 0$

Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$

(**) Como $f_2(x,y)$ y $f_3(x,y)$ son funciones continuas

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = f_2(0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = f_3(0,0)$

(*) Finalmente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0, 0, 0)$

(8.12) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$$

Con límites direccionales por la dirección $y=kx$ tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1+k}{1+k^2} \quad (\text{depende de } k)$$

Luego no existe el límite.

8.13 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Usamos coordenadas polares:

- $$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos\theta \,\text{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4 \,\text{sen}^4\theta} = \lim_{r\to 0} r \frac{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^4\theta} = 0$$

- $$|f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) - 0| = r \frac{|\cos\theta\,\text{sen}^2\theta|}{\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^4\theta} \leq \text{?}$$

(no lo podemos acotar cuando $\theta = \pi/2$)

Hacemos límites direccionales por $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Ahora por la dirección $x=y^2$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

Luego no existe el límite.

8.14 $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$

Usamos coordenadas polares

- $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3(\cos^3\theta + \text{sen}^3\theta)}{r^2(1+r^2\text{sen}^4\theta)} =$

$$= \lim_{r\to 0} r \frac{\cos^3\theta + \text{sen}^3\theta}{1+r^2\text{sen}^4\theta} = 0$$

- $\left| f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) - 0 \right| = r \dfrac{|\cos^3\theta + \text{sen}^3\theta|}{1+r^2\text{sen}^4\theta} \leq$

$$\leq r \frac{|\cos^3\theta| + |\text{sen}^3\theta|}{1} \leq 2r = F(r)$$

$$F(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Así que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

8.15

$$f(x,y) = \left(\underbrace{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)}_{f_2(x,y)} \right)$$

Tomando límites direccionales en $f_2(x,y)$ por $y=\lambda x$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2+\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2}\right) = \frac{1+\lambda}{1+\lambda^2},$$

luego no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$ y tampoco

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

8.16

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } |x|\neq|y| \\ 0 & \text{si } |x|=|y|\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a)

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)=\frac{1/n^3}{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{n(1-k^2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1-k^2)}=0$$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1/n^3}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^6}}=\frac{1/n^3}{\frac{n^4-1}{n^6}}=\frac{n^3}{n^4-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{n^3}}=0$$

b) Vamos a hacer límites direccionales usando $y=x^2+x$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2-(x^2+x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{-x^4-2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{-x-2}=$$

$$=\frac{-1}{2}$$

Y ahora con $y = x^3 + x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-(x^3+x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-x^6-2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-x^3-2x}$$

$$= \infty$$

Luego el límite de $f(x,y)$ no existe en $(0,0)$

c) Usamos coordenadas polares.

$$* \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta)}{r^2+r^4\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta}{1+r^2\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

$$* \left|g(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0\right| = r\left|\frac{\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta}{1+r^2\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta}\right| =$$

$$= r\,\frac{|\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta|}{|1+r^2\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta|} \leq r\,\frac{|\cos^3\theta|+|\operatorname{sen}^3\theta|}{1} \leq 2r = F(r)$$

$$\lim_{r\to 0} F(r) = 0$$

Luego $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$

8.17

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

* Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ entonces la función es continua en dicho punto porque viene definida como el producto, suma, cociente y composición de funciones continuas

* Ahora estudiamos la continuidad de f en $(0,0)$ verificando que

$$0 = f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Usamos coordenadas polares:

- $\displaystyle\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \lim_{r\to 0} r^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

- $\left| f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) - 0 \right| = r^2 \left|\text{sen}\,\frac{1}{r}\right| \leq r^2 = F(r)$

$$F(r) \to 0$$

luego $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ y por lo tanto f es también continua en $(0,0)$.

8.19 a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Fuera de $(0,0)$ la continuidad está clara. Veamos lo que pasa en $(0,0)$ usando la definición de función continua.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y debemos encontrar $\delta > 0$ para el que se verifique que si $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces

$$\left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Estudiamos el valor de este último valor absoluto:

$$\left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} =$$

$= \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, por lo que basta con elegir $\delta = \varepsilon$.

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \Bigg(\overbrace{\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}^{f_1(x,y)}, \overbrace{\operatorname{sen}(xy)}^{f_2(x,y)}\Bigg) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f_2(x,y)$ es claramente continua por ser la composición de una función continua (sen) con el producto de dos funciones continuas (x e y)

$f_1(x,y)$ es continua para todo $(x,y) \neq (0,0)$ por ser suma producto y cociente de funciones continuas sin que se anule el denominador.

Veamos ahora que además $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = f_1(0,0) = 0$, lo que significa que f_1 es continua en todos los puntos y por lo tanto también f.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|(x,y)-(0,0)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces

$$\left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2\,|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\,|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{(x^2+y^2)}} =$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2 < \delta.$$

Así que basta con tomar $\delta = \varepsilon$.

Luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y f es continua.

8.19 c) Este ejercicio está resuelto en los apuntes (se usa la definición de continuidad)

8.19.d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ y & \text{si } x=0 \end{cases}$

(*) Si $x\neq 0$ entonces $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$ es continua por ser cociente de funciones continuas en el que no se anula el denominador.

(*) En los puntos $(0,k)$ tendremos que ver si se verifica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,k)}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x}=k=f(0,k)$. En caso afirmativo la función será continua.

Traslademos el problema al origen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,k)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x(y+k))}{x}$$

Usamos coordenadas polares:

L'Hôpital

(*) $$\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{sen}(r\cos\theta(r\operatorname{sen}\theta+k))}{r\cos\theta}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\cos(r\cos\theta(r\operatorname{sen}\theta+k))\cdot[\cos\theta(r\operatorname{sen}\theta+k)+r\cos\theta\operatorname{sen}\theta]}{\cos\theta}$$

$=k$

(**) La acotación es difícil de conseguir, así que recurriremos a la definición

(*) Comprobaremos que $\lim_{(x,y)\to(0,k)} f(x,y) = k$ usando la definición de límite. Para ello fijamos $\varepsilon>0$ y debemos encontrar $\delta>0$ tal que si $\|(x,y)-(0,k)\|_1<\delta$ entonces $|f(x,y)-f(0,k)|<\varepsilon$

$$|f(x,y)-f(0,k)| = |f(x,y)-k| \leq \left|\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}-k\right| + |y-k| =$$

$$= \left|\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(xk)}{x} + \frac{\operatorname{sen}(xk)}{x} - k\right| + |y-k| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\operatorname{sen}(xy)-\operatorname{sen}(xk)}{x}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}(xk)}{x}-k\right| + |y-k| = G$$

Ahora vamos a acotar cada uno de los anteriores sumandos por $\varepsilon/3$:

PRIMERA OBSERVACIÓN

Usando el teorema de valor medio de Lagrange se tiene que:

$$|\operatorname{sen}(xy)-\operatorname{sen}(xk)| = |\cos(\xi)|\cdot|xy-xk| \quad \text{para}$$

un cierto ξ comprendido entre xy y xk. Luego

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(xy)-\operatorname{sen}(xk)}{x}\right| = |\cos(\xi)|\,\frac{|xy-xk|}{|x|} \leq$$

$$\frac{|xy-xk|}{|x|} = |y-k| < \delta$$

Así que propondremos $\underline{\underline{\delta < \varepsilon/3}}$

SEGUNDA OBSERVACIÓN

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(xk)}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{k\cos(xk)}{1} = k$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(xk)}{x} - k = 0$ y entonces fijado $\frac{\varepsilon}{3}$ existe un cierto δ_1 tal que si $|x-0|<\delta_1$ entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(xk)}{x} - k\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Propondremos también $\delta < \delta_1$

TERCERA OBSERVACIÓN

$|y-k| < \delta$

Propondremos $\delta < \varepsilon/3$

CONCLUSIÓN Tomando $\delta = \min\{\varepsilon/3, \delta_1\}$ tenemos que si $\|(x,y)-(0,k)\|_1 = |x| + |y-k| < \delta$ entonces

$$q < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Así que la función $f(x,y)$ también es continua en los punto de la forma $(0,k)$.

8.20

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Observemos que $f(x,y)$ es continua en todos los puntos $(x,y)\neq(0,0)$ por ser el cociente de funciones continuas, no anulándose el denominador.

Además en $(0,0)$ vamos a demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$, luego si $k=0$ la función f será continua en $(0,0)$.

Pasamos a coordenadas polares:

$$\circledast \quad \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \; r\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = 0$$

$$* \quad |r\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta| \leq r = F(r) \quad \text{y} \quad F(r)\xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

8.21

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

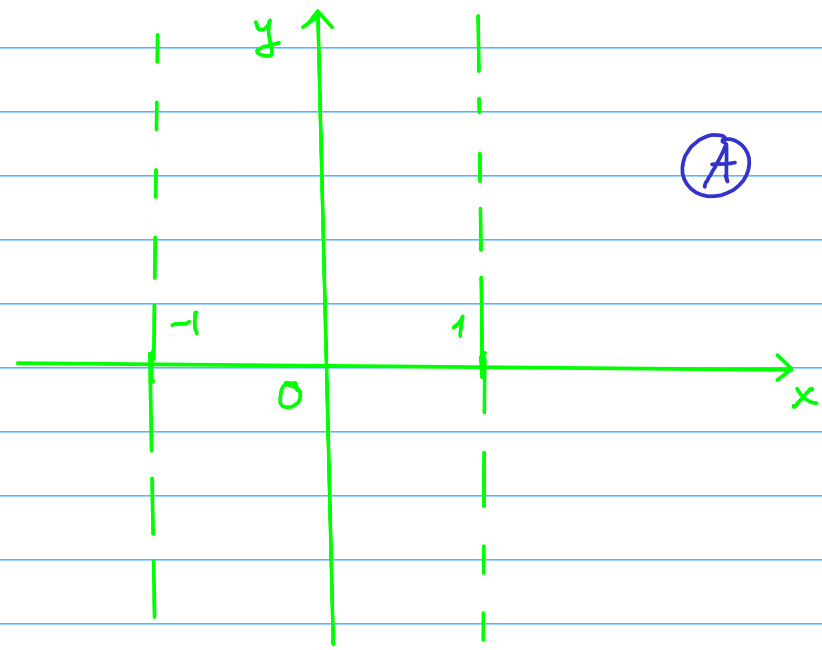
Esta función no puede ser continua en $(0,0)$ porque el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ no existe. Para verlo usamos límites direccionales por la dirección $y=kx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k^2}{1+k^2} \quad \text{(¡Depende de } k\text{!)}$$

Luego no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

8.32

A) $A = \{ (x,y) \text{ tq } x^2 > 1 \} = \{ (x,y) \text{ tq } x > 1 \text{ ó } x < -1 \}$



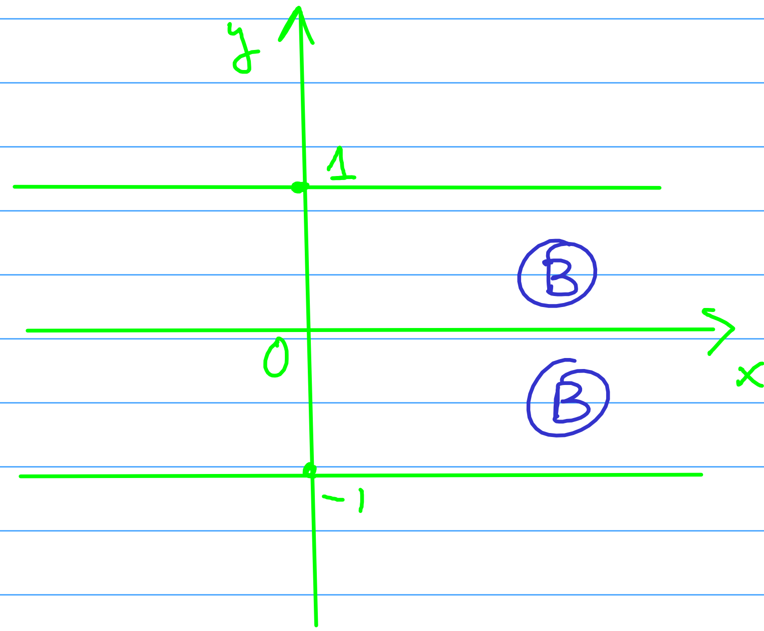
$\text{Int } A = A$

$Cl(A) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 \geq 1 \}$

$Fr(A) = \{ (x,y) \text{ tq } x = 1 \text{ ó } x = -1 \}$

A es abierto, no es cerrado, no es acotado y no es por lo tanto compacto

(B) $B = \{ (x,y) \text{ tq } y^2 \leq 1 \}$



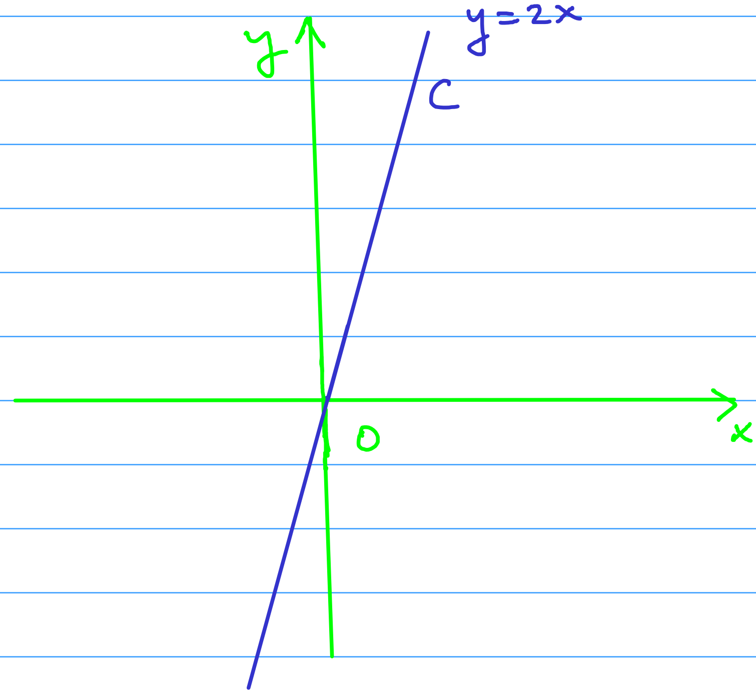
$\text{Cl } B = B$

$\text{Int } B = \{ (x,y) \text{ tq } y^2 < 1 \}$

$\text{Fr } B = \{ (x,y) \text{ tq } y=1 \text{ ó } y=-1 \}$

B es cerrado, no es abierto, no es acotado y no es compacto.

(c) $C = \{ (x, 2x),\ x \in \mathbb{R} \}$



$cl\, C = C$

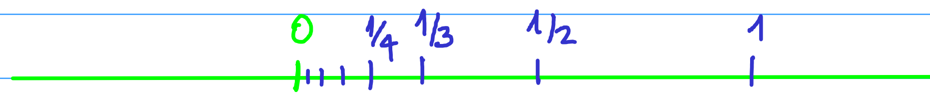
$Fr\, C = C$

$Int\, C = \phi$

C es cerrado, no es abierto, no es acotado y no es compacto.

D

$D = \{ (\frac{1}{n}, 0) , n \in \mathbb{N} \}$



$Cl\, D = D \cup \{0\}$

$Int\, D = \emptyset$

$Fr\, D = D \cup \{0\}$

D no es abierto, ni cerrado, ni compacto, aunque sí es acotado

E) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 > 1\}$ → ptos que hay fuera de la circunferencia de radio 1

$Cl\ E = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2 \geq 1\}$

$Int\ E = E$

$Fr\ E = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2 = 1\}$

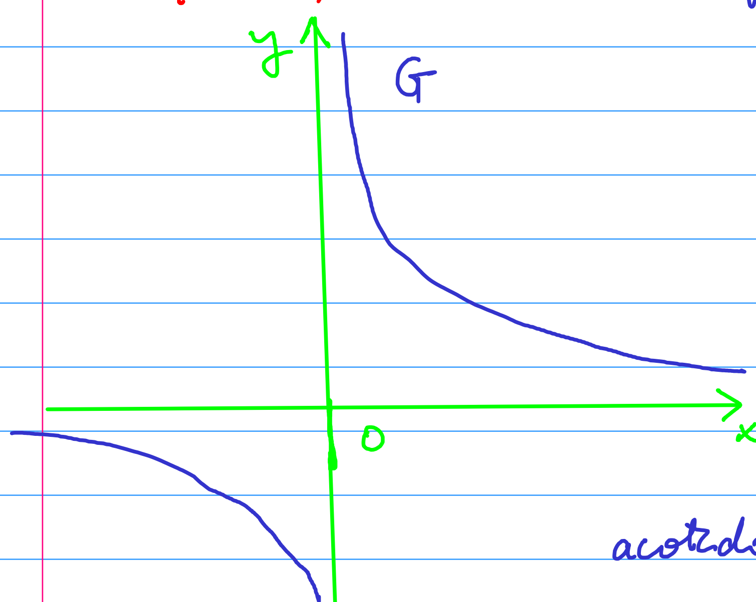
E es abierto, no cerrado, no acotado y no compacto.

F) $F = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2 \leq 1\}$ (puntos que están en la circunferencia de radio 1 o en su interior)

$Cl\ F = F$
$Int\ F = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2 < 1\}$
$Fr\ F = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2 = 1\}$

F es cerrado, acotado, no abierto y sí compacto.

G) $G = \{(x, \frac{2}{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ → gráfica de la función $f(x) = 2/x$



$Cl\ G = G$

$Int\ G = \emptyset$

$Fr\ G = G$

G es cerrado, no abierto, no acotado y no compacto.

(H) $H = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$Cl\, H = H \qquad Int\, H = \phi \qquad Fr\, H = H$

H es cerrado, acotado, no abierto y compacto

b) $Int(A \cup B \cup C) = Int\, A \cup Int\, B \cup Int\, C =$

$A \cup \{(x,y) \text{ tq } x^2 < 1\}$

$Cl(A \cup B \cup C) = Cl\, A \cup Cl\, B \cup Cl\, C =$
$= \{(x,y) \text{ tq } x^2 \geq 1\} \cup B \cup C$

c) Puntos aislados de $D = D$

$D' = \{0\}$
↳ puntos de acumulación de D