Ejercicios de matrices

2.4 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\quad A^2 = A$, $B = 2A - I$

$$B^2 = B \cdot B = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I =$$

$$= 4A^2 - 4A + I = 4A - 4A + I = I$$

■

2.5 ¿$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$?

Respuesta: No, lo podemos poner de manifiesto con el siguiente ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$\neq$

<u>OBSERVACIÓN</u>: sí es cierto, en cambio, que

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$ porque:

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ (se usa la propiedad distributiva para el producto)

2.6 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

$B = AA^t$ es simétrica

en efecto, basta con observar que

$$B^t = (AA^t)^t = (A^t)^t A^t = A \cdot A^t = B$$

$C = A^t A$ es simétrica porque:

$$C^t = (A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A = C.$$

2.7 $A^2 - A - I_n = 0$ $\quad A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$\Updownarrow$

$$A^2 - A = I_n \Rightarrow \begin{cases} A(A-I_n) = I_n \\ (A-I_n)A = I \end{cases}$$

Así que $\boxed{A^{-1} = A - I_n}$

Buscamos alguna matriz que verifique la ecuación $A^2 - A - I_n = 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Para $n=1$ $\quad A = (a)$

$$A^2 - A - I_1 = (a^2 - a - 1) = 0 = (0) \Longrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Es decir, en matrices 1×1 sólo existen dos de ellas satisfaciendo la ecuación.

Para $n=2$ La ecuación la podemos reescribir como $A(A-I_2) = I_2$, luego si buscamos A de la forma $A = \begin{pmatrix} m & l \\ l & m \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} m & l \\ l & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-1 & l \\ l & m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(m-1)+l^2 & ml+l(m-1) \\ l(m-1)+ml & l^2+m(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$l(m-1)+lm=0 \Rightarrow lm = m(m-1) \overset{\text{si } l\neq 0}{\Rightarrow} \underline{l=m-1}$$

$$l^2+m(m-1)=1 \Rightarrow l^2+(l+1)l=1 \Rightarrow$$

$$2l^2+l-1=0 \Rightarrow l=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}= \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

Así que las matrices encontradas satisfaciendo la ecuación son:

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Puedes encontrar más matrices de tamaño 2x2?

¿Es un número finito o infinito las que satisfacen esta ecuación?

2.8

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \qquad a^2+b^2+c^2=1$$

Demostrar que $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Haremos la demostración por inducción en n.
Sea $S = \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } A^n = A \}$, veamos que $S = \mathbb{N}$.

Es obvio que $1 \in S$

• Además si suponemos que $n \in S$ tenemos que $A^n = A$ y:

$$A^{n+1} = A^n A = A\,A = A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 & a^3b + ab^3 + abc^2 & a^3c + ab^2c + ac^3 \\ a^3b + ab^3 + ac^2b & a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 & a^2bc + b^3c + bc^3 \\ a^3c + ab^2c + ac^3 & a^2bc + b^3c + bc^3 & a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2(a^2+b^2+c^2) & ab(a^2+b^2+c^2) & ac(a^2+b^2+c^2) \\ ab(a^2+b^2+c^2) & b^2(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) \\ ac(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) & c^2(a^2+b^2+c^2) \end{pmatrix}$$

$$= A$$

2.9

- $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 - 5F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 + 24F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{2,3}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_1 = 2$$

- $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_2 - F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_2 = 2$$

- $$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix} \underset{\substack{20F_2 \\ 6F_3}}{\overset{30F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 60 & 60 & 90 \\ 60 & 0 & 20 \\ 60 & 24 & 48 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_1}{\overset{F_2 - F_1}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 60 & 60 & 90 \\ 0 & -60 & -70 \\ 0 & 24 & 28 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{4}F_3}{\overset{\frac{1}{10}F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 60 & 60 & 90 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{F_3 + F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 60 & 60 & 90 \\ 0 & -6 & -7 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rg} A_3 = 2$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2}}{\overset{F_2 - 2F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{C_{4,2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_4 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \overset{F_4 + \frac{4}{3} F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A_4 = 4$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_1 - 3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_{2,1}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_5 = 2$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - 5F_4 \\ F_3 - 8F_4}}{\overset{F_1 - 2F_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & -24 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{4}F_2}{\overset{F_{14}}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -24 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 + 7F_2}{\overset{F_4 + F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_6 = 3$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_2 - 3F_3}{\overset{F_1 - 6F_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_{23}}{\overset{F_{13}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{rg} A_7 = 3}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1-\pi & e \\ \pi & 1-e \end{pmatrix} \overset{F_2 + F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \\ \pi & 1-e \end{pmatrix} \underset{F_3 - \pi F_2}{\overset{F_1 - 5F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1-e-\pi \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F_3 - (1-e-\pi)F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{2,1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_8 = 2$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{F_2-2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\operatorname{rg} A_9 = 2}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3-3F_2}{\overset{F_1-2F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_{12}}{\overset{F_{13}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A_{10} = 2$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3-3F_1}{\overset{F_2-4F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_{32}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A_{11} = 3$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 43 & 76 \end{pmatrix} \overset{F_2-43F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -96 \end{pmatrix}$$

---

4 7 9 11 12

2.10 Son invertibles las matrices A_4, A_7, A_9, A_{11} y A_{12}. Calculamos sus inversas.

* $A_7 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$|A_7| = 80$ porque en el ejercicio anterior hemos hecho transformaciones elementales y la matriz final tenía el mismo determinante que la de partida.

$$\operatorname{Adj} A_7 = \begin{pmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 25 & 8 \\ -10 & -15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} 20 & -10 & -10 \\ -10 & 25 & -15 \\ 0 & 8 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 5/16 & -3/16 \\ 0 & 1/10 & 3/10 \end{pmatrix}$$

2.11

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

suponemos que son números reales

Calculamos el determinante de la matriz:

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^4 - b^4$$

Distinguimos 2 casos:

1) $a^4 - b^4 = 0 \Rightarrow a^4 = b^4 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$

1.1 Si $a = \pm b \neq 0$ el menor

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \pm a & a & 0 \\ 0 & \pm a & a \end{pmatrix}$$ tiene determinante distinto de 0 y $rg\, A = 3$

1.2 Si $a = -b = 0$ entonces $rg\, A = 0$

2) Si $a \neq \pm b$ entonces $rg\, A = 4$

Observación Si la matriz la consideramos en $M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$ se hacen los mismos razonamientos, pero para distinguir los casos hay que resolver $a^4 = b^4$ en $\mathbb{Z}_5$.

Resolvamos $a^4 = b^4$ en $\mathbb{Z}_5$

Rellenamos la tabla de $\mathbb{Z}_5$:

x	x^4
0	0
1	1
2	1
3	1
4	1

A la vista de la tabla las soluciones de $a^4 = b^4$ serán

C1 $a = 0$; $b = 0$

C2 $a = 1$; $b = 1, 2, 3, 4$

C3 $a = 2$; $b = 1, 2, 3, 4$

C4 $a = 3$; $b = 1, 2, 3, 4$

C5 $a = 4$; $b = 1, 2, 3, 4$

Entonces según el razonamiento para el cálculo del rango anterior tendremos:

1) En el caso C1 $rg\, A = 0$

2) En los casos C2, C3, C4, C5 y C6 $rg\, A = 3$

3) En los demás posibles casos, $rg\, A = 4$

d1 $a = 0$, $b = 1, 2, 3, 4$

d2 $b = 0$, $a = 1, 2, 3, 4$

2.12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $B = (I_4 + A)$ Como $A I_4 = I_4 A = A$ usamos la fórmula del binomio

$$B^n = (I_4 + A)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j I_4^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j$$

Ahora distinguimos tres casos:

$n \geq 3$

$$B^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j = \sum_{j=0}^{3} \binom{n}{j} A^j = I_4 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} A^3$$

$n = 2$

$$B^2 = I_4 + 2A + A^2$$

$n = 1$ $\quad B^1 = I_4 + A$

c)

$$(I_4 + A)(I_4 - A + A^2 - A^3) = I_4 \cancel{-A} \cancel{+A^2} \cancel{-A^3} \cancel{+A} \cancel{-A^2} \cancel{+A^3} - A^4$$

$$= I_4 - A^4 = I_4$$

$$(I_4 - A + A^2 - A^3)(I_4 + A) = I_4 - A + A^2 - A^3 + A - A^2 + A^3 - A^4$$
$$= I_4 - A^4 = I_4$$

luego $(A + I_4)^{-1} = I_4 - A + A^2 - A^3$

d) $B^{-3} = (B^{-1})^3 = (I_4 - A + A^2 - A^3)^3$

$(B^{-1})^2 = (I_4 - A + A^2 - A^3)^2$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & I_4 & -A & +A^2 & -A^3 & & & \\
\times & I_4 & -A & +A^2 & -A^3 & & & \\
\hline
 & I_4 & -A & +A^2 & -A^3 & & & \\
 & & -A & +A^2 & -A^3 & +\cancel{A^4} & & \\
 & & & A^2 & -A^3 & +\cancel{A^4} & -\cancel{A^5} & \\
+ & & & & -A^3 & +\cancel{A^4} & -\cancel{A^5} & +\cancel{A^6} \\
\hline
 & I_4 & -2A & +3A^2 & -4A^3 & & &
\end{array}$$

$\to$ son la matriz 0 los tachados

$B^{-3} = (B^{-1})^2 \cdot B^{-1}$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & I_4 & -2A & +3A^2 & -4A^3 & & & \\
\times & I_4 & -A & +A^2 & -A^3 & & & \\
\hline
 & I_4 & -2A & +3A^2 & -4A^3 & & & \\
 & & -A & +2A^2 & -3A^3 & +\cancel{4A^4} & & \\
 & & & A^2 & -2A^3 & +\cancel{3A^4} & -\cancel{4A^5} & \\
 & & & & -A^3 & +\cancel{2A^4} & -\cancel{3A^5} & +\cancel{4A^6} \\
\hline
\end{array}$$

$$\boxed{B^{-3} = I_4 - 3A + 6A^2 - 10A^3}$$

2.14

$$A=\begin{pmatrix} 1 & d & a & b \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 + B \text{ donde}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & d & a & b \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & db+a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & da^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el binomio de Newton porque $IB=BI$.

$$A^n=(I+B)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B^j I^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B^j.$$

Suponemos ahora $n\geq 3$, entonces:

$$A^n=\sum_{j=0}^{3}\binom{n}{j}B^j=\binom{n}{0}B^0+\binom{n}{1}B^1+\binom{n}{2}B^2+\binom{n}{3}B^3$$

$$=I_4+nB+\frac{n(n-1)}{2}B+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}B^3$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & nd & na+\frac{n(n-1)}{2}ad & nb+\frac{n(n-1)}{2}(db+a^2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}da^2 \\ 0 & 1 & na & nb+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y los casos concretos $n = 1$ y 2 dan:

* $A^1 = A$
* $A^2 = (I+B)^2 = I + 2B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2d & 2a+ad & 2b+db+a^2 \\ 0 & 1 & 2a & 2b+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Extra Calcula la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

usando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1}}{\overset{F_2 - 2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_2 - 2F_4 \\ F_1 - 6F_4}}{\overset{F_3 - F_4}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 - 2F_3}{\overset{F_1 - 2F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 - F_2 \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2.16 a) $A \in M_{n \times n}$

$A^2 = A$

Como $A^2 = A$ tenemos $|A^2| = |A \cdot A| = |A||A| = |A|^2$

$$\underset{|A|}{\overset{\parallel}{|A^2|}}$$

Entonces $|A|^2 - |A| = 0$ y $|A|(|A|-1) = 0$ $\Rightarrow$ $|A| = 0$ ó $|A| = 1$

b) $A = A^{-1}$

Como $A A^{-1} = I_n \Rightarrow |A A^{-1}| = |I_n| = 1$

$$|A A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$$

$\Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Puesto que $|A| = |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| = -1$ ó $|A| = 1$

2.18

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xlongequal{F_1+F_2+F_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2-C_1 \\ \\ C_3-C_1 \end{matrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3$$

2.19

a) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & b & c \\ b & x & 0 \\ c & 0 & x \end{vmatrix} =$

$-a^2x^2 + x(x^3 - c^2x - b^2x) = x^4 - x^2(a^2+b^2+c^2) =$

$= x^2(x^2-a^2-b^2-c^2)$

b) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=\!=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix}$

$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \cdot$

$\cdot (x+a+b+c) = (x+a+b+c)x^2$

c) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{F_1 - aF_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 3-2a & -ca & 5-3a \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3-2a & -ca & 5-3a \\ b & 0 & 2 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$

2.19

d) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1+C_2+C_3+C_4}$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2 & a^2 & b^2 & ab \\ (a+b)^2 & b^2 & a^2 & ab \\ (a+b)^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}}{\overset{F_2-F_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a(a-b) & b(b-a) & b(a-b) \\ 0 & b(b-a) & a(a-b) & b(a-b) \\ 0 & 0 & 0 & (a+b)(a-b) \end{vmatrix} \cdot (a+b)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a & -b & b \\ -b & a & b \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} (a+b)^2(a-b)^3 =$$

$$= (a+b)^3(a-b)^3 \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} = (a+b)^3(a-b)^3 \cdot (a^2-b^2)$$

$$= (a+b)^4(a-b)^4$$

2.19 e)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - b^2 \begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= a^4 - b^4$$

f)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{F_2-F_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3-C_1]{C_2-C_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -10 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

2.20 a)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & a+c \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & a+c \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{=\!=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & b+c \\ 1 & 0 & a+c \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix} = 0$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1/b & b & b^2 \\ 1/c & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

2.21 El cálculo de V_2, V_3 y V_4 lo tenéis resuelto a ordenador en el fichero de los enunciados. Vayamos a por el cálculo de V_n:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$F_n - a_1 F_{n-1}$

$F_{n-1} - a_1 F_{n-2}$

$F_{n-2} - a_1 F_{n-3}$

$\vdots$

$F_3 - a_1 F_2$

$F_2 - a_1 F_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_4^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \cdot V_{n-1}$$

Así que esto nos lleva a

$$\boxed{V_n = \prod_{j>i} (a_j - a_i)}$$

2.23 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$A\cdot B = I_n \implies BA = I_n$$

Puesto que $AB = I_n$ entonces $|A| \neq 0$ porque $|A||B| = 1$. Así que A es invertible y denotaremos por C a su inversa, luego:

$$\underbrace{AC = CA = I_n}_{(\mathcal{E})} = A\cdot B$$

Como $AC = AB$ entonces $AC - AB = 0 \implies$

$A(C-B) = 0$ y ahora multiplicamos la última igualdad por C:

$$\begin{aligned} CA(C-B) &= C\cdot 0 = 0 \\ \| \quad & \\ I_n(C-B) &= C-B \end{aligned}$$

$\implies C - B = 0 \implies C = B$. Así que $(\mathcal{E})$ implica:

$$AB = BA = I_n.$$