**1.6. a** $\quad 1+3+5+ \dots +(2n-1) = n^2 \qquad P(n)$

Sea $S = \{ n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ es cierta $\}$

Usaremos el principio de inducción para demostrar que $S = \mathbb{N}$.

* $1 \in S$ porque $1 = 1^2$

* Suponemos ahora que $n \in S$, luego $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

Veamos que $n+1 \in S$, es decir $1+3+5+\dots+(2n-1)+[2(n+1)-1] = (n+1)^2$

$1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$, luego $n+1 \in S$

Aplicando el principio de inducción $S = \mathbb{N}$.

**1.6.b** $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $\mathcal{P}(n)$

$S=\{n\in\mathbb{N}:\ \mathcal{P}(n) \text{ es cierta}\}$

Usamos el principio de inducción:

* $1\in S$ ya que $1^3=\left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2$

* Suponemos que $n\in S$, es decir que $1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 \underset{\substack{\downarrow\\ \text{por hipótesis de inducción}}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^3\cdot 4}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Luego $n+1\in S$.

Aplicamos ahora el P.I. y tenemos que $S=\mathbb{N}$.

**1.6. c** $r \neq 1$

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad P(n)$$

Sea $S = \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } P(n) \text{ es cierta} \}$

(*) $1 \in S$ ya que $1+r = \frac{\cancel{(1-r)}(1+r)}{\cancel{1-r}} = \frac{1-r^2}{1-r}$

(**) Si $n \in S \overset{?}{\Rightarrow} n+1 \in S$

Si $n \in S$ entonces $1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ y

$$1+r+r^2+r^n+r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} =$$

$$= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$$ y por lo tanto $n+1 \in S$, luego

$n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

Ahora aplicamos el principio de inducción y obtenemos

$S = \mathbb{N}$.

## 1.6.d $n(n^2+5)$ es divisible por 6 $\quad P(n)$

Sea $S = \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } P(n) \text{ es cierta} \}$

(*) $1 \in S$ ya que $1 \cdot (1^2+5) = 6$ es divisible por 6

(**) Si $n \in S$ entonces $n(n^2+5)$ es divisible por 6, es decir, $n(n^2+5)$ es un múltiplo de 6 (hipótesis de inducción).

Veamos si $n+1 \in S$, lo que es equivalente a ver si si $(n+1)[(n+1)^2+5]$ es múltiplo de 6.

$$(n+1)\left[(n+1)^2+5\right] = (n+1)\left[n^2+2n+5+1\right] =$$

$$= n(n^2+5) + (n^2+5) + (n+1)(2n+1) = \underbrace{n(n^2+5)}_{T} + \underbrace{3n^2+3n}_{U} + \underbrace{6}_{R}$$

Como T es múltiplo de 6 por la hipótesis de inducción y R también lo es, basta con probar que $3n^2+3n = 3n(1+n)$ es un múltiplo de 6, o lo que es equivalente: probar que $n(n+1)$ es múltiplo de 2.

Ahora bien, $n(n+1)$ siempre es par porque o bien lo es $n$ o $n+1$.

Por lo tanto $n+1 \in S$ y por el principio de inducción $S = \mathbb{N}$, es decir $n(n^2+5)$ es siempre divisible por 6.

**1.6.e)** Entre los números $2n+1, 2n+3, 2n+5$ siempre hay un múltiplo de 3 $\qquad P(n)$

Sea $S=\{n\in\mathbb{N}$ tq $P(n)$ es cierta$\}$, veamos que $S=\mathbb{N}$.

(*) $1\in S$ ya que entre $3,5,7$ hay un múltiplo de 3, en concreto el 3.

(**) Si $n\in S$ entonces entre los números $2n+1, 2n+3, 2n+5$ hay un múltiplo de 3. Estudiemos si $n+1\in S$ admitiendo que $n\in S$, consideramos los números

$$2(n+1)+1=2n+3,\quad 2(n+1)+3=2n+5,\quad 2(n+1)+5=2n+7$$

y tenemos que deducir que alguno es un múltiplo de 3.

De la hipótesis de inducción puede ocurrir:

- $2n+1$ es un múltiplo de 3, luego $2n+1+6$ también lo es, es decir $2n+7$ es un múltiplo de 3 y $n+1\in S$.
- $2n+3$ es un múltiplo de 3, luego $n+1\in S$

• $2n+5$ es un múltiplo de 3, luego $n+1 \in S$.

En cualquiera de los tres casos hemos sido capaces de demostrar que $n+1 \in S$, así que $S = \mathbb{N}$ usando el principio de inducción.

1.6. g) Demostrar

$$\mathcal{P}(n) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p!} \frac{n!}{(n+p)!}$$

p es un nº natural fijo.

Usaremos el principio de inducción en n. Sea

$$S = \{ n \in \mathbb{N} \text{ tq } \mathcal{P}(n) \text{ es cierta} \}$$

* $1 \notin S$ ya que

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{p}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{p}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (1+p)} = \frac{p}{(1+p)!}$$

$$\frac{1}{p!} \frac{1!}{(1+p)!} \neq$$

1.6. i) $p \in \mathbb{R}$ $\quad p > 0$ $\quad n > 1$

$$(1+p)^n > 1+pn \qquad \mathcal{P}(n)$$

Sea $S = \{ n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ es cierta $\}$

(*) $2 \in S$ ya que $(1+p)^2 = 1+2p+p^2 > 1+2p$

(**) Si $n \in S$ entonces $(1+p)^n > 1+pn$. Veamos que $n+1 \in S$

$$(1+p)^{n+1} = (1+p)^n \cdot (1+p) > (1+pn)(1+p) = 1+pn+p+p^2 n$$

$$= 1+p(n+1)+p^2 n > 1+p(n+1), \text{ luego } n+1 \in S$$

Aplicando el P. I. $S = \mathbb{N}$.

1.6. K) Sea n un número tal que $n+\frac{1}{n}\in\mathbb{Z}$ (en principio n puede ser un real o complejo)

Se trata de demostrar por inducción la propiedad

$$P(a) \quad n^a+\frac{1}{n^a}\in\mathbb{Z} \quad \text{para todo } a\in\mathbb{N}.$$

Lo haremos usando inducción generalizada en a. Para ello introducimos el principio de inducción generalizado.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN GENERALIZADO

Sea $S\subseteq\mathbb{N}$ tal que:

1) $1\in S$

2) Si $\underbrace{\{1,2,3,\dots\dots n\}\subseteq S}_{\text{hipótesis de inducción generalizada}}$ entonces $n+1\in S$

Entonces $S=\mathbb{N}$.

Demostremos ya la propiedad. Sea $S$ el conjunto

$$S = \{ a \in \mathbb{N} \text{ tq } \mathcal{P}(a) \text{ es cierta} \}$$

- Está claro que $1 \in S$ porque por el enunciado

$$n^1 + \frac{1}{n^1} \in \mathbb{Z}$$

- Suponemos ahora que $\underbrace{\{1, 2, \ldots, a\} \subseteq S}_{H.I}$, y deducimos que $a+1 \in S$.

Como $n + \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$, $L = \left(n + \frac{1}{n}\right)^{a+1} \in \mathbb{Z}$. Desarrollemos esta potencia usando el binomio de Newton:

$$L = \left(n + \frac{1}{n}\right)^{a+1} = \sum_{j=0}^{a+1} \binom{a+1}{j} n^j \frac{1}{n^{a+1-j}}.$$ Desarrollemos este binomio en dos líneas, suponemos $a+1$ un nº par:

$$L = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\binom{a+1}{0}} \frac{1}{n^{a+1}} + \binom{a+1}{1} \frac{1}{n^{a-1}} + \cdots\cdots + \binom{a+1}{\frac{a+1}{2}-1} \frac{1}{n^2} + \binom{a+1}{\frac{a+1}{2}} n^0$$

$$\overset{\underset{\shortparallel}{1}}{\binom{a+1}{a+1}} n^{a+1} + \binom{a+1}{a} n^{a-1} + \cdots\cdots + \binom{a+1}{\frac{a+1}{2}+1} n^2$$

Los pares agrupados en verde suman un nº entero por la hipótesis de inducción y el sumando rojo es un número natural, luego podemos despejar

$Q = n^{a+1} + \frac{1}{n^{a+1}}$ como una suma de número enteros,

así que $Q$ es un número entero y $a+1 \in S'$.

Hacemos ahora el razonamiento si $a+1$ es un número impar. En este caso:

$$L = \underbrace{\binom{a+1}{0}}_{1}\frac{1}{n^{a+1}} + \binom{a+1}{1}\frac{1}{n^{a-1}} + \dots + \binom{a+1}{\frac{a}{2}}\frac{1}{n}$$

$$\underbrace{\binom{a+1}{a+1}}_{1} n^{a+1} + \binom{a+1}{a} n^{a-1} + \dots + \binom{a+1}{\frac{a}{2}+1} n$$

$$\binom{a+1}{\frac{a}{2}+1} = \binom{a+1}{a+1-\frac{a}{2}-1} = \binom{a+1}{\frac{a}{2}}$$

Así que podemos despejar de nuevo $Q = n^{a+1} + \frac{1}{n^{a+1}}$ como suma de enteros y deducir, por tanto, que $Q \in \mathbb{Z}$.

Aplicamos finalmente el P. I. Generalizado y obtenemos que $S = \mathbb{N}$ y $P(a)$ es cierta para todo $a \in \mathbb{N}$.

**1.6.1** El número de subconjuntos que tiene un conjunto de $n$ elementos $T$ es $2^n$.

Existe una biyección entre $\{0,1\}^n$ y $\mathcal{P}(T)$. Denotemos por $t_i$ a los elementos de $T$:

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}.$$

La biyección es la siguiente:

$$\begin{aligned} f : \{0,1\}^n &\longrightarrow \mathcal{P}(T) \\ (u_1, u_2, \dots, u_n) &\longrightarrow \{t_i \in T : u_i = 1\} \end{aligned}$$

Así que $\operatorname{Card} \mathcal{P}(T) = \operatorname{Card}\left(\{0,1\}^n\right) = 2^n$.

**1.6.m** El número de subconjuntos de $j$ elementos que tiene un conjunto de $n$ elementos es $\binom{n}{j}$ $\quad P(j)$

Este ejercicio no es un típico ejercicio de inducción porque no buscaremos demostrar que el subconjunto $S$ son todos los números naturales.

$$S = \{ j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n \text{ y } P(j) \text{ es cierta} \}$$

Buscamos demostrar que $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Usaremos el principio de inducción (modificado):

* $\boxed{0 \in S:}$ esto es obvio porque subconjuntos de 0 elementos sólo existe 1 (el conjunto vacío) y $1 = \binom{n}{0}$

* $\boxed{\text{si } j \in S \text{ entonces } j+1 \in S}$ (en el caso de que $j+1 \leq n$!

Si $j \in S$ entonces el número de subconjuntos de $j$ elementos es $\binom{n}{j}$ y podremos formar los subconjuntos de $j+1$ añadiendo a los subconjuntos de $j$ elementos los $n-j$ elementos que están fuera.

Así que los subconjuntos de $j+1$ elementos deberían ser

$$\binom{n}{j}(n-j),$$

pero hay que llevar cuidado porque de esta forma estamos contando los subconjuntos de $j+1$ elementos más de una vez. En efecto, hemos seguido el siguiente esquema:

$$\{a_1, a_2, a_3 \dots, a_j\} \longrightarrow \{a_1, a_2, a_3, \dots a_j, a_{j+1}\}$$

Pero este subconjunto también lo habremos contado añadiendo como último elemento a $a_1, a_2, a_3 \dots$ ó $a_j$.

Es decir hemos contado cada uno de los subconjuntos $j+1$ veces, así que el número de subconjuntos de $j+1$ elementos será

$$\binom{n}{j}\frac{n-j}{j+1} = \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,\frac{n-j}{j+1} = \binom{n}{j+1}$$

y por lo tanto $j+1 \in S$. Luego $P(j)$ es cierto para todo $0 \leq j \leq n$.

1.6.n El número de diagonales de un polígono de $n$ vértices es $\frac{n(n-3)}{2}$.

En este problema no es necesario usar el P.I.

El número de diagonales que podemos trazar desde cada vértice es $n-3$ (no podemos trazar diagonales ni al propio vértice ni a los contiguos).

Así que el número total de diagonales es:

número de vértices

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

→ número de diagonales trazadas desde cada vértice

→ cada diagonal está contada desde 2 vértices.

# PRIMITIVAS

## 1.12

a) $\int \frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}\,dx = I$

$$\frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + C(x+1)^2 + Dx^3(x+1) + Ex^3}{(x+1)^2\, x^3}$$

De donde:

$(\mathcal{E})$ $\quad x^2+1 = Ax^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + C(x+1)^2 + Dx^3(x+1) + Ex^3$

Para $x=0$ tenemos:

$$1 = C$$

y para $x=-1$:

$$2 = -E \Rightarrow E = -2$$

Derivando la expresión $(\mathcal{E})$ obtenemos:

$(\mathcal{E}')$ $\quad 2x = 2xA(x+1)^2 + Ax^2\,2(x+1) + B(x+1)^2 + 2Bx(x+1) + 2C(x+1) + 3Dx^2(x+1) + Dx^3 + 3Ex^2$

Y ahora imponiendo $x=0$ en $(\mathcal{E}')$:

$$0 = B + 2C \Rightarrow B = -2C = -2 = B$$

Hacemos $x=1$ en $(\mathcal{E}')$:

$$-2 = -D + 3E \Rightarrow D = -4$$

Observa que en la expresión $(\mathcal{E})$ el término $x^4$ no aparece a la izquierda y en la derecha es:

$$(A+D)\,x^4,$$

luego $A+D=0 \Rightarrow A = -D = 4 = A$

Tampoco aparece el término $x^3$ en $(\mathcal{E})$ a la izquierda y en la derecha es:

$$(2A+B+D+E)\,x^3,$$

por lo tanto $8-2-4+E=0 \Rightarrow E=-2$

Ya podemos terminar la primitiva:

$$I = \int \left( \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= 4\log|x| + 2\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 4\log|x+1| + \frac{2}{(x+1)} + K$$

$$= 4\log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x+1} + K$$

# 1.12 b

$$I = \int \frac{x^7 + x^3}{x^4 - 1}\, dx$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador hacemos la división euclídea:

$$\begin{array}{l|l} x^7 + x^3 & x^4 - 1 \\ \hline -x^7 + x^3 & x^3 \\ \hline \quad 2x^3 & \end{array}$$

Así que:

$$\frac{x^7 + x^3}{x^4 - 1} = x^3 + 2\,\frac{x^3}{x^4 - 1}$$

Finalmente:

$$I = \int \left( x^3 + 2\,\frac{x^3}{x^4 - 1} \right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{4} \log |x^4 - 1|$$

$$+ K = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \log |x^4 - 1| + K$$

$$\boxed{1.12\ c}$$

$$I = \int \frac{x-1}{x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x-1 & 1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$I = \int \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) dx = x - 2\log|x+1| + K =$$

$$= \underline{x - \log(x+1)^2}$$

■

## $\boxed{1.12\ d}$

$$I = \int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

De donde:

$$2x^2+x+1 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C \qquad (\mathcal{E})$$

Tomamos $x=1$: $\quad 4 = C$

Derivamos $(\mathcal{E})$:

$$4x+1 = 2A(x-1) + B \qquad (\mathcal{E}')$$

Tomamos $x=1$ en $(\mathcal{E}')$:

$$5 = B$$

Derivamos $(\mathcal{E}')$ y obtenemos:

$$4 = 2A, \text{ es decir } A=2$$

Finalmente:

$$I = \int \left( \frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\log(x-1)^2 - 5\,\frac{1}{x-1} - 2\,\frac{1}{(x-1)^2} + K}$$

$\boxed{1.12\,e}$

$$I = \int \frac{2x}{x^3-2x^2-2x-3}\,dx$$

Factorizamos el denominador, para ello resolvemos $x^3-2x^2-2x-3=0$ por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Así que $x^3-2x^2-2x-3 = (x-3)(x^2+x+1)$ y este último producto no se puede factorizar más porque el polinomio de grado 2 no tiene raíces reales.

$$\frac{2x}{(x-3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+x+1)}$$

Por lo tanto:

$$2x = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-3) \quad (\mathcal{E})$$

Tomando $x=3$ obtenemos $6 = A\,13 \Rightarrow A = 6/13$

Observa que el término de orden 2 no aparece en la izquierda de $(\mathcal{E})$ y en la derecha es $A+B$, luego $A+B=0$ y $B=-A=-6/13 = B$

En la izquierda de $(\mathcal{E})$ el término independiente es 0 y en la derecha $A-3C=0 \Rightarrow C=\frac{A}{3} = 2/13 = C$

Finalmente:

$$I = \frac{6}{13}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{13}\int \frac{-6x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{6}{13}\log|x-3| +$$

$$+\frac{1}{13}\int \frac{-3(2x+1)+5}{x^2+x+1}\,dx = \frac{6}{13}\log|x-3| - \frac{3}{13}\log(x^2+x+1)$$

$$+5\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx}_{J}$$

Resolvemos $J$:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Finalmente:

$$I = \frac{6}{13}\log|x-3| - \frac{3}{13}\log(x^2+x+1) + \frac{10\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+K$$

$$\boxed{1.12\ f}$$

$$I = \int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx^2}{x^2(x^2+1)}$$

Así que:

$$1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \quad (\mathcal{E})$$

y si $x=0$ en $(\mathcal{E})$ entonces $B=1$.

Si $x=i$ en $(\mathcal{E})$ entonces $1 = -Ci-D \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=-1 \end{cases}$

Ahora observa que el término de orden 3 en $(\mathcal{E})$ es $0x^3$ en la izquierda y $Ax^3$ en la derecha, luego $A=0$.

$$I = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \underbrace{\frac{-1}{x} - \operatorname{arctg}(x) + K}$$

$\boxed{1.12\,g}$

$$I=\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$x^2=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D$$

Si $x=i$ tenemos $-1=Ci+D \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=-1 \end{cases}$

Si $x=0$ entonces $0=B+D \Rightarrow B=1$

Si $x=1$ tenemos $1=(A+B)2+C+D \Rightarrow$

$1=2A+2-1 \Rightarrow A=0$

$$I=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)dx = \operatorname{arctg} x - \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{J}$$

Para calcular $J$ hacemos la primitiva $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ por partes tomando $u=\frac{1}{x^2+1}$ y $dv=dx$:

$$du=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad v=x$$

$$\operatorname{arctg} x=\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$ Es decir:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}.$$

Finalmente:

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + K$$

■

$$\boxed{1\ 12\ h}$$

$$I = \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

Vamos a calcular una fórmula que relacione $I_n$ con $I_{n+1}$ siendo $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$

Buscamos la relación haciendo una integración por partes en $I_n$. Tomaremos $u = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ y $dv = dx$, luego:

$$\begin{cases} du = \frac{-n(x^2+1)^{n-1} \cdot 2x}{(x^2+1)^{2n}}\,dx = \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

Y ahora:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

$$+ 2n\int \frac{-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

Es decir:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\,I_n - 2n\,I_{n+1}$$

y entonces:

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)\,I_n}{2n}}$$

En concreto, para $n=2$:

$$I = I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + K$$

$\blacksquare$

$$\boxed{1.12\ i}$$

$$I = \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$$

Empezamos factorizando el denominador.

$x^4+x^2+1 = 0$ es bicuadrática, tomemos $z = x^2$ y entonces $z^2+z+1=0$, es decir $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} =$

$= \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\,e^{\pm i 2\pi/3}$

Así que $x = \sqrt{z} = \sqrt{e^{\pm i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)}}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto:

$$x = \begin{cases} e^{i\pi/3} = x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ e^{-i\pi/3} = x_2 = \overline{x_1} \\ e^{i\,4\pi/3} = x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ e^{i\,2\pi/3} = x_4 = \overline{x_3} \end{cases}$$

$$x^4+x^2+1 = (x-x_1)(x-\overline{x_1})(x-x_3)(x-\overline{x_3}) =$$
$$\left(x^2 - 2\,\mathrm{Re}(x_1)x + |x_1|^2\right)\left(x^2 - 2\,\mathrm{Re}(x_3)\,x + |x_3|^2\right) =$$
$$= (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$x^2-1 = (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-x+1) \qquad (\mathcal{E})$$

Tomamos $x=0$:

$$-1 = B + D \qquad (F_1)$$

Derivamos $(\mathcal{E})$:

$(\mathcal{E}')$ $$2x = A(x^2+x+1) + (Ax+B)(2x+1) + C(x^2-x+1) + (Cx+D)(2x-1)$$

Imponemos $x=0$:

$$0 = A + B + C - D \qquad (F_2)$$

El término de orden 3 de $(\mathcal{E})$ en la izquierda es 0 y en la derecha $A+C$, luego

$$A + C = 0 \qquad (F_3)$$

Tomamos $x=1$ en $(\mathcal{E})$:

$$0 = 3A + 3B + C + D \qquad (F_4)$$

Resolvemos el sistema formado por $(F_1)-(F_4)$:

De $(F_3)$ y $(F_2)$ obtenemos $B-D=0$ y junto con $(F_1)$ tenemos $B = -1/2$ y $D = -1/2$

Ahora $(F_4)$ nos da:

$$\left.\begin{array}{ll} 2 = 3A + C & (F_5) \\ 0 = A + C & (F_3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1 \\ C = -1 \end{array}$$

Finalmente:

$$I = \int \frac{x - 1/2}{x^2 - x + 1}\,dx + \int \frac{-x - 1/2}{x^2 + x + 1}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + K =$$

$$= \log\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}} + K$$

**1.14**

a) $\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cos x \, dx =$

$= \int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x} \cos x \, dx \underset{\substack{\operatorname{sen} x = t \\ \cos x\, dx = dt}}{=} \int \frac{1}{1-t^2}\, dt =$

$= \int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\, dt \overset{(*)}{=}$

$\frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+B(1+t)}{1-t^2}$

$\Rightarrow A - At + Bt + B = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B - A = 0 \Rightarrow B = A \\ A + B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = 1/2$

$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t}\, dt = \frac{1}{2} \log|1+t| - \frac{1}{2} \log|1-t|$

$+ K = \log \sqrt{\left| \frac{1+t}{1-t} \right|} + K$

**1.14b**

$$\int \frac{2-\cos x}{2+\cos x}\,dx = I$$

Llsaremos el cambio de variable $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Con lo cual

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\,dx = dt.$$

$$I = \int \frac{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1+3t^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt = (*)$$

$$\frac{1+3t^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{A+Bt}{1+t^2} + \frac{C+Dt}{3+t^2} = \frac{(A+Bt)(3+t^2)+(C+Dt)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$\Rightarrow \quad 1+3t^2 = (A+Bt)(3+t^2) + (C+Dt)(1+t^2) \qquad (\mathcal{E})$$

Tomando $t=i$ en $(\mathcal{E})$ tenemos:

$$-2 = 2(A+Bi) \Rightarrow A=-1 \quad B=0.$$

Si $t=0$ en $(\mathcal{E})$:

$$1 = -3+C \Rightarrow C=4.$$

Ahora calculamos e igualamos los términos de orden 3 en $(\mathcal{E})$:

$$0 = B+D \Rightarrow D=0$$

$$\overset{(*)}{=} 2\int \frac{-1}{1+t^2}\,dt + 8\int \frac{1}{3+t^2}\,dt$$

$$= -2\,\mathrm{arctg}(t) + \frac{8}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt = -2\,\mathrm{arctg}(t) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+k = \underbrace{-2\,\frac{x}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + k}_{} = \mathrm{I}$$

**1.14c** $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx \overset{(*)}{=}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=t \qquad \left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{1}{2}dx=dt$

$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen}x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\overset{(*)}{=}\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{1+2t-t^2}\overset{(**)}{=}$$

$-t^2+2t+1=0 \Rightarrow t^2-2t-1=0 \Rightarrow t=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$$\frac{1}{1+2t-t^2}=\frac{A}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{B}{t-1+\sqrt{2}}=\frac{(A+B)t-(A+B)+(B-A)\sqrt{2}}{1+2t-t^2}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ -(A+B)+(B-A)\sqrt{2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-A \\ -2A\sqrt{2}=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ B=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\overset{(**)}{=}\frac{-1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{t-1-\sqrt{2}}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{t-1+\sqrt{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|+k=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1-\sqrt{2}}\right|+k}$$

**1.14. d)** $\int \cos^4 x \, \mathrm{sen}^3 x \, dx = -\int t^4 (1-t^2)\, dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + K =$

$\cos x = t$

$$= \underbrace{\frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + K}$$

**1.14.e)** $\int sen^2(mx)\,dx = \int \frac{1-\cos(2mx)}{2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2m}sen(2mx)+K = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}sen(2mx)+K$$

Suponemos $a \neq 0$, si no es trivial

**1.14 f)** $\int sen^2(ax) \cos(ax)\, dx = \int \frac{1}{a} t^2\, dt = \frac{1}{a} \frac{t^3}{3} + K \stackrel{(*)}{=}$

$sen(ax) = t$

$a \cos(ax)\, dx = dt$

$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3a} sen^3(ax) + K$

**1.14 g)** $$\int \cos^2(2x)\, sen^4(2x)\, dx = I$$

$$\cos^2(2x)\, sen^4(2x) = \left(\cos(2x)\, sen(2x)\right)^2 sen^2(2x) =$$

$$\frac{1}{4}\, sen^2(4x)\, sen^2(2x) = \frac{1}{4}\left(sen(4x)\, sen(2x)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\cos(2x) - \cos(6x)\right]^2 = \frac{1}{16}\left(\cos^2(2x) + \cos^2(6x) - 2\cos(6x)\right.$$

$$\left. \cdot \cos(2x)\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2} + \frac{1+\cos(12x)}{2} - \cos(8x) - \cos(4x)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2}\cos(4x) - \cos(8x) + \frac{1}{2}\cos(12x)\right)$$

$$I = \frac{1}{16}\int\left[1 - \frac{1}{2}\cos(4x) - \cos(8x) + \frac{1}{2}\cos(12x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\frac{sen(4x)}{4} - \frac{1}{16}\frac{sen(8x)}{8} + \frac{1}{32}\frac{sen(12x)}{12} + K$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{sen(4x)}{128} - \frac{sen(8x)}{128} + \frac{sen(12x)}{384} + K = I$$

**1.14 h)** $\int sen^4 x \, dx = I$

$$sen^4 x = \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right)$$

$$I = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\,\frac{sen(2x)}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{sen(4x)}{4} + k =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{8}x - \frac{sen(2x)}{4} + \frac{sen(4x)}{32} + k}_{} = I$$

**1.14 i)** $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\,(1+\cos^2 x)}\,dx$

Hacemos el cambio de variable $\cos x = t$, luego $-\operatorname{sen} x\, dx = dt$.

$$I = -\int \frac{dt}{t\,(1+t^2)}$$

$$\frac{1}{t\,(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2)+(Bt+C)t}{t(1+t^2)},$$

es decir:

$$1 = A(1+t^2) + (Bt+C)t \qquad (\mathcal{E})$$

Imponiendo $t=i$ y $t=0$ en $(\mathcal{E})$ obtenemos:

$$\begin{cases} ① \ 1 = (Bi+C)i = -B + Ci \Rightarrow B=-1,\ C=0 \\ ② \ 1 = A \end{cases}$$

Finalmente:

$$I = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \log|t| - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + k =$$

$$= \underbrace{\log \frac{|\cos x|}{\sqrt{1+t^2}} + K}$$

**1.14 j)** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\,dy = -\int \frac{-\operatorname{sen} y}{\cos y}\,dy = -\log|\cos y| + K$

**1.14 K)**

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = I$$

Hacemos el cambio de variable $\cos x = t$:

$$I = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + K = \underbrace{\frac{1}{\cos x} + K}$$

**1.14 l)**

$$I = \int tg^2 x\,dx = \int \left(1 + tg^2(x) - 1\right) dx =$$

$$= \int \left(1 + tg^2 x\right) dx - \int 1\,dx = \underbrace{tg(x) - x + K}$$

**1.15.a** $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\; a \cos t\, dt \overset{*}{=}$

$$x = a \operatorname{sen} t$$
$$dx = a \cos t\, dt$$

$\overset{*}{=} \int \sqrt{a^2 \cos^2 t}\; a \cos t\, dt = \int a^2 \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt$

$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen}(2t) + K =$

$= \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen}\left[2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + K =$

$= \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4}\, 2 \operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right] \cos\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + K$

$= \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + K$

**115.b** $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \underset{\substack{x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow t = \arccos\left(\frac{a}{x}\right)}}{=} \int \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2}\; a \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt \overset{*}{=}$

$$dx = a \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt$$

$$\overset{*}{=} \int \sqrt{\frac{a^2 - a^2\cos^2 t}{\cos^2 t}}\; a \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt =$$

$$= -a^2 \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt = -a^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^3 t}\, dt =$$

$$= -a^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^4 t} \cos t\, dt \underset{\operatorname{sen} t = u}{=} -a^2 \int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}\, du =$$

$$= -a^2 \int \frac{u^2}{(1+u)^2(1-u)^2}\, du$$

$$\frac{u^2}{(1+u)^2(1-u)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1+u)^2(1-u) + D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

$$u^2 = A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1+u)^2(1-u) + D(1+u)^2$$

$u = 1 \Rightarrow \quad 1 = D4 \Rightarrow \quad D = 1/4$

$u = -1 \Rightarrow \quad 1 = 4B \Rightarrow \quad B = 1/4$

$u = 0 \Rightarrow \quad 0 = A + C + 1/2 \quad (E1)$

$u=2 \Rightarrow \quad 4 = 3A - 9C + 10/4 \quad (\mathcal{E}2)$

$(\mathcal{E}2) - 3(\mathcal{E}1) \Rightarrow \quad 4 = -12C + 1 \Rightarrow \quad 3 = -12C \Rightarrow C = \frac{-1}{4}$

$A = -\frac{1}{4}$

$$I = \int \left( \frac{-1/4}{1+u} + \frac{1/4}{(1+u)^2} + \frac{-1/4}{1-u} + \frac{1/4}{(1-u)^2} \right) du =$$

$$= -\frac{1}{4} \log|1+u| + \frac{1}{4} \log|1-u| - \frac{1}{4} \frac{1}{(1+u)} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-u)} + K$$

$$= \frac{1}{4} \log\left|\frac{1-u}{1+u}\right| - \frac{1}{4} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-u} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \log\left|\frac{1-\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen} t}\right| - \frac{1}{4} \frac{1}{1+\operatorname{sen} t} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\operatorname{sen} t} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \log\left|\frac{1-\operatorname{sen}\left[\arccos(a/x)\right]}{1+\operatorname{sen}\left[\arccos(a/x)\right]}\right| - \frac{1}{4} \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\arccos\frac{a}{x})} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{1}{1-\operatorname{sen}(\arccos\frac{a}{x})} + K.$$

$$x = a\,tg\,t$$

**1.15.c.** $$I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 t}\; a(1+tg^2 t)\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{1}{\cos t}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = a^2 \int \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt \underset{\sin t = u}{=}$$

$$= a^2 \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{(1+u)^2(1-u)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1+u)^2(1-u) + D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1+u)^2(1-u) + D(1+u)^2$$

$u = 1 \Rightarrow \quad 4D = 1 \Rightarrow D = 1/4$

$u = -1 \Rightarrow \quad 4B = 1 \Rightarrow B = 1/4$

$u = 0 \Rightarrow \quad 1 = A+B+C+D \Rightarrow A + C = 1/2 \qquad (E1)$

$u = 2 \Rightarrow \quad 1 = 3A + B - 9C + 9D \Rightarrow 3A - 9C = \frac{-6}{4} \qquad (E2)$

$(E2) - 3(E1) \Rightarrow -12C = \frac{-12}{4} = -3 \Rightarrow C = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = A$

$$I = \int \frac{1/4}{1+u} + \frac{\frac{1}{4}}{(1+u)^2} + \frac{1/4}{1-u} + \frac{1/4}{(1-u)^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{4} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-u} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x/a)}{1-\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x/a)} \right| + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} \frac{x}{a})}$$

$$- \frac{1}{4} \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} \frac{x}{a})} + K$$

**1.15.d** $I=\int\sqrt{-1+2x+x^2}\,dx = \int\sqrt{(x+1)^2-2}\,dx$

Hacemos el cambio de variable

$$x+1=\sqrt{2}\,\frac{1}{\cos t}$$

$$I=\int\sqrt{\frac{2}{\cos^2 t}-2}\;\sqrt{2}\,\frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt = -2\int \operatorname{tg} t\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= -2\int\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^3 t}\,dt = -2\int\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^4 t}\cos t\,dt \underset{\operatorname{sen} t=u}{=}$$

$$= -2\int\frac{u^2}{(1-u^2)^2}\,du = -2\int\frac{u^2}{(1+u)^2(1-u)^2}\,du =$$

lo hicimos en un apartado anterior

$$= -2\left(\frac{1}{4}\log\left|\frac{1-u}{1+u}\right| - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+u} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-u} + K\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)\right]}{1+\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)\right]}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)\right]}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)\right]} + K.$$

**1.15 d)** $\displaystyle\int \sqrt{-1+2x+x^2}\, dx = I$

$$x^2+2x-1 = (x+1)^2 - 2$$

Se necesita el cambio $x+1 = \sqrt{2}\, \text{ch}\, t \Rightarrow$
$dx = \sqrt{2}\, \text{sh}\, t\, dt$, pero no lo hemos visto.

**1.15.e)** $\displaystyle\int \sqrt{2-x-x^2}\, dx = I$

$$2-x-x^2 = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

Hacemos el cambio $x+\frac{1}{2} = \sqrt{9/4}\, \text{sen}\, t$, por lo tanto:

$$* \quad \frac{9}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\,\text{sen}^2 t = \frac{9}{4}\cos^2 t$$

$$* \quad dx = \frac{3}{2}\cos t\, dt$$

$$I = \int \frac{3}{2}\cos t \cdot \frac{3}{2}\cos t\, dt = \frac{9}{4}\int \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{9}{4}\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}t + \frac{\text{sen}(2t)}{4}\right) + K =$$

$$= \frac{9}{8}t + \frac{9\,\text{sen}(2t)}{16} + K = \frac{9}{8}\arcsen\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{9}{16}\,\text{sen}\left[2\arcsen\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)\right] + K$$

**1.15.f)** $I = \int \sqrt{1 + x + x^2}\, dx$

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Hacemos el cambio $\quad x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, tg\, t \Rightarrow$

$$\begin{cases} * \; t = \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \\ * \; dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + tg^2 t\right) \end{cases}$$

$$I = \int \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}} \; \frac{\sqrt{3}}{2} \; \frac{1}{\cos^2 t} \; dt =$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{1}{\cos^3 t}\, dt = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\cos^4 t} \cos t \, dt$$

Hacemos el cambio $\quad sen\, t = u \Rightarrow \quad \cos t\, dt = du$

$$I = \frac{3}{4} \int \frac{1}{(1 - u^2)^2}\, du$$

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2}$$

$$\Rightarrow \; 1 = A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1+u)^2(1-u) + D(1+u)^2$$

Tomando $u=1$ : $D=\frac{1}{4}$

Tomando $u=-1$ : $B=\frac{1}{4}$

Tomando $u=0$ : $1=A+B+C+D \Rightarrow \frac{1}{2}=A+C$

Tomando $u=2$ : $1=3A+\frac{1}{4}-9C+\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{-3}{2}=3A-9C$

$$\Rightarrow -12C=\frac{-6}{2} \Rightarrow C=\frac{1}{4} \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto:

$$I=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}\log|1+u|-\frac{1}{4}\log|1-u|-\frac{1}{4}\frac{1}{1+u}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-u}\right]+K$$

$$=\frac{3}{16}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)+K$$

con $u=\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$

**1.16-1**

$$I=\int\frac{x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2+4)+K$$

**1.16-2**

$$I=\int\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}\right)dx=\frac{1}{2}\,\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{4/3}}{4/3}+k=$$

$$=\frac{1}{3}(2x)^{3/2}-\frac{3}{4}x^{4/3}+K$$

**1.16-3**

$$I=\int e^{-3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

Haremos una integración por partes tomando $u=e^{-3x}$ y $\operatorname{sen}(2x)\,dx=dv$, luego $-\frac{1}{2}\cos(2x)=v$ y $du=-3e^{-3x}dx$

$$I=\frac{-e^{-3x}\cos(2x)}{2}-\frac{3}{2}\int e^{-3x}\cos(2x)\,dx.$$

Volvemos a hacer una integración por partes con:

$$u=e^{-3x}\qquad du=-3e^{-3x}$$
$$dv=\cos(2x)\,dx\qquad v=\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

$$I=\frac{-e^{-3x}\cos(2x)}{2}-\frac{3}{4}e^{-3x}\operatorname{sen}(2x)-\frac{9}{4}\underbrace{\int\operatorname{sen}(2x)\,e^{-3x}\,dx}_{=I}\Rightarrow$$

$$I=\frac{-2e^{-3x}\cos(2x)}{13}-\frac{3}{13}e^{-3x}\operatorname{sen}(2x)+K$$

$\text{sen}x = t$

**1.16.23** $I = \int \text{sen}^3 x \cos^5 x \, dx = \int \text{sen}^3 x \cos^4 x \cos x \, dx =$

$= \int t^3 (1-t^2)^2 dt = \int t^3 (1 + t^4 - 2t^2) \, dt =$

$= \int (t^3 + t^7 - 2t^5) \, dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^8}{8} - 2\frac{t^6}{6} + k =$

$= \frac{\text{sen}^4(x)}{4} + \frac{\text{sen}^8(x)}{8} - \frac{1}{3} \text{sen}^6(x) + K$

**1.16.29** $I = \int \cos^4 x \, sen^2 x \, dx$

Usaremos las fórmulas trigonométricas

$$\frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right] = sen\,x \cos y$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] = \cos x \cos y$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = sen\,x \, sen\,y$$

$$I = \int \cos^4 x \, sen^2 x \, dx = \int \cos^2 x \left(\cos^2 x \, sen^2 x\right) dx =$$

$$= \int \cos^2 x \left[\frac{1}{2}\left(sen(2x) + \cancel{sen(0)}\right)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int \cos^2 x \, sen^2(2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{2}\left(sen(3x) + sen(x)\right)\right]^2 dx = \frac{1}{16}\int \left[sen(3x) + sen(x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{16}\int sen^2(3x) + sen^2(x) + 2\,sen(3x)\,sen(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1-\cos(6x)}{2}\,dx + \frac{1}{16}\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \left[\cos(2x) - \cos(4x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{32}\left[x - \frac{sen(6x)}{6} + x - \frac{sen(2x)}{2}\right] + \frac{1}{16}\left[\frac{sen(2x)}{2} - \frac{sen(4x)}{4}\right]$$

$+ K =$

$$= \frac{1}{32}\left[2x - \frac{sen(6x)}{6} - \frac{sen(2x)}{2} - \frac{sen(4x)}{2} + sen(2x)\right] + K$$

1.16.31 $I=\int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx \overset{\cos x = t}{=} \int \frac{-dt}{(1-t^2)^2} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(1+t)^2(1-t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{(1-t)^2} =$$

$$= \frac{A(1+t)(1-t)^2 + B(1-t)^2 + C(1+t)^2(1-t) + D(1+t)^2}{(1+t)^2(1-t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(1+t)(1-t)^2 + B(1-t)^2 + C(1+t)^2(1-t) + D(1+t)^2$$

$t=-1 \Rightarrow \quad 1 = 4B \Rightarrow B = 1/4$

$t=1 \Rightarrow \quad 1 = 4D \Rightarrow D = 1/4$

$t=0 \Rightarrow \quad 1 = A + B + C + D \Rightarrow \frac{1}{2} = A + C$

$t=2 \Rightarrow \quad 1 = 3A + B - 9C + 9D \Rightarrow \frac{-6}{4} = 3A - 9C$

$\Rightarrow \frac{-12}{4} = -12C \Rightarrow C = 1/4 \Rightarrow A = 1/4$

$$I = \int \left( \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{(1-t)^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\log|1+t| - \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{4}\log|1-t| + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)} + K =$$

$$= \frac{1}{4}\log(\operatorname{sen}^2 x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{1+\cos x}\right) + K$$

**1.16. 40)** $I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x} + 1}\, dx =$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x + 1}\, dx$$

Hacemos el cambio $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow (1+\operatorname{tg}^2 x)\, dx = dt$ y:

$$I = \int \frac{t^2}{2+t^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)}\, dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \frac{A+Bt}{1+t^2} + \frac{C+Dt}{2+t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = (A+Bt)(2+t^2) + (C+Dt)(1+t^2)$$

Tomando $t = i$ : $\quad -1 = (A+Bi)\,1 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$

Tomando $t = 0$ $\quad 0 = -2 + C \Rightarrow C = 2$

Igualando términos de orden 3:

$$0 = B + D \Rightarrow D = -B = 0$$

$$I = \int \left( \frac{-1}{1+t^2} + \frac{2}{2+t^2} \right) dt = -\operatorname{arctg} t + \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt$$

$$= -\operatorname{arctg} t + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + K =$$

$$= -x + \sqrt{2}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + K$$

1.16.41 $I=\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\mathrm{sen}^2 x)}\,dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x\,(1+\mathrm{sen}^2 x)}\cos x\,dx =$

$$= \int \frac{2-\mathrm{sen}^2 x}{(1-\mathrm{sen}^2 x)(1+\mathrm{sen}^2 x)}\cos x\,dx \underset{\mathrm{sen}x = t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{2-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt$$

$$\frac{2-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{2-t^2}{(1+t)(1-t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} =$$

$$= \frac{A(1+t)(1+t^2)+B(1-t)(1+t^2)+(Ct+D)(1+t)(1-t)}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$2-t^2 = A(1+t)(1+t^2)+B(1-t)(1+t^2)+(Ct+D)(1+t)(1-t)$$

$t=1 \Rightarrow \quad 1 = 4A \Rightarrow A = 1/4$

$t=-1 \Rightarrow \quad 1 = 4B \Rightarrow B = 1/4$

$t=i \Rightarrow \quad 3 = (Ci+D)\,2 = 2D+2Ci \Rightarrow \begin{cases} D = 3/2 \\ C = 0 \end{cases}$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{4}\log|1-t| + \frac{1}{4}\log|1+t| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(t) + K =$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(t) + K$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\mathrm{sen}x}{1-\mathrm{sen}x}\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\mathrm{sen}x) + K$$

**1.16.42** $I = \int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

$$tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{1}{5+4\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} \, \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{9+t^2} =$$

$$= \frac{2}{9}\int \frac{dt}{1+\frac{t^2}{9}} = \frac{2}{9}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{3}\right)^2} = \frac{2}{9}\,3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + K$$

$$= \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{tg(x/2)}{3}\right) + K$$

1.16.43 $I = \int \frac{sen^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\, tg^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+tg^2 x}\cdot tg^2 x}{1+\frac{1}{1+tg^2 x}}\,dx =$

$$= \int \frac{tg^2 x}{2+tg^2 x}\,dx$$

$tg\,x = t \Rightarrow (1+tg^2 x)\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{t^2\,dt}{(2+t^2)(1+t^2)}$$

$$\frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{2+t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} = \frac{(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)(2+t^2)}{(1+t^2)(2+t^2)}$$

$$t^2 = (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(2+t^2)$$

$t = i \Rightarrow \quad -1 = Ci + D \Rightarrow \boxed{D=-1,\ C=0}$

$t = 0 \Rightarrow \quad 0 = B + 2D \Rightarrow B = -2D = \boxed{2 = B}$

$t = 1 \Rightarrow \quad 1 = (A+2)2 - 3 = 2A + 1 \Rightarrow A=0$

$$I = \int \frac{2}{2+t^2}\,dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{2}\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}\,dt - arctg\,t) + K$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt - arctg(t) + K = \sqrt{2}\, arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - arctg\, t + K$$

$$= \sqrt{2}\, arctg\left(\frac{tg\,x}{\sqrt{2}}\right) - x + K.$$