Febrero 2017. Parcial C1.

MATEMÁTICAS. 3 de julio de 2017. GIC.

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

$\boxed{1}$.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, en concreto

$$\beta = \{[1,0,0]\,,[1,0,2]\,,[0,1,5]\} \text{ y } \beta' = \{[1,1,1]\,,[0,1,5]\,,[0,0,1]\}.$$

Se pide que calcules la matriz $M_{\beta\beta'}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β) *(Puntuación: 1)*.

$\boxed{2}$.

Sean β la base de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1]\,,[1,0,1]\,,[0,0,1]\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$ *(Puntuación: 1)*.

$\boxed{3}$.

Calcula una base de $\mathbf{Ker}\,(f)$ y otra de $\mathbf{Im}\,(f)$ para la aplicación f del ejercicio anterior expresando las coordenadas de los vectores que des respecto de la base canónica *(Puntuación: 1)*.

$\boxed{4}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 23 & -15 & 0 \\ 20 & -12 & 0 \\ 40 & -30 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$ *(Puntuación: 2)*.

Examen final GIC junio 2017
Parte del 1er parcial

---

1) $\beta = \{ \overset{v_1}{(1,0,0)}, \overset{v_2}{(1,0,2)}, \overset{v_3}{(0,1,5)} \}$

$\beta' = \{ \overset{w_1}{(1,1,1)}, \overset{w_2}{(0,1,5)}, \overset{w_3}{(0,0,1)} \}$

$$M_{\beta\beta'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1/2 \\ -2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \end{array}$$

$w_1 = (1,1,1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v_3 - 2v_2 + 3v_1$

$w_2 = (0,1,5) = v_3 = (0,0,1)_\beta$

$w_3 = (0,0,1) = \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)_\beta$

También lo podemos hacer de la siguiente forma:

$$M_{\beta\beta'} = M_{\beta\beta_c} M_{\beta_c\beta'} =$$

$$= \left(M_{\beta_c\beta}\right)^{-1} M_{\beta_c\beta'} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1/2 \\ -2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2

$$\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$$
$$v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad M_{\beta\beta}(f) = \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \end{array}$$
$$M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A Fórmula:

$$M_{\beta_c\beta_c}(f) = M_{\beta_c \beta}\, M_{\beta\beta}(f)\, M_{\beta\, \beta_c} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(B) Definición

$$M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix}$$

$$f(e_3) = f(0,0,1) = f(v_3) = (-1,8,1)_{\mathcal{B}} =$$

$$= -v_1 + 8v_2 + v_3 = (7,-1,8)$$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$$

$$= (0,2,0)_{\mathcal{B}} = 2v_2 = (2,0,2)$$

$$f(e_1) = f(1,0,0) = f(v_2 - v_3) = f(v_2) - f(v_3)$$

$$= (1,-7,-1)_{\mathcal{B}} = v_1 - 7v_2 - v_3 = (-6,1,-7)$$

3

$\beta_{\ker f}$ $\qquad\qquad$ $\beta_{\mathrm{Im} f}$

$\boxed{\mathrm{Im}\, f}$ $\dim \mathrm{Im}\, f = rg\left(M_{\beta\beta}(f) \right) = 2$

$\mathrm{Im}\, f = \langle (-6,1,7), (2,0,2), (7,-1,8) \}$

$\beta_{\mathrm{Im} f} = \{ (-6,1,7), (1,0,1) \}$

$\boxed{\ker f}$ $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = 3$

$\Rightarrow \dim \ker f = 1$

$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x,y,z) = M_{\beta_c\beta_c}(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -6x+2y+7z=0 \\ x-z=0 \\ \cancel{-7x+2y+8z=0} \end{cases}$$ (no la necesitamos porque $rg\, M_{B_c B_c}(f)=2$)

Resolvemos: $x=1 \Rightarrow z=x=1$

$\Rightarrow y=-1/2$

$$\beta_{\ker f}=\{(1,-1/2,1)\}$$

④ Diagonalize

$$A = \begin{pmatrix} 23 & -15 & 0 \\ 20 & -12 & 0 \\ 40 & -30 & 3 \end{pmatrix}$$

*

$$p_A(x) = |A - x I_3| = \begin{vmatrix} 23-x & -15 & 0 \\ 20 & -12-x & 0 \\ 40 & -30 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} 23-x & -15 \\ 20 & -12-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3-x)\left[(23-x)(-12-x) + 15 \cdot 20\right] =$$

$$= (3-x)(x^2 - 11x + 24) = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \\ x = 8 \end{cases}$$

* $\sigma_A = \{3, 8\}$ $\quad m(3) = 2$

$\quad m(8) = 1 = \dim V_8$

* Estudiamos si $\dim V_3 = m(3) = 2$

$$V_3 = \{ (x, y, z) \text{ tq } (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \}$$

$$\dim V_3 = 3 - rg(A - 3I_3)$$

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 0 \\ 20 & -15 & 0 \\ 40 & -30 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim V_3 = 3 - 1 = 2 = m(3)$$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

* Buscamos P

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\beta_{V_3}} & \beta_{V_8} \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Base de V_3**

$$(x,y,z) \in V_3 \iff 20x - 15y = 0$$

$$\iff 4x - 3y = 0 \iff 3y = 4x$$

$$\beta_{V_3} = \{(3,4,0),(0,0,1)\}$$

• Base de V_8

$$(x,y,z) \in V_8 \iff (A - 8I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 15 & -15 & 0 \\ 20 & -20 & 0 \\ 40 & -30 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 8x - 6y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$x = 1$, $y = 1$, $z = 2$

$$\beta_{V_8} = \{(1,1,2)\}$$

MATEMÁTICAS. FEBRERO DE 2017

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

Observaciones

- Los alumnos que se presentan al **primer parcial** tienen que responder a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5.
- Los alumnos que se presentan al **examen final** tienen que responder a las preguntas 3, 4, 6, 7, 8.

1.
Calcula la primitiva $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ *(2 puntos).*

2.
Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1], [1,0,1], [0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β). Se pide calcular las coordenadas del vector $[4,1,4]_{\beta'}$ expresadas en la base canónica *(1 punto).*

3.
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es: $M_{\beta_c^3\beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Considera las bases β_3 y β_4 de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ tales que

$$\beta_4 = \{[1,0,0,5], [0,1,1,0], [0,0,1,2], [0,0,0,1]\} \quad \text{y} \quad M_{\beta_c^3\beta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide calcular:

a) $M_{\beta_3\beta_4}(f)$ *(1 punto).*
b) Dimensión y ecuaciones de Ker f respecto de la base β_3 *(1 punto).*
c) Dimensión y ecuaciones de Im f respecto de la base β_4 *(1 punto).*

4.
Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$ *(2 puntos).*

5.
Usa un polinomio de Taylor de grado 3 de la función $h(x) = \operatorname{sen}(4x) + \cos x$ para dar una aproximación del valor $A = \operatorname{sen}(0.04) + \cos(0.01)$. Estima el error cometido, calculando previamente el resto de Lagrange *(2 puntos).*

6. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : 25 \leq x^2 + y^2 \leq 36, x \leq 0, y \leq 0, -5 \leq z \leq 0\}$ en coordenadas cilíndricas y haz un dibujo de él *(1 punto).*

7.
Calcula la integral $\iiint_\Omega y\,dxdydz$ donde Ω es el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $4x + 1y + 4z = 16$ *(2 puntos).*

8.
Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ condicionados por $y^4 + x^4 - 6 = 0$ (los puntos que verifican esta condición puedes suponer que pertenecen a un conjunto que es cerrado y acotado). Da el valor de la función en los extremos absolutos que calcules *(2 puntos).*

Examen parcial Febrero 2017

1) $$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x\,dx = I$$

$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t}$$

$$= \frac{A(1-t)+B(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{(A+B)+t(B-A)}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=1 \\ B-A=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = 1/2$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log|1+t| - \log|1-t| \right] + k$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + k =$$

$$= \log \sqrt{\left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|} + k$$

② $\beta = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)\}$

$$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4,1,4)_{\beta'} = \overline{(x, y, z)}$$

$$M_{\beta\beta'} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}_{\beta}$$

$$(12, 17, 4)_\beta = 12(1,1,1) + 17(1,0,1) + 4(0,0,1)$$
$$= (29, 12, 33)$$

③

$$M_{\beta_c^3 \beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$\beta_4 = \{ \overset{w_1}{(1,0,0,5)}, \overset{w_2}{(0,1,1,0)}, \overset{w_3}{(0,0,1,2)}, \overset{w_4}{(0,0,0,1)} \}$$

$$M_{\beta_3^c \beta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $M_{\beta_3 \beta_4}(f)$

Observa que $\beta_3 = \{ \overset{u_1}{(1,1,1)}, \overset{u_2}{(1,1,0)}, \overset{u_3}{(1,0,0)} \}$

- $f(u_1) = M_{\beta_c^3 \beta_c^4}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 +$

$+ \delta w_4 = 5 w_1 + 2 w_2 - 20 w_3 = (5, 2, 0, -20)_{\beta_4}$

- $f(u_2) = (5,0,0,5) = 5 w_1 - 20 w_4 = (5,0,0,-20)_{\beta_4}$
- $f(u_3) = (5,0,0,5) = (5,0,0,-20)_{\beta_4}$

Así que $\quad M_{\beta_3\beta_4}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & -20 & -20 \end{pmatrix}$

b) Dim(Ker f) y ecuaciones respecto de β_3

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x,y,z)_{\beta_3} \text{ tq } f((x,y,z)_{\beta_3}) = \vec{0} \}$$

$$= \{ (x,y,z)_{\beta_3} \text{ tq } x+y+z = x = 0 \}$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} M_{\beta_3\beta_4}(f) = 3-2=1$$

$$\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{ (0,1,-1)_{\beta_3} \}$$

c) $\mathrm{Im}\, f$ respecto de β_4

$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = 2$

$\mathrm{Im}\, f = \langle (5,2,0,-20)_{\beta_4}, (5,0,0,-20)_{\beta_4},$

$(5,0,0,-20)_{\beta_4} \rangle$

$\beta_{\mathrm{Im} f} = \{ (5,2,0,-20)_{\beta_4}, (1,0,0,-4)_{\beta_4} \}$

④ Diagonalizar

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

- $p_A(x) = |A - x I_3| =$

$$= \begin{vmatrix} 6-x & -4 & 2 \\ 2 & -x & 2 \\ 4 & -8 & 8-x \end{vmatrix} \underset{F_3-2F_2}{\overset{F_1-F_2}{=}} \begin{vmatrix} 4-x & -4+x & 0 \\ 2 & -x & 2 \\ 0 & -8+2x & 4-x \end{vmatrix} \overset{C_2+C_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 0 & -8+2x & 4-x \end{vmatrix} = (4-x)\left[(2-x)(4-x) - 2(-8+2x)\right]$$

$=(4-x)(x^2-10x+24)=$

$=(4-x)(x-6)(x-4)=0 \begin{cases} x=4 \\ x=4 \\ x=6 \end{cases}$

- $\sigma_A = \{4, 6\}$ $\quad m(4)=2 \overset{?}{=} \dim V_4$
  $\quad m(6)=1 = \dim V_6$

- $V_4 = \left\{(x,y,z) \text{ tq } (A-4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\right\}$

$\boxed{\begin{matrix} 2x-4y+2z \\ \shortparallel \\ 0 \end{matrix}}$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} = B \qquad rg B = 1$

$\Rightarrow \dim V_4 = 3 - rg B = 3-1=2$

Así que A es diagonalizable

- $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- β_{V_4}

$(x,y,z) \in V_4 \Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0$

$\Rightarrow \beta_{V_4} = \{(2,1,0), (0,1,2)\}$

- β_{V_6}

$(x,y,z) \in V_6 \Leftrightarrow \left(A - 6 I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\left(A - 6 I_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -4y+2z=0 \\ 2x-6y+2z=0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \beta_{V_6}=\{(1,1,2)\}$$

⑤ $h(x) = \text{sen}(4x) + \cos x$

$A = \text{sen}(0.04) + \cos(0.01)$

$p_3(x)$

$a = 0 \qquad x = 0.01$

$h'(x) = 4\cos(4x) - \text{sen}(x)$
$h''(x) = -16\,\text{sen}(4x) - \cos x$
$h'''(x) = -64\cos(4x) + \text{sen}\,x$
$h^{(4)}(x) = +256\,\text{sen}(4x) + \cos x$

$$p_3(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \frac{h'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + 4x - \frac{x^2}{2} - \frac{32}{3}x^3$$

$A \simeq p_3(0.01) \simeq 1.0399393333$

$$E = \left| \frac{h^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \right| \qquad \xi \in (0, 0.01)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{|256 \operatorname{sen}(4\xi) + \cos \xi|}{24} 10^{-8}$$

$$\leq \frac{|256 \operatorname{sen}(4\xi)| + |\cos \xi|}{24} 10^{-8}$$

$$\leq \frac{256 + 1}{24} 10^{-8} \leq \frac{257}{24} 10^{-8} \leq$$

$$\leq 11 \cdot 10^{-8} \leq 1.1 \cdot 10^{-7} \leq 10^{-6}$$

Febrero 2014. Parcial C1.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1], [1,0,1], [0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β), $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Se pide contestar a las siguientes preguntas (rellena los huecos y entrega los cálculos que te conducen a tales resultados):

1. Calcula las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base canónica:

$$\beta' = \left\{ (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}), (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}), (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}) \right\}$$ <u>(0,5 puntos)</u>.

2. $M_{\beta\beta_c} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$ <u>(0,5 puntos)</u>. $M_{\beta'\beta'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$ <u>(1 punto)</u>.

Febrero de 2014

$\beta = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)\}$

$$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Calcula β'

$\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$

$v_1 = (1,0,0)_\beta = (1,1,1)$

$v_2 = (1,1,0)_\beta = (2,1,2)$

$v_3 = (2,3,1)_\beta = 2(1,1,1) + 3(1,0,1) + (0,0,1)$
$= (5,2,6)$

②

$$\underline{\underline{M_{\beta\beta_c}}} = \left(M_{\beta_c\beta}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M_{\beta'\beta'}(f)}} \qquad \beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$v_1 = (1,0,0)_\beta$$

$$\Longrightarrow f(v_1) = M_{\beta\beta}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta = 2v_2 - 2v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta'}$$

$$v_2 = (1,1,0)_\beta$$

$$\Longrightarrow f(v_2) = \left[M_{\beta\beta}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta\right]^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta^t = 3v_2 - 3v_1$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta'}$$

3. Calcula las ecuaciones de Ker f respecto de la base canónica, una base del mismo con los vectores expresados en la base canónica y la dimensión (1 punto).

4. Calcula las ecuaciones de Im f respecto de la base canónica, una base de la misma con los vectores expresados en la base canónica y la dimensión (1 punto).

5. Encontrar matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}CP$

$\underline{\underline{v_3}} = (2,3,1)_\beta$

$$f(v_3) = M_{\beta\beta}(f)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix}-1\\11\\1\end{pmatrix}_\beta =$$

$$= -11v_1 + 8v_2 + v_3 = (-11, 8, 1)_{\beta'}$$

③ $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) : \underline{z-x = -3x+y+4z = 0}\}$

$(x,y,z) \in \ker f$

$\Downarrow \quad M_{\beta\beta_c}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (y, x-y, -x+z)_\beta$

$$\Rightarrow \vec{0} = M_{\beta\beta}(f)\begin{pmatrix}y\\x-y\\-x+z\end{pmatrix}_\beta = (-z+x, 2y+x-y+4z-4x, z-x)_\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z-x = 0 \\ -3x+y+4z = 0 \end{cases}$$

$\beta_{\ker f} = \{(1,-1,1)\}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1$

④ Ecuacions de $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f = \langle (0,2,0)_\beta, (0,1,0)_\beta, (-1,4,1)_\beta \rangle =$$

$$= \langle (0,1,0)_\beta, (-1,4,1)_\beta \rangle$$

$$\operatorname{Im} f \ni (x,y,z) = A(0,1,0)_\beta + B(-1,4,1)_\beta =$$

$$= A(1,0,1) + B[-(1,1,1) + 4(1,0,1) + (0,0,1)]$$

$$= A(1,0,1) + B(3,-1,4) =$$

$$= (A+3B, -B, A+4B)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A+3B \\ y = -B \\ z = A+4B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = A - 3y \\ z = A - 4y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z - x = -y \Rightarrow -x + y - z = 0$$

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \text{ tq } -x+y-z=0\}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$

$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{ (1,0,1), (0,1,-1) \}$

5 $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$p_C(x) = |C - x I_3| = \begin{vmatrix} -2-x & 3 & 3 \\ -3 & 4-x & 3 \\ -3 & 3 & 4-x \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_2}{=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-x & 3 & 0 \\ -3 & 4-x & -1+x \\ -3 & 3 & 1-x \end{vmatrix} \overset{F_3+F_2}{=\!=} \begin{vmatrix} -2-x & 3 & 0 \\ -3 & 4-x & -1+x \\ -6 & 7-x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-1) \begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ -6 & 7-x \end{vmatrix} = -(x-1) \left[-(7-x)(2+x) + 18 \right]$$

$$= -(x-1) \left[-14 + x^2 - 5x + 18 \right] = -(x-1)(x^2 - 5x + 4)$$

$$= -(x-1)(x-1)(x-4) = -(x-1)^2(x-4)$$

Así que:

$\sigma_C = \{4, 1\}$ con

$$m(4) = 1 = \dim V_4 \text{ (por teoría)}$$

$$m(1) = 2 \overset{?}{=} \dim V_1$$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \text{ tq } (C - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$C - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(C - I_3) = 1$$

$$\dim V_1 = 3 - rg(C - I_3) = 3 - 1 = 2$$

Así que la matriz C es diagonalizable

Calculemos una base de V_1

$$V_1 = \{(x,y,z) \text{ tq } -x+y+z=0\}$$

Luego

$$\beta_{V_1} = \{(1,0,1),(0,1,-1)\}$$

Ahora calculemos la base de V_4

$$V_4 = \{(x,y,z) \text{ tq } (C-4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\}$$

$$C-4I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ rg $=2$ ya que $\dim V_4 = 1$

Como $rg(C-4I_3)=2$, de las 3 ecuaciones del sistema basta con quedarnos con 2 linealmente independientes:

$$(x,y,z) \in V_4 \iff \begin{cases} -x+z=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \iff z=x=y$$

Así que

$$\beta_{V_4} = \{(1,1,1)\}$$

Finalmente:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. De una matriz diagonalizable A de tamaño 2014×2014 se sabe que su espectro es $\sigma_A = \{1, 2, 8, 2014\}$ con multiplicidades $m(1) = m(2) = m(8) = 500$. Se pide:

- $m(2014) = \boxed{}$ (0,5 puntos).
- Calcular el espectro de la matriz $8A$ y las multiplicidades de los elementos del espectro (0,5 puntos).

$$\sigma_{8A} = \left\{ \boxed{} \right\}$$

$$m(\boxed{}) = \boxed{},\ m(\boxed{}) = \boxed{},\ m(\boxed{}) = \boxed{},\ m(\boxed{}) = \boxed{},\ m(\boxed{}) = \boxed{}$$

⑥ $A \in M_{2014 \times 2014}(\mathbb{R})$

$\sigma_A = \{1, 2, 8, 2014\}$

$m(1) = m(2) = m(8) = 500$

- $m(2014) = 514$ puesto que la suma de las multiplicidades coincide con el tamaño

- $8A$

A diagonalizable $\Rightarrow$ existe P tq

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow 8P^{-1}AP = 8D$$

$P^{-1} \, 8A \, P = 8D \Rightarrow 8A$ diagonalizable

y $\sigma_{8A} = \{8, 16, 64, 16112\}$ con

$m(8) = m(16) = m(64) = 500$ y $m(16112) = 514$

7. Calcula el polinomio de Taylor de la función $\operatorname{sen} x + 2\,x\,e^{x}$ centrado en $a = 0$ y de orden 3 (1 punto).

7 $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x e^{x}$

$f'(x) = \cos x + 2e^{x} + 2x e^{x}$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x + 2e^{x} + 2e^{x} + 2x e^{x}$

$f'''(x) = -\cos x + 4e^{x} + 2e^{x} + 2x e^{x}$

$f(0) = 0, \quad f'(0) = 3, \quad f''(0) = 4, \quad f'''(0) = 5$

Así que:

$$P_3(x) = 3x + \frac{4}{2!} x^2 + \frac{5}{3!} x^3$$

$$= 3x + 2x^2 + \frac{5}{6} x^3$$

8. Calcula la primitiva $\int \frac{x+2}{x\,(x^2-2\,x+37)}\;dx$ (1,5 puntos).

(8) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2-2x+37)}\,dx = I$

Como $x^2-2x+37$ no tiene raíces reales planteamos la descomposición:

$$\frac{x+2}{x(x^2-2x+37)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+37} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+37A+Bx^2+Cx}{x(x^2-2x+37)}$$

$\Rightarrow x+2 = (A+B)x^2 + (C-2A)x + 37A$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-2A=1 \\ 37A=2 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{2}{37},\ B=-2/37$

$C = 1+2A = \frac{41}{37}$

$$I = \int \frac{2/37}{x}\,dx + \frac{1}{37}\int \frac{-2x+41}{x^2-2x+37}\,dx$$

$$= \frac{2}{37}\log|x| + \frac{1}{37}\int \frac{-(2x-2)+39}{x^2-2x+37}\,dx$$

$$= \frac{2}{37}\log|x| + \frac{-1}{37}\log|x^2-2x+37| +$$

$$+ \frac{39}{37}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-2x+37}\,dx}_{I_2}$$

Calculamos ahora el valor de I_2

$$\underline{\underline{I_2}} = \int \frac{1}{x^2-2x+37}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+36}\,dx$$

$$= \int \frac{1/36}{\left(\frac{x-1}{6}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{36}\;6\;\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{6}\right)$$

Finalmente:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{2}{37}\log|x| - \frac{1}{37}\log\left(x^2-2x+37\right) +$$

$$+ \frac{13}{74}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{6}\right) + K$$

9. Haz una estimación del error que cometemos al aproximar $\operatorname{sen}(0.5) + \cos(0.5)$ por el valor del polinomio de Taylor en 0.5 de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$, centrado en $a = 0$ y de orden 5 (1 punto).

(9) Aproximación de sen (0.5) + cos (0.5) $= A$

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = +\operatorname{sen} x + \cos x \qquad f^{(4)}(0) = 1$

$f^{(5)}(x) = \cos x - \operatorname{sen} x \qquad f^{(5)}(0) = 1$

$$p_5(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Así que:

$$A \simeq p_5(0.5) = 1 + 0.5 - \frac{0.5^2}{2} - \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^4}{4!} + \frac{0.5^5}{5!}$$

Estimación del error:

$$f^{(6)}(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

$\boxed{x = 0.5 \qquad a = 0}$

$$E = |f(x) - P_5(x)| = |R_6(x)| = \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} x^6 \right|$$

$$\xi \in (\overset{a}{0}, \overset{x}{0.5})$$

$$E = \frac{|-\operatorname{sen}\xi - \cos\xi|}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \leq$$

$$\frac{|-\operatorname{sen}\xi| + |-\cos\xi|}{6!} \frac{1}{2^6} \leq \frac{1+1}{6!} \frac{1}{2^6}$$

$$= \frac{1}{2^5 \cdot 6!}$$

Desigualdad triangular $|A+B| \leq |A| + |B| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$