

UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

TESINA DE LICENCIATURA

*ω -LIMITES DE SISTEMAS DINAMICOS
CONTINUOS*

Gabriel Soler López
Junio 1.999

ω -LIMITES DE SISTEMAS DINAMICOS CONTINUOS

por

Gabriel Soler López

Murcia, 15 de Junio de 1999

Memoria realizada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia durante el curso académico 1998/99 bajo la dirección del Doctor Víctor Jiménez López por Gabriel Soler López para optar al Grado de Licenciado.

V^oB^o El Director de la Tesina

Fdo.: Víctor Jiménez López

V^oB^o El Director del Departamento

Fdo.: José Manuel Mira Ros

Agradezco la colaboración humana y matemática de todos aquellos que me habéis apoyado durante este año. Muy especialmente a Víctor Jiménez por haberme dado el tema de este trabajo, por hacerme ver que todavía merecía la pena estudiar matemáticas y por estar siempre a mi lado.

Agradecimientos también a mi familia, a mis compañeras de despacho Aurora y M^a Angeles, a mis amigos y a todo el grupo de Sistemas Dinámicos.

Finalmente, quiero dar las gracias a todos los profesores y compañeros del Departamento de Matemáticas que de una u otra forma me han ayudado y a la Fundación Séneca.

Esta Memoria ha sido realizada a lo largo de un periodo de disfrute de una beca de FPI concedida por la Fundación Séneca.

A la memoria de mi madre.
A mi padre.

Índice General

Introducción	1
1 El teorema de Poincaré-Bendixson.	7
1.1 Introducción.	7
1.2 El concepto de sistema dinámico.	8
1.3 Definiciones de ω -límite y de α -límite.	10
1.4 Generalidades sobre los sistemas de ecuaciones autónomos.	13
1.5 Ampliando el concepto de ω -límite y α -límite. Algunas de sus propiedades.	16
1.6 Descripción de los ω -límites en el plano. Teorema de Vinograd, Solncev y Poincaré-Bendixson	21
2 El teorema de Poincaré-Bendixson en superficies, teorema de Schwartz.	29
2.1 Introducción.	29
2.2 Definiciones básicas.	30
2.3 Espacios recubridores. Levantamientos.	39
2.4 El teorema de Schwartz.	44
2.5 Teorema de Poincaré en superficies.	55
3 El teorema de Knesser-Markley.	63
3.1 Introducción.	63
3.2 El toro y la Botella de Klein como cocientes de \mathbb{C} .	64
3.3 Flujos en el toro.	66
3.4 La botella de Klein.	72

4	El contraejemplo de Denjoy.	75
4.1	Introducción.	75
4.2	Planteamiento del problema.	76
4.3	Propiedades de las soluciones en relación a sus condiciones iniciales.	77
4.4	Número de rotación.	79
4.4.1	Número de rotación racional.	80
4.4.2	Número de rotación irracional.	81
4.5	Construcción de un sistema diferencial de clase C^0	85
4.6	Construcción de una ecuación diferencial de clase C^1	89
4.7	Pseudo-contraejemplo de clase C^2	92
4.7.1	El ejemplo de Cherry.	93
4.8	Suavizando flujos.	95
4.9	Sistema dinámico con una órbita densa en \mathbb{T}^2	96
4.10	Órbitas densas en una superficie compacta arbitraria.	97
5	Estudio de los conjuntos ω-límites en superficies compactas y conexas.	101
5.1	Introducción.	101
5.2	ω -límites de órbitas no recurrentes.	102
5.3	ω -límites con interior no vacío.	105
5.3.1	Resultados geométricos sobre superficies.	105
5.3.2	ω -límites con interior no vacío en el toro.	116
5.3.3	ω -límites con interior no vacío en superficies de género superior.	119
5.4	ω -límites recurrentes con interior vacío.	121
5.4.1	Introducción.	121
5.4.2	Limitando el número de ω -límites generados por órbitas recurrentes.	122
5.4.3	El teorema de estructura de Gutiérrez.	124
5.5	Estructura topológica de los ω -límites.	129
5.6	Un caso particular: el plano proyectivo (P^2).	129
6	Abiertos transitivos de \mathbb{R}^n.	135
6.1	Introducción.	135
6.2	Preliminares.	136

6.3	El teorema de Sidorov.	139
6.4	Una caracterización de ω -límites generados por órbitas no recurrentes.	142
6.5	Una caracterización de ω -límites generados por órbitas recurrentes. .	146
Índice de materias		147
Bibliografía		150

Introducción.

A lo largo del siglo XVIII los matemáticos fueron comprendiendo que era imposible integrar la mayoría de ecuaciones diferenciales que se pudieran plantear, algunas tan importantes como las relacionadas con la estabilidad del sistema solar y la mecánica en general, que se encontraban planteadas desde el comienzo del cálculo diferencial en los *Principia* de Newton.

Una vez demostrados los teoremas de existencia y unicidad de Peano y Picard y contrastada la dificultad de resolver explícitamente las ecuaciones, se fue imponiendo poco a poco la filosofía de estudiar las propiedades de las soluciones sin intentar calcularlas. Los grandes pioneros de esta nueva forma de ver el problema son Lyapunov y especialmente Poincaré, si bien no fueron los primeros.

Los primeros escauceos de esta teoría iban destinados al estudio cualitativo local de las soluciones en el que se encuadra la obra de Lyapunov. Más tarde, la publicación en 1890 de la memoria de Poincaré sobre el problema de los tres cuerpos supuso el espaldarazo definitivo a una nueva teoría que se hacía hueco en el estudio de las ecuaciones diferenciales, se trata de la teoría cualitativa global de estas ecuaciones.

El mérito de Poincaré es el de dejar de un lado los interesantes aspectos locales para no despreciar la evolución de las soluciones con valores del tiempo grandes. Cuestiones bastante interesantes para todas las ciencias que estudian parte de sus fenómenos con ecuaciones diferenciales. Preguntas de ecología sobre la extinción o no de una especie o la colisión de dos planetas en astronomía justifican este interés de Poincaré sobre el estudio asintótico de las soluciones.

A pesar de considerarse a Poincaré el creador por excelencia de la teoría cualitativa, no son los suyos los primeros resultados cualitativos globales publicados. Ya en 1836 J.C.F. Sturm publicó un artículo sobre las ecuaciones lineales de segundo orden desde este nuevo punto de vista. Toda vez admitida la imposibilidad de computar o resolver la mayoría de dichas ecuaciones e incluso viendo que la resolución analítica no desvela las propiedades esenciales de las soluciones, Sturm llevó a cabo un estudio de las propiedades de las soluciones a partir de la ecuación que las genera, sin tener que resolver la ecuación para ello.

Detalladamente el estudio de Sturm giraba en torno a la ecuación:

$$\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{dV}{dx} \right) + G(x)V(x) = 0$$

ecuación de la que se probó que si V_1 y V_2 son soluciones independientes, entonces cada cero de V_2 se encuentra exactamente entre dos ceros de V_1 . La teoría que se deriva de este y otros hechos similares tiene varias aplicaciones, entre ellas el estudio de los sistemas Sturm-Liouville.

Volviendo a Poincaré, en 1885 apareció su artículo “*Sur les courbes définies par une équation différentielle*” [Poi85] donde se afronta por primera vez el estudio global de las soluciones. Lo que se propuso fue investigar la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ donde P y Q son polinomios, poniendo acusado interés al estudio de las curvas integrales. Se trataba de desvelar las relaciones geométricas entre las distintas curvas integrales, los puntos singulares y algunas curvas integrales algebraicas. En particular se llegó al teorema siguiente:

Teorema. *Cualquier curva solución que no termine en un punto crítico es o una curva de Jordan o una espiral sobre una curva cerrada.*

Este teorema fundamental para la teoría general de las ecuaciones diferenciales en la esfera y en el plano se conoce por el nombre de teorema de Poincaré-Bendixson en reconocimiento al matemático sueco Ivar Bendixson que en 1901 publicó una prueba del mismo teorema bajo hipótesis más débiles. Generalizaciones posteriores aparecieron a mediados de siglo XX en [Vin52, Sol45] e incluso en el último lustro de este siglo en [BJ96].

El estudio cualitativo de Poincaré fijó también su atención en ecuaciones del tipo $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$. La idea esencial para abordar el estudio de estos casos era la de asociar a dicha ecuación la superficie $F(x, y, z) = 0$. Una curva integral aparece como la proyección sobre la superficie de una curva trazada en el plano que satisfaga la ecuación $\frac{du}{dv} = \frac{U}{V}$, caso que ya había sido desarrollado.

Localmente las curvas integrales de un sistema diferencial sobre una superficie satisfacen las mismas propiedades que en el plano, pero globalmente el estudio difiere sustancialmente. Ya, en estos primeros trabajos de finales de siglo pasado se hizo notar la posibilidad de existencia de curvas densas en el toro sin puntos críticos, cosa imposible en el plano y en la esfera por el teorema antes enunciado.

La topología adquirió un papel predominante como instrumento básico para atacar el estudio cualitativo global. En particular, el deseo de desarrollar la teoría sobre la geometría de las ecuaciones diferenciales de orden mayor condujo a Poincaré al interés y al desarrollo de la topología algebraica.

Mientras este estudio iba dando sus primeros pasos apareció gradualmente la teoría de los Sistemas Dinámicos que generalizaba los estudios cualitativos de las

ecuaciones. La formulación abstracta de esta teoría llevó bastante tiempo, pero entre los precursores se encuentran Birkhoff [Bir27] en la década de los años 20 y Nemytskii y Stepanov en los años 40 y 50 [NS60].

Esta teoría de los Sistemas Dinámicos se encuentran en pleno auge y engloba, como hemos mencionado, a la teoría cualitativa en la rama conocida como Sistemas Dinámicos Continuos. La otra gran rama es la de los Sistemas Dinámicos Discretos. La relación entre ambas es estrecha y se darán evidencias de ello en gran parte de este estudio.

Pasamos a presentar el trabajo que hemos realizado y la relación que tiene con el panorama histórico que hemos dibujado en las líneas precedentes. Esta memoria se divide en seis capítulos, en los cuatro primeros nos ocupamos de los resultados que han sido publicados relacionados con el teorema de Poincaré-Bendixson de los cuales sacamos las cuestiones que todavía están abiertas a la investigación. En los dos últimos capítulos (5 y 6) se concentran los resultados que nosotros aportamos nuevos y los teoremas de Gutiérrez y Sidorov que guardan una relación con los temas que allí presentamos.

Nuestro trabajo arranca con la definición de Sistema Dinámico y la relación que existe entre este concepto y el de ecuación diferencial autónoma para pasar a la definición de ω -límite de una órbita Γ , que en el caso de las ecuaciones diferenciales no son ni más ni menos que los puntos a del espacio de fases a los que Γ se acerca asintóticamente. Todo el trabajo va destinado a describir los conjuntos ω -límite topológicamente tomando como espacios de fases \mathbb{R}^2 , \mathcal{M}^2 (superficie compacta y conexa) y \mathbb{R}^n ($n \geq 3$).

El primer capítulo lo dedicamos al estudio de los resultados del tipo Poincaré-Bendixson sobre \mathbb{R}^2 . Demostraremos este resultado y haremos una revisión de todos los resultados que hemos encontrado sobre este tema. Hacemos notar que este problema en el plano se encuentra ya totalmente zanjado.

En el siguiente capítulo cambiamos de espacio ambiente y fijamos nuestro espacio de fases como una superficie compacta y conexa. El mismo resultado de Poincaré-Bendixson es válido aquí, pero la prueba (Schwartz, 1963) se complica de manera sustancial y hay que añadir una suavidad del flujo mayor a la que se exige en el plano. Notaremos en las demostraciones que es bastante importante utilizar las propiedades topológicas de la superficie sobre la que trabajamos. Este resultado fue establecido para el toro por Denjoy en 1932 y Haas obtuvo el mismo resultado que Schwartz en 1954 (sin embargo la demostración era errónea).

Una cosa interesante que se pone de manifiesto es la existencia de ω -límites con interior no vacío; en particular se verá que el todo el toro puede ser un conjunto ω -límite. Como la esfera no es un ω -límite por la teoría de Poincaré-Bendixson se suscita el problema de clasificar qué superficies serán ω -límites de una órbita (superficies transitivas) y cuáles no. El capítulo tres responde a esta pregunta en el caso de la botella de Klein (demostraremos que no es transitiva) y en el cuatro

nos ocupamos del estudio de todas las demás superficies. Demostraremos que todas son transitivas salvo las ya mencionadas (botella de Klein y la esfera) y el plano proyectivo. Para todo esto jugarán un papel importante los espacios recubridores. En este capítulo también se estudiarán algunas cuestiones que resolvió Poincaré en el toro que son complementarias al teorema de Schwartz: en particular veremos que a diferencia del plano, en el toro existen órbitas que se contienen en su ω -límite sin que sean órbitas periódicas y de manera que el interior del ω -límite es vacío.

El capítulo cinco fue concebido con la idea de clarificar la estructura de los ω -límites en superficies. Hemos aportado nuevas caracterizaciones, en particular hemos dado un teorema del estilo de Vinograd (resultado original en el plano) para las superficies (teorema 5.2.1). Por otro lado hemos aportado un amplio estudio geométrico sobre los abiertos en superficies compactas, conexas y orientables que culmina en la caracterización de los abiertos que son ω -límites de algún flujo y los que no lo son (estamos refiriéndonos a la sección 5.3). En particular, todo el trabajo geométrico que se hace tiene como consecuencia la caracterización de ω -límites que damos en los teoremas 5.3.2.1, 5.3.2.2, 5.3.3.1, 5.3.3.2.

La sección 5.4 intenta investigar los ω -límites generados por órbitas recurrentes partiendo de los trabajos de Gutiérrez y todo ello culmina con nuestro teorema (5.5.1) que engloba los resultados dados en las secciones anteriores y algunas consideraciones sobre el teorema de Gutiérrez.

Terminamos este capítulo con un apartado dedicado al estudio del plano proyectivo 5.6. En particular rebajamos la hipótesis de flujos de clase C^2 exigida por Schwartz a flujos continuos para establecer el teorema de Poincaré-Bendixson en superficies, y en el teorema 5.6.2 probamos que las órbitas regulares del ω -límite son abiertos dentro del ω -límite.

En cuanto al capítulo 6, va destinado a probar el teorema de Sidorov que afirma que cualquier abierto conexo de \mathbb{R}^n ($n > 2$) con su frontera es transitivo. Allí aportamos una generalización del teorema de Vinograd a \mathbb{R}^n utilizando algunas técnicas introducidas por Sidorov (teorema 6.4.1).

Damos por último un gráfico de la dependencia de los capítulos para aquellos que quieran realizar una lectura parcial de esta memoria. Junto a algunas flechas ponemos las únicas secciones necesarias para entender el capítulo al que apunta.

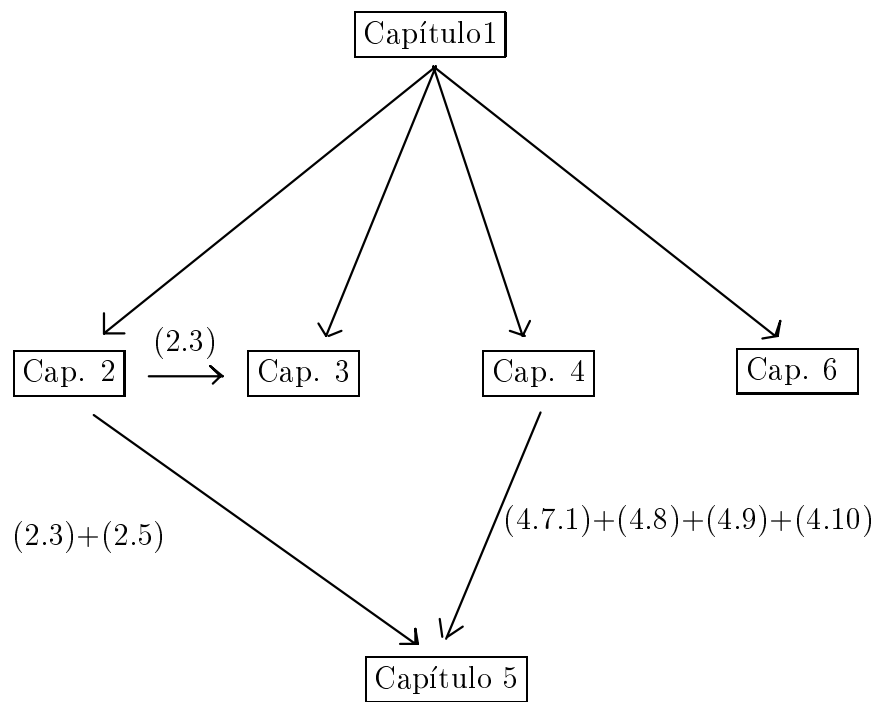


Figura 1: Dependencia entre capítulos.

Capítulo 1

El teorema de Poincaré-Bendixson.

1.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de sistema dinámico, los conjuntos ω -límites asociados a dichos sistemas, así como estudiar estos conjuntos en sistemas dinámicos derivados de ecuaciones diferenciales definidas en el plano.

El estudio de los conjuntos ω -límites en sistemas dinámicos continuos comenzó a finales del siglo XIX. Poincaré intentó desentrañar la estructura de curvas definidas como soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas sobre el plano para valores grandes del tiempo (ω -límite) y para valores grandes negativos (α -límite) llegando a la conclusión que bajo ciertas condiciones las órbitas del sistema siempre tienden a comportarse como órbitas periódicas. Su estudio se limitó a ecuaciones diferenciales del tipo $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ donde P y Q son polinomios. En cuanto a Bendixson se ocupó de estudios similares pero para ecuaciones del tipo $y' = f(x, y)$ con f de clase C^1 .

El estudio de Poincaré no dejó zanjado el tema y posteriormente Vinograd y Solncev hicieron aportaciones a este estudio en los años cuarenta y cincuenta. Durante este capítulo expondremos detenidamente las aportaciones de estos dos matemáticos.

Por último, el resultado de Vinograd, fue ampliamente generalizado en 1996 en [BJ96] utilizando el teorema de Whitney. Enunciaré al final del capítulo este resultado pero no demostraré más que una implicación por su extensión.

Libros básicos que se han manejado en la elaboración de este capítulo referentes a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales son [Sot79] [Ama90] [Ver90] [HS83] [Per91] y [NOR95].

Pasamos ya a las definiciones básicas para el desarrollo de esta tesina.

1.2 El concepto de sistema dinámico.

Definición 1.2.1 (sistema dinámico). Llamaremos sistema dinámico a una terna (X, T, Φ) , donde:

1. X : es un espacio topológico, que llamaremos espacio de estados o espacio de fases.
2. T : es el grupo aditivo \mathbb{R} ó \mathbb{Z} , que llamaremos espacio de tiempos y que dotaremos de la topología usual en el primer caso y de la topología inducida por la usual de \mathbb{R} en el segundo.
3. Φ : es una aplicación

$$\Phi : \Lambda \rightarrow X$$

siendo Λ un subconjunto de $T \times X$, $X_t = \{x \in X \text{ tales que } (t, x) \in \Lambda\}$ un abierto en X para todo valor de t en T y el conjunto $I_x = \{t \in T \text{ tales que } (t, x) \in \Lambda\}$ es un abierto que contiene a 0 para todo x de X .

A esta aplicación se le suele llamar flujo del sistema dinámico, aunque, a veces por abuso de notación la palabra flujo la utilizaremos para denotar al sistema dinámico entero.

4. $\Phi(0, x) = x$ para todo x de X .
5. Siempre que los valores $\Phi(t, x)$ y $\Phi(s, \Phi(t, x))$ estén definidos se tiene que $\Phi(t + s, x)$ está definido y se da la igualdad:

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$$

para cualesquiera que sean t y s de T y x de X .

Definición 1.2.2 (sistema dinámico discreto, S.D.D.). Diremos que una terna (X, T, Φ) es un sistema dinámico discreto si:

1. (X, T, Φ) es un sistema dinámico.
2. El espacio de tiempos T es \mathbb{Z} .

Definición 1.2.3 (sistema dinámico continuo, S.D.C.). Diremos que una terna (X, T, Φ) es un sistema dinámico continuo si:

1. (X, T, Φ) es un sistema dinámico.
2. El espacio de tiempos T es \mathbb{R} .

A continuación pondremos dos ejemplos, el primero de un sistema dinámico discreto y el segundo de un sistema dinámico continuo derivado de un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano.

Ejemplo 1.2.1 (sistema dinámico discreto asociado a una aplicación). Sea $f : \Omega \subset X \rightarrow X$ una función continua definida sobre Ω , abierto del espacio topológico X .

Definimos $f^0(x) = x$ y $f^1(x) = f(x)$ para todo x de Ω y si tiene sentido, por inducción $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

Tomamos como conjunto Λ el subconjunto de $\mathbb{N} \times X$ siguiente:

$$\{(n, x) \text{ tales que } x \in \Omega \text{ y } f^n(x) \text{ tiene sentido} \}$$

El flujo $\Phi : \Lambda \rightarrow X$ lo definimos como sigue:

$$\Phi(n, x) = f^n(x)$$

La terna (X, \mathbb{Z}, Φ) arriba definida es un sistema dinámico discreto como vamos a verificar fácilmente. Las condiciones 1, 2 y 4 se satisfacen trivialmente, en cuanto a la quinta si tenemos definidos $\Phi(n, x)$ y $\Phi(m, \Phi(n, x))$ se tiene que $\Phi(m, \Phi(n, x)) = \Phi(m, f^n(x)) = f^m(f^n(x)) = f^{n+m}(x) = \Phi(n+m, x)$, lo cual da validez a la condición 5.

Para la tercera tomamos $n \in \mathbb{N}$ y vamos a ver primero que X_n es un abierto de X . Sea $x \in X_n$, definamos un entorno U_x que esté contenido dentro de X_n y habremos acabado. Como $x \in X_n$ está definida la imagen $y = f^n(x)$, tomemos un entorno V_y de y y definamos $U_x = (f^{-1})^n(V_y)$ que por ser f continua será un abierto de X y como contiene a x será no vacío. Sólo quedaría probar que I_x es abierto en T , pero esto es trivial ya que todo subconjunto de $T = \mathbb{Z}$ con la topología inducida de \mathbb{R} es abierto y cerrado.

Si además de ser f una aplicación continua definida sobre todo X fuera un homeomorfismo, definiendo $\Phi(-n, x) = (f^{-1})^n(x)$ para todo $n > 0$ tenemos que (X, \mathbb{Z}, Φ) es igualmente un sistema dinámico discreto. Este es el ejemplo por excelencia de sistema dinámico discreto que encontramos en todos los libros.

Pasamos ahora a dar un ejemplo de un sistema dinámico continuo en el que intervienen ecuaciones diferenciales autónomas. Este es básicamente el sistema dinámico sobre el cual basaremos nuestro estudio en esta tesina. Se tratará de clarificar algunos aspectos de este sistema cuando el espacio de fases es \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^n y \mathcal{M}^2 , esta última letra designa a una superficie compacta conexa y sin borde.

Desgraciadamente sólo podremos clarificar totalmente en lo referente ω -límites el caso en el que el espacio de fases sea \mathbb{R}^2 . Los dos otros casos son una línea abierta de investigación de los que se sabe muy poco, sobre todo en el caso de \mathbb{R}^n con $n > 2$.

Expondremos las cuestiones que se pueden plantear a partir de lo que ya hay hecho, intentaremos aquí recopilar todo lo que al respecto se conoce.

Sin más preámbulos pasamos ya al mencionado ejemplo.

Ejemplo 1.2.2 (sistema dinámico continuo). Consideremos $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua y localmente Lipschitziana definida en el abierto Ω . Para cada punto y_0 de Ω le asociamos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \Omega \end{cases}$$

Según la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias (véase [NOR95] página 135), este problema tiene una solución maximal única denotada $y_{y_0} : I(y_0) \rightarrow \Omega$ de clase C^1 .

El espacio de fases de nuestro sistema dinámico será Ω , el conjunto de tiempos \mathbb{R} y el flujo $\Phi : \Lambda \rightarrow \Omega$ pasamos a definirlo. Como conjunto Λ tomaremos $\{(t, x) \text{ tales que } t \in I(x) \text{ y } x \in \Omega\}$. Para estos pares, definimos $\Phi(t, x) = y_x(t)$.

Se puede verificar, utilizando la unicidad de soluciones del problema de Cauchy y la dependencia continua respecto de las condiciones iniciales que la terna $(\Omega, \mathbb{R}, \Phi)$ satisface las condiciones exigidas en la definición 1.2.1. Estos resultados se encuentran demostrados en [HS83], páginas 250-252.

Para las dos siguientes definiciones fijamos un sistema dinámico (X, T, Φ) continuo o discreto.

Definición 1.2.4 (punto admisible). Diremos que un punto $x \in X$ es un punto admisible si $(0, x) \in \Lambda$.

Definición 1.2.5 (trayectoria y órbita). A cada punto x de X admisible le vamos a asociar una trayectoria u órbita Γ_x que será el subconjunto de X definido por la imagen de la aplicación $\Phi_x : T' \rightarrow X$, donde T' es el conjunto $\{t \in T \text{ tales que } (t, x) \in \Lambda\}$ y $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$.

Dejamos ya paso a la introducción de los conceptos centrales de esta tesina junto con el enunciado de algunas de sus propiedades generales más importantes.

1.3 Definiciones de ω -límite y de α -límite.

En las dos siguientes definiciones consideraremos fijo el sistema dinámico (X, T, Φ) .

Definición 1.3.1 (parametrización de una órbita). Dada una órbita Γ_x asociada a un sistema dinámico (X, T, Φ) , llamaremos parametrización de Γ_x a la aplicación

$$\Phi_x : I_x \rightarrow \Gamma_x$$

que vendrá definida como la restricción $\Phi|_{I_x \times \{x\}}$.

Notación 1.3.1 (extremos de I_x). Denotaremos por a_x al extremo inferior del conjunto I_x y por b_x al extremo superior de I_x . En principio cualquiera de los dos extremos pueden ser infinitos y de hecho en una gran cantidad de casos que estudiaremos lo serán.

Definición 1.3.2 (ω -límite). Si x es un punto del espacio de fases X , llamaremos ω -límite débil de la trayectoria Γ_x al conjunto:

$$\{y \in X : \forall U_y \text{ y } \forall t \in I_x \text{ existe } s > t \text{ tal que } \Phi_x(s) \in U_y\}$$

Denotaremos a este conjunto por $\omega_\Phi(\Gamma_x)$

Si nos encontramos dentro de un espacio métrico esta definición se puede reformular de la siguiente manera:

$$\omega_\Phi(\Gamma_x) = \{y \in X : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad t_n \rightarrow b_x \text{ con } \Phi_x(t_n) \rightarrow y\}$$

Análogamente tenemos la definición de α -límite considerando valores de tiempo pequeños, es decir:

Definición 1.3.3 (α -límite). Si x es un punto del espacio de fases X , llamaremos α -límite débil de la trayectoria Γ_x al conjunto:

$$\{y \in X : \forall U_y \text{ y } \forall t \in I_x \text{ existe } s < t \text{ tal que } \Phi_x(s) \in U_y\}$$

Denotaremos a este conjunto por $\alpha_\Phi(\Gamma_x)$.

Equivalentemente:

$$\alpha_\Phi(\Gamma_x) = \{y \in X : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad t_n \rightarrow a_x \text{ con } \Phi_x(t_n) \rightarrow y\}$$

En principio estos conjuntos pueden resultar vacíos, a menos que estemos trabajando con un espacio de fases que sea compacto, ponemos un ejemplo en el que $\alpha_\Phi(\Gamma_x) = \omega_\Phi(\Gamma_x) = \emptyset$.

Notación 1.3.2. En los sistemas dinámicos del tipo introducidos en los ejemplos 1.2.2 y 1.2.1 denotaremos también estos conjuntos por $\omega_\Phi(\Gamma_x) = \omega_f(\Gamma_x) = \omega(\Gamma_x)$ y $\alpha_\Phi(\Gamma_x) = \alpha_f(\Gamma_x) = \alpha(\Gamma_x)$.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos la ecuación diferencial $y' = e_1$ y el sistema dinámico continuo asociado a la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = e_1$ para todo x de \mathbb{R}^n como hicimos en el ejemplo 1.2.2. Es decir, el flujo será:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

de manera que $\Phi(t, x, y) = (x+t, y)$. Por lo tanto tendremos $\omega_\Phi(\Gamma_{(x,y)}) = \alpha_\Phi(\Gamma_{(x,y)}) = \emptyset$.

Pasamos a ver unas propiedades elementales de $\omega_\Phi(\Gamma_x)$ y $\alpha_\Phi(\Gamma_x)$. Sólo las enunciaremos para $\omega_\Phi(x)$, pero todo lo que se diga para este conjunto también es válido para $\alpha_\Phi(x)$.

Proposición 1.3.1. *Si $\Gamma_x = \Gamma_{\tilde{x}}$ entonces $\omega_\Phi(\Gamma_x) = \omega_\Phi(\Gamma_{\tilde{x}})$.*

Demostración: puesto que $\Gamma_x = \Gamma_{\tilde{x}}$ se tiene que deben existir t y \tilde{t} de T tales que $\tilde{x} = \Phi(t, x)$ y $x = \Phi(\tilde{t}, \tilde{x})$. Suponemos durante la prueba que $t > 0$ y $\tilde{t} < 0$, de manera similar se haría en caso que t fuera menor que 0 y \tilde{t} mayor.

Veamos que $\omega_\Phi(\Gamma_x) \subset \omega_\Phi(\Gamma_{\tilde{x}})$, para ello tomemos $y \in \omega_\Phi(\Gamma_x)$ y veamos que $y \in \omega_\Phi(\Gamma_{\tilde{x}})$.

Fijemos $\tau_0 \in T$ y U_y y veamos que existe $\tau_1 > \tau_0$ tal que $\Phi_{\tilde{x}}(\tau_1) \in U_y$. Debido a que $y \in \omega_\Phi(\Gamma_x)$ existe $\tau'_1 > \tau_0 - t$ con $\Phi_x(\tau'_1) \in U_y$.

Como $\Phi(t + \tau'_1, x) = \Phi_x(t + \tau'_1) = \Phi(\tau'_1, \tilde{x}) = \Phi_{\tilde{x}}(\tau'_1)$, tomando $\tau_1 = \tau'_1 + t$ se obtiene el resultado deseado.

Para la inclusión contraria se hace el mismo razonamiento cambiando los papeles de x y \tilde{x} .

□

Proposición 1.3.2. $\omega_\Phi(\Gamma_x)$ es una unión de órbitas del sistema.

Demostración: sea $y \in \omega_\Phi(\Gamma_x)$, veamos que $\Gamma_y \subset \omega_\Phi(\Gamma_x)$. Para ello tomemos $z \in \Gamma_y$, es decir, z será igual a $\Phi(s, y)$ para cierto s de T y veamos que z está en $\omega_\Phi(\Gamma_x)$.

Para ver esto tomemos U_z y $t \in T$ y veamos que existe $\tau > t$ tal que $\Phi(\tau, x) \in U_z$. Como y está en $\omega_\Phi(\Gamma_x)$ existirá un $u > t - s$ tal que $\Phi_x(u) \in \Phi_s^{-1}(U_z)$ que es abierto por la definición de sistema dinámico. De aquí tenemos que $\Phi_s(\Phi_x(u)) = \Phi(u + s, x) = \Phi_s(\Phi(u, x)) \in U_z$.

Así que $\Phi(s + u, x) \in U_z$ y por lo tanto, haciendo $\tau = u + s > t$ tenemos que $z \in \omega_\Phi(\Gamma_x)$. Así que $\Gamma_y \subset \omega_\Phi(\Gamma_x)$.

□

Proposición 1.3.3. $\omega_\Phi(\Gamma_x)$ es cerrado.

Demostración: veamos que el complementario $X \setminus \omega_\Phi(\Gamma_x)$ es abierto. Sea $z \notin \omega_\Phi(\Gamma_x)$, por lo tanto existirá U_z y \tilde{t} de T , tales que $\Phi(s, x) \notin U_z \forall s > \tilde{t}$. Así que $U_z \subset X \setminus \omega_\Phi(\Gamma_x)$.

De todo esto se tiene que $X \setminus \omega_\Phi(\Gamma_x)$ es abierto y entonces $\omega_\Phi(\Gamma_x)$ es cerrado. \square

1.4 Generalidades sobre los sistemas de ecuaciones autónomos.

En esta sección vamos a exponer unos lemas sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos que nos ayudarán a la descripción de los conjuntos ω -límites de los sistemas dinámicos derivados de sistemas diferenciales.

Lema 1.4.1. *Sea $y(t)$ la solución de $y' = f(y)$ con $y(0) = y_0$. Supongamos que $y(t_1) = y(t_2)$ con $t_1 < t_2$. Entonces y está definida en todo \mathbb{R} y se tiene $y(t + P) = y(t)$ para todo t de \mathbb{R} con $P = t_2 - t_1$.*

Demostración: La prueba está basada en la unicidad de soluciones de $y' = f(y)$ fijando la condición inicial.

Sea $y : I \rightarrow \Omega$ la solución maximal de:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_1) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$z(t) = y(t + P) : I - P \rightarrow \Omega$ es también solución de 1.1 como se puede verificar fácilmente. Así que $I = I - P$, de donde I debe ser todo \mathbb{R} . Además $z(t) = y(t)$ por la unicidad de soluciones y esto concluye la prueba. \square

Lema 1.4.2. *Sea $y : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solución de 1.1 con $y(t_1) = y(t_2)$ para ciertos $t_1 < t_2$. Sea $R = \{p \in \mathbb{R} : y(t + p) = y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$, entonces R es un subgrupo aditivo no trivial y cerrado.*

Demostración: Vamos a verificar las propiedades referentes a subgrupo, veamos que la suma es interna y que el opuesto de un elemento de R está en R también.

Sean a y b dos elementos de R , por lo tanto $y(a + b + t) = y(a + (b + t)) = y(b + t) = y(t)$ y de aquí se sigue $a + b \in R$. Ahora vamos a ver que pasa con $-a$: $y(t - a) = y(t - a + a) = y(t)$ con lo cual $-a \in R$.

R es no trivial por contener al elemento $t_2 - t_1$ según se ha visto en el lema 1.4.1.

Hay que probar por último que R es cerrado. Para ello tomamos una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de R que convergen hacia p . Probemos que $p \in R$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y(t + p_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y(t) = y(t)$$

por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y(t + p_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y(t + p) = y(t + p)$$

Así que $y(t) = y(t + p)$ y terminamos la demostración. \square

Lema 1.4.3. *Sea $R \subset \mathbb{R}$ un subgrupo aditivo, cerrado y no trivial. Entonces o bien $R = T_0\mathbb{Z}$ para algún $T_0 > 0$ o bien $R = \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $T_0 = \inf\{T \in R : T > 0\}$. Observemos que por ser R no trivial y por el hecho de que si $T \in R$ entonces también $-T \in R$, el conjunto $\{T \in R : T > 0\}$ es no vacío y tiene sentido la definición de T_0 . Por ser R cerrado se tiene además $T_0 \in R$. Ahora distinguimos dos casos, supongamos en el primero que $T_0 > 0$. En este caso probaremos que $R = T_0\mathbb{Z}$. Por ser R cerrado $T_0 \in R$ y la condición de subgrupo aditivo garantiza al menos, que $T_0\mathbb{Z} \in R$. Recíprocamente, si existiera $T_1 \in R$ tal que $nT_0 \leq T_1 < (n+1)T_0$ para algún n de \mathbb{Z} , entonces también $T_1 - nT_0 \in R$ y $0 \leq T_1 - nT_0 < T_0$ en contradicción con la definición de T_0 .

Supongamos ahora que $T_0 = 0$ y probemos que $R = \mathbb{R}$. Toda vez que R es cerrado bastará demostrar que R es denso en \mathbb{R} . Fijemos para ello arbitrariamente $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ y encontremos un punto en R cuya distancia a t sea menor que ε . Como $T_0 = 0$ podemos conseguir $T_1 \in R$ tal que $0 < T_1 < \varepsilon$. Elijamos $n \in \mathbb{Z}$ de manera que $nT_1 \leq t \leq (n+1)T_1$. Entonces $nT_1 \in R$ y $|t - nT_1| < \varepsilon$.

\square

Definición 1.4.1. Consideremos el problema de Cauchy para la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana, es decir:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_1) = y_0 \end{cases}$$

Diremos que un punto $p \in \Omega$ es un punto crítico de f si $f(p) = 0$.

Diremos que un punto $p \in \Omega$ es regular de f si $f(p) \neq 0$.

Observación 1.4.1. *Si p es un punto crítico de f , la curva $y : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ definida por $y(t) = p$ para todo t de \mathbb{R} es la solución maximal única del problema de Cauchy 1.1.*

En el siguiente teorema vamos a poner de manifiesto las diferentes clases de soluciones que hay para el problema 1.1. En esencia, éstas serán curvas periódicas, curvas constantes o soluciones inyectivas.

Teorema 1.4.1. *Sean $y : I \rightarrow \Omega$ una solución de 1.1 y sea Γ su órbita asociada. Entonces I es abierto y o bien Γ consiste en un único punto crítico (con lo cual $I = \mathbb{R}$) o bien Γ sólo contiene puntos regulares. En este segundo caso debe verificarse una y sólo una de las siguientes alternativas:*

1. y es inyectiva.

2. $I = \mathbb{R}$ e y es periódica de periodo P para algún $P > 0$, es decir, $y(t+P) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y(t) \neq y(t')$ si $|t - t'| < P$.

Demostración: Empezamos observando que si Γ contiene algún punto crítico p entonces la órbita se reduce a dicho punto crítico.

Supongamos que Γ sólo consta de puntos regulares y que $y(t)$ no sea inyectiva. De acuerdo con el lema 1.4.1, $I = \mathbb{R}$ y existe $T_0 > 0$ tal que $y(t+T_0) = y(t)$ para cada t . Además, los lemas 1.4.3 y 1.4.2 conllevan $R = \{p \in \mathbb{R} : y(t+p) = y(t) \forall t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ o $R = T_1\mathbb{Z}$ para algún $T_1 > 0$.

El caso $R = \mathbb{R}$ no puede darse porque, si se diera, $y(t') = y(t)$ para cualesquiera t y t' de \mathbb{R} , con lo cual y sería una función constante y Γ se reduciría a un punto crítico en contra de lo que venimos suponiendo.

Así que $R = T_1\mathbb{Z}$ y por lo tanto y es una función periódica de periodo T_1 , ya que si $t_1 < t_2$ fuesen tales que $t_2 - t_1 < T_1$ e $y(t_1) = y(t_2)$, el lema 1.4.2 implicaría $t_2 - t_1 \in R$ lo cual es imposible. \square

Proposición 1.4.1. *Sea Γ una órbita periódica de 1.1. Entonces Γ es homeomorfa a la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.*

Demostración: Supongamos que Γ es la órbita asociada a una solución periódica $y(t)$ de periodo P . Defínase $\Phi : S^1 \rightarrow \Gamma$ mediante $\Phi(\exp(2\pi it)) = y(tP)$. La periodicidad de $y(t)$ garantiza la buena definición de la aplicación Φ .

Claramente Φ es biyectiva y continua. Como S^1 es compacto y Γ es Hausdorff, un resultado de topología general nos garantiza que Φ lleva cerrados a cerrados. De aquí resulta que Φ^{-1} es continua y en suma que Φ es un homeomorfismo. \square

Teorema 1.4.2. *Sean $y_1 : I_1 \rightarrow \Omega$ e $y_2 : I_2 \rightarrow \Omega$ dos soluciones de 1.1, siendo respectivamente Γ_1 y Γ_2 sus órbitas asociadas. Entonces Γ_1 y Γ_2 son o bien disjuntas o bien coincidentes. El segundo caso ocurre si y sólo si existe algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $I_2 = I_1 + t_0$ e $y_1(t) = y_2(t + t_0)$ para todo $t \in I_1$.*

Demostración. Supongamos que Γ_1 y Γ_2 intersecan en algún punto p . Probaremos que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Tomemos $t_1 \in I_1$ y $t_2 \in I_2$ tales que $y_1(t_1) = y_2(t_2) = p$. Definamos las funciones $y : I_1 - t_1 \rightarrow \Omega$ e $\tilde{y} : I_2 - t_2 \rightarrow \Omega$ mediante $y(t) = y_1(t + t_1)$ e $\tilde{y}(t) = y_2(t + t_2)$. Fácilmente se ve que $y'(t)f(y(t))$ y $\tilde{y}'(t) = f(\tilde{y}(t))$ y satisfacen las condiciones $y(0) = y_1(t_1) = y_2(t_2) = \tilde{y}(0)$. La unicidad de soluciones garantiza que $I_1 - t_1 = I_2 - t_2 := I$ e $y(t) = \tilde{y}(t)$ para todo $t \in I$, o lo que es lo mismo $y_1(t + t_1) = y_2(t + t_2)$ para todo t de I . Entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

La parte “si” de la última afirmación del teorema es trivial. En cuanto a la parte “sólo si” basta notar que si $\Gamma_1 = \Gamma_2$ entonces, con la notación del párrafo anterior (escribiendo $t_0 = t_2 - t_1$), se tiene $I_2 = I_1 + t_0$ e $y_2(t + t_0) = y_2(t - t_1 + t_2) = y_1(t - t_1 + t_1) = y_1(t)$ para todo t de I_1 . \square

1.5 Ampliando el concepto de ω -límite y α -límite. Algunas de sus propiedades.

Hasta ahora hemos estudiado algunas propiedades de los conjuntos α -límite y ω -límite pero en principio estos conjuntos no tienen por qué no ser vacíos según se vio en el ejemplo 1.3.1, por ello vamos a ampliar la definición de estos conjuntos para que sean siempre no vacíos. A dicha ampliación la denotaremos igual pero seguida de el calificativo débil.

En las dos siguientes definiciones consideraremos fijo el sistema dinámico asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales $(\Omega, \mathbb{R}, \Phi)$.

Definición 1.5.1 (ω -límite débil). Si x es un punto del espacio de fases Ω , llamaremos ω -límite débil de la trayectoria Γ_x al conjunto:

$$\omega_{\Phi}^*(\Gamma_x) = \{y \in \bar{\Omega} : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad t_n \rightarrow b_x \text{ con } \Phi_x(t_n) \rightarrow y\}$$

Observación 1.5.1. Por $\bar{\Omega}$ denotaremos al cierre de Ω en la compactificación de \mathbb{R}^n . Consideraremos funciones f que se puedan extender a $\bar{\Omega}$ de manera que las órbitas de los puntos de $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ son órbitas del sistema dinámico generado por la extensión de f .

Según la definición que hemos dado, siempre se va a tener que $\omega_{\Phi}(\Gamma_x) \subset \omega_{\Phi}^*(\Gamma_x)$.

Análogamente tenemos:

Definición 1.5.2 (α -límite débil). Si x es un punto del espacio de fases Ω , llamaremos α -límite de la trayectoria Γ_x al conjunto:

$$\alpha_{\Phi}^*(\Gamma_x) = \{y \in \bar{\Omega} : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad t_n \rightarrow a_x \text{ con } \Phi_x(t_n) \rightarrow y\}$$

Notación 1.5.1. En los sistemas dinámicos del tipo introducidos en los ejemplos 1.2.2 y 1.2.1 denotaremos también estos conjuntos por $\omega_{\Phi}^*(\Gamma_x) = \omega_f^*(\Gamma_x) = \omega^*(\Gamma_x)$ y $\alpha_{\Phi}^*(\Gamma_x) = \alpha_f^*(\Gamma_x) = \alpha^*(\Gamma_x)$ para las versiones débiles y por $\omega_{\Phi}(\Gamma_x) = \omega_f(\Gamma_x) = \omega(\Gamma_x)$ y $\alpha_{\Phi}(\Gamma_x) = \alpha_f(\Gamma_x) = \alpha(\Gamma_x)$ para las que introducimos al principio.

Observación 1.5.2. Hacemos notar que si Γ es una órbita de un sistema dinámico derivado de una ecuación diferencial $(\Omega, \Phi, \mathbb{R})$ y Γ vive dentro de un compacto del espacio de fases Ω entonces los conceptos de ω -límite débil (respectivamente α -límite débil) y ω -límite (respectivamente α -límite) coinciden.

Vamos a enunciar aquí las propiedades de estos conjuntos, restringiéndonos ya a sistemas dinámicos derivados de sistemas de ecuaciones diferenciales. Algunas de ellas son iguales que las referentes a sus versiones débiles. No las demostraremos por ser una repetición.

Proposición 1.5.1. $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es no vacío compacto (como subconjunto de $\bar{\Omega}$), conexo y unión de órbitas.

Demostración: Igual que se hizo en la sección segunda se puede ver que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es cerrado y unión de órbitas. Por ser cerrado y $\bar{\Omega}$ compacto, se tiene que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es compacto como subconjunto de $\bar{\Omega}$.

Vamos a probar detenidamente ahora lo referente a la conexión. Supongamos que ω_{Φ}^* no fuera conexo, es decir $\omega_{\Phi}^*(\Gamma) = A \cup B$, para ciertos A y B cerrados disjuntos.

Denotemos por δ a la distancia de A a B . δ será un número real mayor que cero, por ser A y B cerrados y disjuntos. Debido a que A y B están dentro del ω -límite débil, podemos encontrar dos sucesiones, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $d(y(t_n), A) > \delta/2$ y $d(y(s_n), A) < \delta/2$.

Puesto que la función $t \rightarrow d(y(y), A)$ es continua, existirá otra sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n < v_n < s_n$ de manera que $d(y(v_n), A) = \delta/2$. Debido a que $d(A, B) = \delta$, tenemos que $d(y(v_n), B) \geq \delta/2$.

Ahora, de la sucesión $(y(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente hacia un c , que pertenecerá a $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. Por la continuidad de la función distancia, tendremos $d(c, A) = \delta/2$ y $d(c, B) \geq \delta/2$, lo cual contradice la hipótesis de que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ fuera no conexo. \square

En el resto de este capítulo restringiremos el abierto Ω a estar contenido en el plano. Dejaremos el estudio de dimensiones mayores para capítulos posteriores. Introducimos ahora el concepto de sección local, que será de gran utilidad en la demostración de varios de los teoremas de esta tesina.

Definición 1.5.3 (segmento). Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ con $a \neq b$, definimos el segmento abierto determinado por a y b como $(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in (0, 1)\}$. Igualmente el segmento cerrado determinado por a y b será $[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in [0, 1]\}$.

Definición 1.5.4 (sección local). Diremos que el segmento (a, b) es una sección local de f si para cada $z \in (a, b)$ el vector $f(z)$ es no nulo y no paralelo al subespacio generado por el vector que une a y b .

Observación 1.5.3. *Intuitivamente esto quiere decir que todos los vectores del campo en (a, b) apuntan a un mismo semiplano (de los dos en que la recta que contiene (a, b) divide a \mathbb{R}^2).*

El teorema que sigue a continuación es de gran importancia para estudiar el ω -límite de los sistemas dinámicos planos. Daremos la demostración por ser altamente

instructiva, en ella se construye un sistema dinámico discreto a partir del continuo que queremos estudiar. Esta técnica la introdujo Poincaré para dar claridad a los sistemas dinámicos continuos. El problema es que los sistemas dinámicos discretos son muchas veces más complicados de lo que sería deseable. Veremos esta asociación también en el capítulo siguiente en la demostración del teorema de Schwartz.

Teorema 1.5.1 (monotonía de corte con las secciones locales). *Sea $z : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva que satisface la ecuación $z' = f(z)$. Sean R una sección local de f y $t_1 < t_2 < t_3$ en I tales que $z(t_i) \in R$, $i = 1, 2, 3$. Entonces $z(t_2) \in [z(t_1), z(t_3)]$. Más aún, o bien $z(t_1) = z(t_2) = z(t_3)$ o bien $z(t_2) \in (z(t_1), z(t_3))$.*

Demostración: Fijemos de partida un segmento abierto $S \subset R$ tal que $\bar{S} \subset R$ pero $z(t_i) \in S$ para $i = 1, 2, 3$.

Primeramente vamos a hacer notar que el número de puntos $t \in [t_1, t_3]$ tales que $z(t)$ intersecta S es finito. La razón es que en caso contrario, y teniendo en cuenta la compacidad de $[t_1, t_3]$, podemos encontrar una sucesión $s_n \rightarrow s$ en $[t_1, t_3]$ (con todos los s_n distintos de s) de manera que $z(s_n) \in S$ para cada n . Así que $z(s) \in \bar{S} \subset R$ y

$$v_n = \frac{z(s_n) - z(s)}{s_n - s} \rightarrow z'(s) = f(z(s))$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Como todos los vectores v_n son paralelos a R , debe ocurrir que o bien $f(z(s))$ es nulo o bien es paralelo a R . Ambas eventualidades son imposibles por pertenecer $z(s)$ a la sección local R .

Sean $t_1 = u_0 < u_1 < \dots < u_m = t_3$ los tiempos en los que $z(t)$ corta a S . Nótese que $t_2 = u_{j_0}$ para algún j_0 . Para demostrar el teorema basta probar que o bien todos los $z(u_j)$ son iguales o bien todos los $z(u_j)$ son distintos dos a dos y $z(u_j) \in (z(u_{j-1}), z(u_{j+1}))$ para cada $j = 1, 2, \dots, m-1$.

Fijémonos primeramente en el trío $u_0 < u_1 < u_2$ y demostremos que o bien $z(u_0) = z(u_1) = z(u_2)$ o bien $z(u_1) \in (z(u_0), z(u_2))$.

Supongamos primero $z(u_0) \neq z(u_1)$. Como $z(t)$ no corta a S para ningún $t \in (u_0, u_1)$, $z(t)$ debe ser inyectiva sobre $[u_0, u_1]$, ya que, si no fuera inyectiva $z(t)$ sería periódica de periodo menor que $u_1 - u_0$ y por tanto $z(t)$ intersectaría a S para algún $t \in (u_0, u_1)$. Entonces $\Psi = [z(u_0), z(u_1)] \cup z([u_0, u_1])$ es una curva de Jordan.

Si E_1 y E_2 son los semiplanos en los que divide la recta que pasa por S a \mathbb{R}^2 , para cada $u \in S$ existe $\varepsilon_u > 0$ tal que $\Phi_u((0, \varepsilon_u)) \subset E_1$ y $\Phi_u((-\varepsilon_u, 0)) \subset E_2$ (o viceversa). En particular, existirá un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que o bien $z((u_0 - \varepsilon, u_0)) \subset INT\Psi$ y $z((u_1, u_1 + \varepsilon)) \subset EXT\Psi$ o bien $z((u_0 - \varepsilon, u_0)) \subset EXT\Psi$ y $z((u_1, u_1 + \varepsilon)) \subset INT\Psi$. Supondremos que estamos en el primer caso, pues el otro se estudia de manera análoga.

Mostramos ahora que $z(t) \in INT\Psi$ para todo $t > u_1$ donde $z(t)$ esté definida, de donde se tendrá $z(u_1) \in (z(u_0), z(u_2))$ ya que si $z(u_1)$ divide a S en dos segmentos,

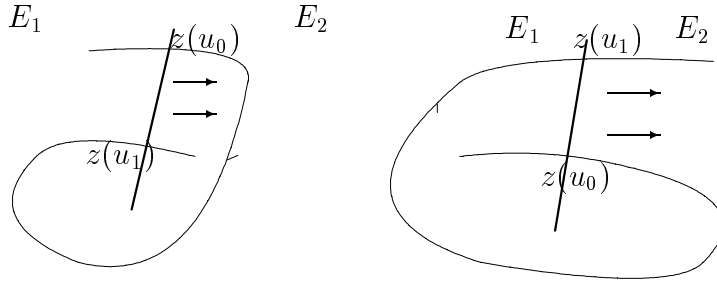


Figura 1.1: Los casos $z((u_0 - \varepsilon, u_0)) \subset EXT\Psi$ y $z((u_0 - \varepsilon, u_0)) \subset INT\Psi$

entonces el que contiene a $z(u_0)$ no interseca a $INT\Psi$. Probemos la primera afirmación de este párrafo. Supongamos que existe algún $c > u_1$ minimal tal que $z(c) \in \Psi$, $z(c) \notin (z(u_0), z(u_1))$, pues $z((c - \delta, c)) \subset EXT\Psi$ para algún $\delta > 0$ en contradicción con la definición de c ; pero si $z(c)$ está en $z([u_0, u_1])$ entonces su órbita asociada es periódica y existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $z((c - \varepsilon, c]) \subset z((u_0 - \varepsilon, u_1])$, contradiciéndose la definición de c .

Hasta ahora habíamos supuesto $z(u_0) \neq z(u_1)$; si $z(u_1) \neq z(u_2)$ se sigue de lo anterior que $z(u_1) \in (z(u_0), z(u_2))$; la alternativa restante es $z(u_0) = z(u_1) = z(u_2)$.

Razonando análogamente con los otros tríos de puntos se constata que o bien todos los $z(u_j)$ son iguales o bien todos los $z(u_j)$ son distintos dos a dos y $z(u_j) \in (z(u_{j-1}), z(u_{j+1}))$ para cada j , que es lo que queríamos ver. \square

Corolario 1.5.1. Si $\Gamma \cap \omega_{\Phi}^*(\Gamma) \neq \emptyset$, entonces Γ es una órbita periódica o un punto crítico.

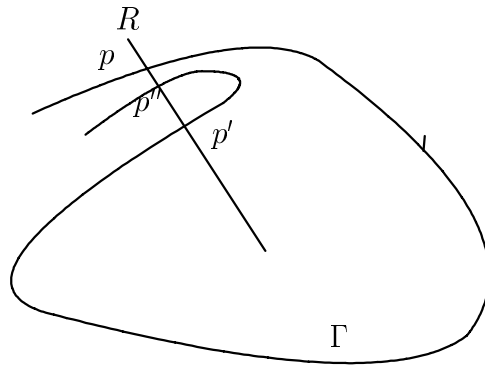


Figura 1.2: Interpretación geométrica de la prueba del corolario 1.5.1

Demostración: Supongamos que la órbita no es un punto crítico. Tomemos un punto cualquiera $p = y(t_0)$ de Γ y una transversal R que pase por dicho punto. Si la órbita no fuera periódica, contradiríamos la monotonía de los cortes con la transversal expresada en el teorema anterior.

Hagamos la demostración detenidamente suponiendo que la órbita no es periódica. Debido a que $p \in \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$, tenemos que la órbita Γ cortará a R en otro punto $p' = y(t_1)$ diferente de p con $t_1 > t_0$. Esto es una consecuencia del teorema del flujo tubular (véase [Ama90], páginas 252-254).

Como $\Gamma \cap \omega_{\Phi}^*(\Gamma) \neq \emptyset$ se tiene que $\Gamma \subset \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ por la proposición 1.5.1 y por tanto Γ cortará en $p'' = y(t_2)$ ($t_2 > t_1$) con $\text{dist}(p, p'') < \text{dist}(p', p'')$ con lo cual hemos roto la monotonía de los cortes con la transversal y por lo tanto Γ debe ser periódica. \square

Observación 1.5.4. *Este resultado no es cierto cuando no nos restringimos al plano, ya que según veremos, existe un sistema de ecuaciones definido sobre \mathbb{R}^3 que tiene una órbita cuyo ω -límite es todo \mathbb{R}^3 . Este resultado tampoco se da en las superficies compactas y conexas que no sean la esfera, el plano proyectivo y la botella de Klein. Pero habrá que darle un sentido a lo que es una ecuación diferencial definida sobre superficies antes de llegar a tales ejemplos.*

Corolario 1.5.2. *Si Ψ es una órbita no degenerada (es decir, diferente de un punto crítico) de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ entonces Ψ es un abierto de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$.*

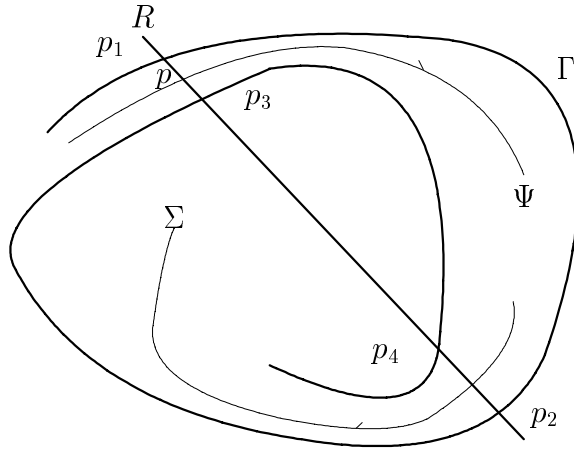


Figura 1.3: Situación geométrica de la prueba del corolario 1.5.2

Demostración: Si se tuviera que Ψ no es un abierto del ω -límite débil, existiría un punto p de Ψ que es punto de acumulación de otras órbitas del ω -límite débil de Γ . Consideramos una sección transversal por el punto p de Ψ . Utilizando la continuidad

del flujo y el teorema del flujo tubular se tiene que esta transversal es atravesada por una infinidad de veces por órbitas del ω -límite débil diferentes a Ψ , en particular por una Σ . Por pertenecer estas órbitas que atraviesan a la transversal a $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$, se tiene que Γ cortará a la transversal en puntos próximos a Ψ y a Σ para infinitos valores de tiempo, De donde se llega a la contradicción con el teorema 1.5.1. \square

El siguiente resultado nos dice que si un ω -límite débil contiene una órbita periódica, entonces el ω -límite débil se reduce a dicha órbita. Este resultado también es cierto en superficies como veremos en el siguiente capítulo.

Teorema 1.5.2. *Si $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ contiene una órbita periódica Ψ , entonces $\omega_{\Phi}^*(\Gamma) = \Psi$.*

Demostración: El corolario anterior nos dice que Ψ es abierta en $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. Además como Ψ es cerrada y $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es conexo, se tiene necesariamente $\Psi = \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. \square

Corolario 1.5.3. *Si Ψ es una órbita regular no periódica en $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$, entonces $\omega_{\Phi}^*(\Psi)$ sólo contiene puntos críticos.*

Demostración: La demostración es del mismo tipo que las anteriores. Consideremos que existe en $\omega_{\Phi}^*(\Psi)$ un punto regular u . Construimos una sección transversal a f en u , S . Puesto que $u \in \omega_{\Phi}^*(\Psi)$, Ψ corta a S en dos puntos A_1 y A_2 . Debido a que u , A_1 y A_2 están los tres en $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$, Γ cortará a S una infinidad de veces en puntos próximos a u , A_1 y A_2 , de donde contradecimos el teorema 1.5.1. \square

1.6 Descripción de los ω -límites en el plano. Teorema de Vinograd, Solncev y Poincaré-Bendixson

En este capítulo no demostraremos muchos de los resultados que enunciamos por su extensión. Nos remitimos a los artículos originales o libros donde hemos encontrado una demostración fácil de seguir. Empezamos el capítulo con el célebre teorema de Poincaré-Bendixson y haremos un seguimiento histórico de este problema desde que se suscitó hasta ahora.

Teorema 1.6.1 (Poincaré-Bendixson). *Supongamos que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ sólo tiene puntos regulares, entonces $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ consiste exactamente en una órbita periódica.*

Demostración: supongamos en primer lugar que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ contiene alguna órbita periódica, entonces por el corolario 1.5.2 se tiene que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es la órbita periódica.

Si por el contrario $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ sólo contiene órbitas regulares no periódicas, una de las cuales denotaremos por Σ , entonces según vimos en el corolario 1.5.3 $\omega_{\Phi}^*(\Sigma) \subset \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ contiene puntos críticos y entramos en contradicción con las hipótesis. Con lo cual hemos demostrado el teorema. \square

Con argumentos similares a los que acabamos de utilizar, basados en los corolarios de la sección anterior podemos probar la siguiente versión generalizada del teorema, que se encuentra en [Sot79], página 248:

Teorema 1.6.2 (Poincaré-Bendixson generalizado). *Supongamos que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma_x)$ contiene a lo sumo un número finito de puntos críticos. Entonces se verifica una de las siguientes alternativas:*

1. $\omega_{\Phi}^*(\Gamma_x)$ consiste en un único punto crítico.
2. $\omega_{\Phi}^*(\Gamma_x)$ es una órbita periódica.
3. $\omega_{\Phi}^*(\Gamma_x)$ es la unión de un conjunto finito de puntos críticos y de un conjunto de órbitas regulares (pueden ser un número infinito), con las correspondientes trayectorias definidas en todo \mathbb{R} y tendiendo a uno de los puntos críticos cuando t tiende hacia a_x y cuando t tiende a b_x (pueden ser puntos críticos diferentes).

En los dos últimos teoremas, hemos limitado la clasificación de los ω -límite débiles a aquellos que contienen un número finito de puntos críticos. El primero en plantearse el estudio de estos conjuntos con un número arbitrario de puntos críticos fue Solncev [Sol45] en 1945 y posteriormente Vinograd [Vin52] en 1952. En sus trabajos mostraron que el número de trayectorias regulares de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es numerable y para cada órbita Σ (dentro del ω -límite débil y que no sea una curva de Jordan) del sistema dinámico asociado a la función f existen dos componentes conexas C_1 y C_2 (eventualmente pueden ser las mismas) del conjunto de puntos críticos $S = \{p \in \bar{\Omega} : f(p) = 0\} \cap \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ tales que $\alpha_{\Phi}^*(\Sigma) \subset C_1$ y $\omega_f(\Sigma) \subset C_2$.

También se demuestra en los dos trabajos citados, que si $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es la unión de un punto crítico e infinitas órbitas, entonces el diámetro de estas órbitas tiende hacia cero. En el caso en el que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ fuera no acotado, el diámetro se mediría con cualquier métrica compatible con \mathbb{R}_{∞}^2 .

Vinograd y Solncev consiguieron encontrar una descripción bastante fiel del conjunto $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. Vamos a reproducir aquí el enunciado de sus teoremas, pero antes de ello introducimos la notación necesaria.

Sea $f \in D(\Omega) = \{g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : g \text{ genera una ecuación diferencial con existencia y unicidad de soluciones}\}$, para esta función denotaremos por $S(f)$ al conjunto de sus puntos singulares o críticos. Sea Γ una órbita del sistema diferencial asociado a f , que denotaremos por \mathcal{D}_f y será:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Pongamos ahora $S = S(f) \cap \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ y definamos en $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ la relación de equivalencia \sim_S definida como sigue:

$$x \sim_S y \text{ si y sólo si } x \text{ e } y \text{ están en la misma componente conexa de } S$$

Denotemos por $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)_S$ el espacio cociente inducido por la relación \sim_S y por \mathcal{R} al conjunto de las clases de equivalencia de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)_S$ que contienen puntos regulares de las órbitas de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. Se tiene entonces:

Teorema 1.6.3 (Solncev [Sol45]). *Supongamos que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es no acotado. Entonces existe una aplicación continua sobreyectiva $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \omega_{\Phi}^*(\Gamma)_S$ tal que $g|_{g^{-1}(\mathcal{R})} : g^{-1}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{R}$ es un homeomorfismo.*

Teorema 1.6.4 (Vinograd [Vin52]). *Supongamos que $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ es no acotado y que la componente no acotada de S contiene ∞ como su único punto. Entonces $\omega_{\Phi}^*(\Gamma) \setminus \{\infty\}$ posee una cantidad numerable de componentes. Además, si C es una de sus componentes y \mathcal{C} es el conjunto de clases de equivalencia de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)_S$ que contienen puntos de $C \cup \{\infty\}$, entonces existe una aplicación continua sobreyectiva $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $g|_{g^{-1}(C \cap \mathcal{R})} : g^{-1}(C \cap \mathcal{R}) \rightarrow C \cap \mathcal{R}$ es un homeomorfismo.*

Intuitivamente, estos teoremas nos dicen que podemos construir “camino cíclicos” en $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ visitando cada uno de los puntos no singulares una sola vez. Es de notar también que el teorema de Solncev contiene como caso particular al teorema 1.6.1 de Poincaré-Bendixson. Sin embargo dejan varias cuestiones abiertas como ponemos seguidamente de manifiesto.

Una de ellas es que no tenemos controlada de ninguna manera la orientación de las trayectorias de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. Por ejemplo, definamos $\varphi_1, \varphi_2 : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\varphi_1(t) = (-1 + \cos t, \sin t)$, $\varphi_2(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ y asociémosles las órbitas $\Gamma_i = \varphi_i((0, 2\pi))$ para $i = 1, 2$. Se puede ver fácilmente que no existe $f \in D(\mathbb{R}^2)$ para la que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}$ sea un conjunto ω -límite débil de \mathcal{D}_f y Γ_1, Γ_2 sean soluciones de \mathcal{D}_f con las orientaciones inducidas por φ_1 y φ_2 .

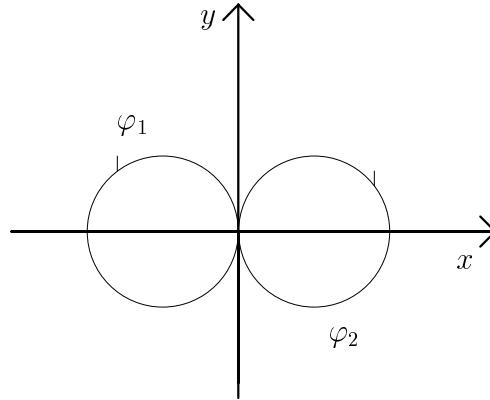
Sin embargo, la aplicación $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}$ definida por

$$g(\cos u, \sin u) = \begin{cases} \varphi_1(2u) & \text{si } 0 < u < \pi; \\ \varphi_2(2(u - \pi)) & \text{si } \pi < u < 2\pi; \\ 0 & \text{si } u = 0 \text{ o } u = 2\pi; \end{cases}$$

está en las condiciones del teorema de Solncev. Además, si orientamos una de las órbitas Γ_i con la orientación contraria a la que nos da φ_i , entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}$ si puede ser un conjunto ω -límite débil con esas orientaciones.

Por otra parte los dos teoremas anteriores no dicen nada sobre la estructura de los puntos singulares de $\omega_{\Phi}^*(\Gamma)$. Este problema fue resuelto por Vinograd dando una caracterización de los ω -límites débiles como subconjuntos de \mathbb{R}_{∞}^2 .

Teorema 1.6.5 (Vinograd [Vin52]). *Sea $A \subset \mathbb{R}_{\infty}^2$. Entonces existe $f \in D(\mathbb{R}^2)$ tal que $A = \omega_{\Phi}^*(\Gamma)$ para alguna trayectoria Γ de \mathcal{D}_f si y sólo si existe un abierto conexo simplemente conexo $O \subset \mathbb{R}_{\infty}^2$, $\emptyset \neq O \neq \mathbb{R}_{\infty}^2$, tal que $A = \text{Fr}O$.*



Este teorema resuelve el problema de caracterización de un ω -límite débil que sólo contenga puntos críticos. No obstante quedan los problemas de la orientación por un lado y por otro el de las propiedades de diferenciabilidad de f y en tercera instancia el problema del dominio de definición de f ya que, en la demostración de Vinograd se define f solamente en O y no tiene ninguna propiedad de diferenciabilidad, sólo debe pertenecer a $D(\Omega)$. Además construye una aplicación donde todos los puntos del ω -límite débil son críticos.

Estos problemas fueron totalmente resueltos en 1996 en el artículo [BJ96]. En lo que queda de capítulo vamos a introducir el resultado al que se llega en este artículo. En él encontramos ya una caracterización completa del conjunto ω -límite débil no poniendo restricción alguna, en el sentido que las aplicaciones f que se construyen no tienen toda la frontera de O formada por puntos críticos si no lo deseamos.

El teorema que vamos a enunciar nos da una condición necesaria y suficiente para que fijado el conjunto de curvas $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{i \in I}$ y el conjunto de puntos S exista una aplicación de clase C^k del plano sobre sí mismo tal que, las curvas de \mathcal{G} sean trayectorias regulares y los puntos de S sean puntos singulares del sistema $x' = f(x)$ de manera que $S \cup \bigcup_i \Gamma_i$ sea el ω -límite de una trayectoria del sistema. El rango de valores de k es $0, 1, \dots, \infty$, teniendo en cuenta que por $f \in C^0$ entenderemos una aplicación continua localmente lipsthtiziana.

Introducimos primeramente unas definiciones que serán necesarias para el enunciado del teorema. En las siguientes definiciones denotaremos por Nv al vector normal de $v = (v_1, v_2)$, es decir $Nv = (-v_2, v_1)$.

Definición 1.6.1 (orientaciones de una curva). Dada una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua e inyectiva vamos a definir en el conjunto de parametrizaciones inyectivas $\mathcal{P}(\alpha) = \{\beta : I \rightarrow \alpha(I) : \beta \text{ homeomorfismo}\}$ la relación de equivalencia \sim_α siguiente:

$$\beta \sim_\alpha \gamma \text{ si y solo si } \beta \circ \gamma^{-1} \text{ es creciente}$$

Se puede comprobar que \sim_α es una relación de equivalencia y que posee sólo dos

clases, o_1 y o_2 , cada una de ellas llamada una orientación de la imagen de la curva $\alpha(I)$. A la determinada por la parametrización α se le denota por $[\alpha]$.

Definición 1.6.2 (conjunto realizable). Sea $1 \leq k \leq +\infty$, sea $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_i$ una familia de pares de curvas disjuntas parametrizadas por una aplicación φ_i de clase k , junto con una orientación sobre la curva de manera que $o_i = [\varphi_i]$. Sea $S \subset \mathbb{R}_\infty^2$ un conjunto disjunto de los Γ_i y denotemos $\Omega = S \cup (\cup_i \Gamma_i)$. Diremos que (\mathcal{G}, S) es un conjunto realizable de clase k si existe un abierto conexo, simplemente conexo O de \mathbb{R}_∞^2 , $\emptyset \neq O \neq \mathbb{R}_\infty^2$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\Omega = \text{Fr}O$.
2. Cada Γ_i es abierto en Ω y está incluido en $\text{Fr}(\mathbb{R}_\infty^2 \setminus (O \cup \Omega))$.
3. (\mathcal{G}, S) tiene una orientación compatible respecto a O . Esto quiere decir que si $x = \varphi_i(t) \in \Gamma_i$, $y = \varphi_j(t') \in \Gamma_j$ y ε es un real positivo arbitrario suficientemente pequeño, entonces o bien $x + \varepsilon N\varphi'_i(t)$, $y + \varepsilon N\varphi'_j(t')$ pertenecen los dos a O , o bien, $x - \varepsilon N\varphi'_i(t)$, $y - \varepsilon N\varphi'_j(t')$ están los dos en O .

Teorema 1.6.6 (estructura de los ω -límites en \mathbb{R}^2). Sea $1 \leq k \leq +\infty$. Entonces se tiene:

1. Sea $f \in C^{k-1}(E)$ y sea Γ una trayectoria de \mathcal{D}_f . Entonces existe una familia $\{\Gamma_i\}_i$ de trayectorias de \mathcal{D}_f y un conjunto $S \subset S(f)$ tales que si $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, [\varphi_i])\}_i$, con cada φ_i una solución de \mathcal{D}_f asociada a Γ_i , entonces (\mathcal{G}, S) es un conjunto realizable de clase k .
2. Sea (\mathcal{G}, S) un conjunto realizable de clase k con $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_i$. Entonces existe una aplicación $f \in C^{k-1}(\mathbb{R}^2)$ y una trayectoria Γ de \mathcal{D}_f tales que, para todo i , Γ_i es una trayectoria de \mathcal{D}_f con $o_i = [\varphi_i]$ para cada solución φ_i asociada a Γ_i , $S \subset S(f)$ y $\omega_\Phi^*(\Gamma) = S \cup (\cup_i \Gamma_i)$.

Vamos ahora a dibujar algunos ejemplos de conjuntos que pueden ser ω -límites débiles en el plano para clarificar la información que aporta el teorema. Estos conjuntos no van a tener por qué ser compactos ya que el plano no lo es y por lo tanto podrán ser infinitos como es el caso de la figura 1.6.

En la figura 1.6 ponemos un ejemplo gráfico de una frontera de un abierto simplemente conexo que queda excluido de la posibilidad de ser un ω -límite débil porque las orientaciones no satisfacen la condición número 3 de conjunto k -realizable. Por último, en la figura 1.7 ponemos de nuevo un ω -límite débil en trazo grueso y una órbita que lo tendría como conjunto ω -límite.

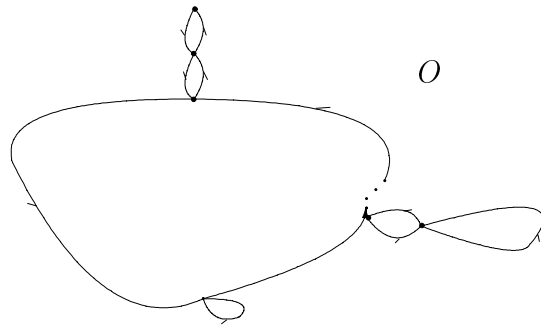


Figura 1.4: Un ω -límite según el teorema 1.6.6.

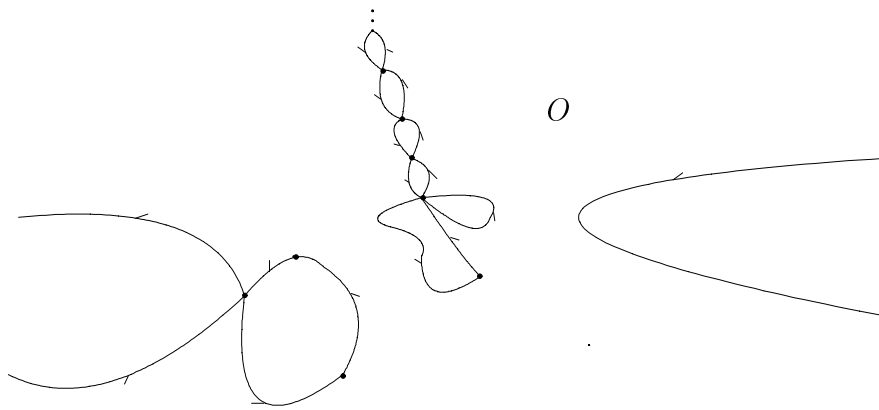


Figura 1.5: Un ω -límite previsto por el teorema 1.6.6 en \mathbb{R}^2 .

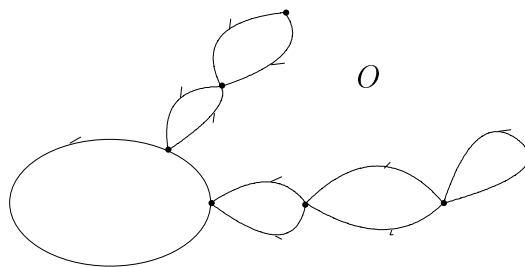


Figura 1.6: Un subconjunto de \mathbb{R}^2 que no puede ser ω -límite con las orientaciones marcadas.

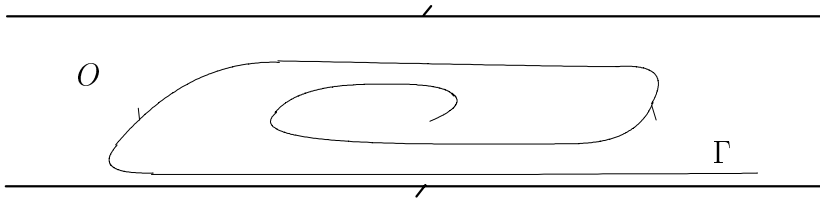


Figura 1.7: Un subconjunto de \mathbb{R}^2 ω -límite con una órbita Γ que lo genera.

Capítulo 2

El teorema de Poincaré-Bendixson en superficies, teorema de Schwartz.

2.1 Introducción.

En este capítulo tratamos de hacer una recopilación histórica del estudio que existe sobre los sistemas dinámicos en superficies en temas próximos a los ω -límites, en particular se trata de desvelar la estructura de los conjuntos minimales para obtener propiedades asintóticas del flujo. Para ello habrá que introducir de antemano la definición de sistema dinámico en una superficie.

El estudio de este tema varía mucho a lo que se ha hecho en el plano ya que, a pesar de pretenderse un objetivo similar las técnicas utilizables varían mucho porque, en general, en una superficie no podremos utilizar el teorema de la curva de Jordan. Todo esto sugiere que los resultados que se esperan puede que sean muy diferentes a los que obtuvimos en el plano. En efecto, para que el lector se dé cuenta de que la estructura de estos sistemas es bastante diferente, diremos, sin entrar en ningún tipo de justificación por el momento que el toro puede ser el ω -límite de una órbita de un sistema dinámico definido sobre él.

Esta última afirmación nos da idea de que nos enfrentamos a algo esencialmente diferente, ya que de la afirmación anterior se sigue que existen conjuntos ω -límites en el toro con interior no vacío, mientras que el teorema de Vinograd nos asegura que en el plano no puede haber ω -límites con interior no vacío.

En cuanto a la revisión histórica de este problema, podemos citar como básico y germen de estas cuestiones al artículo [Den32], si bien no nos ocuparemos en

este capítulo del contenido de este trabajo. Básicamente, lo que se estudia allí son los sistemas de ecuaciones diferenciales definidos sobre el toro y el comportamiento de sus órbitas. Como consecuencia de ese estudio se saca que el toro puede ser un conjunto ω -límite, sin tener ningún subconjunto propio invariante por el flujo (conjunto minimal). La búsqueda de nuevos conjuntos minimales y el estudio de los mismos condujeron al teorema de Schwartz [Sch63] que da cuerpo a este capítulo y que afirma que los únicos conjuntos minimales que pueden existir en superficies compactas y conexas son puntos críticos, órbitas periódicas o todo el toro. Este teorema había sido demostrado anteriormente por Felix Hass [Haa53, Haa54], sin embargo Peixoto encontró una errata en la demostración propuesta por Hass según puso de manifiesto en [Pei62].

Toda esta introducción queda un poco vaga, pues aún no se ha introducido la definición de sistema dinámico en una superficie, así que damos ya paso a las definiciones básicas.

2.2 Definiciones básicas.

En esta sección vamos a introducir los conceptos de superficie diferenciable y atlas, conceptos que vienen definidos en todos los textos base de geometría diferencial. Para la elaboración de esta sección hemos utilizado [Car76] y [Tho79].

Utilizando estos conceptos hemos introducido el concepto de ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales sobre una superficie, estudiando algunas de sus propiedades. Esta información está extraída del capítulo 1, páginas 39-53 de [AL73]. A partir de ahora, denotaremos por $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^n$ a una superficie, esto quiere decir que para todo punto $x \in \mathcal{M}^2$ existe un entorno U_x de x , un entorno V_y de \mathbb{R}^2 y una aplicación $\varphi : V_y \rightarrow U_x$ tal que, $\varphi(y) = x$ y φ es un homeomorfismo diferenciable con diferencial inyectiva.

Definición 2.2.1 (atlas). Un atlas de clase C^r de $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de homeomorfismos diferenciables $\{\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde V_λ es un abierto de \mathbb{R}^2 y U_λ es un abierto de \mathcal{M}^2 . Estas aplicaciones cumplen las propiedades adicionales siguientes:

1. si $U_\lambda \cap U_{\lambda'} \neq \emptyset$, entonces, la aplicación $\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda|_{\varphi_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap U_{\lambda'})}$ es un difeomorfismo de clase C^r .
2. $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \mathcal{M}^2$.
3. $d\varphi_\lambda(z)$ es inyectiva para todo $z \in V_\lambda$.

Definición 2.2.2 (superficie). Una superficie, diremos que es de clase C^k si tiene un atlas definido sobre ella de clase C^k .

Definición 2.2.3 (sistema diferencial). Sea \mathcal{M}^2 una superficie de clase \mathcal{C}^k con atlas de clase \mathcal{C}^k $\{\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Un sistema diferencial sobre \mathcal{M}^2 es un conjunto de ecuaciones diferenciales definidas en los abiertos del plano V_λ , que denotaremos como sigue:

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} = A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \\ \frac{dv_\lambda}{dt} = B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \end{cases} \quad (S_\lambda)$$

donde (u_λ, v_λ) es un punto de V_λ . Además los sistemas $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ están relacionados entre ellos de la manera que indicamos a continuación.

Si los entornos U_λ y $U_{\lambda'}$ tienen intersección no vacía, las ecuaciones diferenciales (S_λ) se pueden transformar en $(S_{\lambda'})$ a través de la aplicación cambio de cartas $\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda|_{\varphi_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap U_{\lambda'})}$. Explícitamente, el sistema:

$$\begin{cases} \frac{du_{\lambda'}}{dt} = A_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \\ \frac{dv_{\lambda'}}{dt} = B_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \end{cases} \quad (S_{\lambda'})$$

restringido a $U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ se puede obtener del sistema S_λ como sigue: para $(x, y, z) \in U_\lambda \cap U_{\lambda'}$, denotando $f = (\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda)_1$ y $g = (\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda)_2$ se tiene pues,

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{-1}(x, y, z) &= (u_\lambda, v_\lambda), \quad \varphi_{\lambda'}^{-1}(x, y, z) = (u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \\ u_{\lambda'} &= f(u_\lambda, v_\lambda), \quad v_{\lambda'} = g(u_\lambda, v_\lambda) \end{aligned}$$

y las fórmulas siguientes relacionan $A_\lambda, A_{\lambda'}, B_\lambda, B_{\lambda'}$:

$$\begin{aligned} A_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) &= \frac{df}{du}(u_\lambda, v_\lambda)A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) + \frac{df}{dv}(u_\lambda, v_\lambda)B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \\ B_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) &= \frac{dg}{du}(u_\lambda, v_\lambda)A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) + \frac{dg}{dv}(u_\lambda, v_\lambda)B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \end{aligned}$$

Recíprocamente, el sistema S_λ se puede obtener, de igual modo, partiendo de $S_{\lambda'}$ y utilizando $\varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_{\lambda'}$.

Supondremos A_λ, B_λ continuas y localmente lipschitzianas.

Definición 2.2.4 (sistema diferenciable de clase C^r). Dada una superficie de clase C^k , diremos que un sistema diferencial definido sobre ella es de clase C^r con $r \leq k$ si y sólo si todos los sistemas S_λ son de clase C^r .

A pesar de que en la introducción se haya dicho que los sistemas dinámicos en lo referente a los ω -límites de sus órbitas tienen un comportamiento bastante diferente a los sistemas dinámicos planos cabe preguntarse si, al menos como en el plano, en las superficies les podremos asociar un campo vectorial, vamos a ver que sí. Seguiremos trabajando con la superficie y el atlas utilizados antes y nos centramos en una de las cartas $\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$ y en el sistema S_λ asociado:

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} = A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \\ \frac{dv_\lambda}{dt} = B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \end{cases} \quad (S_\lambda)$$

A cada punto $P = \varphi_\lambda(u_\lambda, v_\lambda)$ de U_λ le vamos a asociar un vector del siguiente modo:

$$w(P) = \frac{d\varphi_\lambda}{du}(u_\lambda, v_\lambda)A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) + \frac{d\varphi_\lambda}{dv}(u_\lambda, v_\lambda)B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda)$$

de manera que $w(P)$ es una combinación lineal de $\frac{d\varphi_\lambda}{du}$ y de $\frac{d\varphi_\lambda}{dv}$ y por tanto, ese vector pertenece al plano tangente a \mathcal{M}^2 en P (recordemos que el plano tangente en un punto P es el subespacio de \mathbb{R}^n generado por $\frac{d\varphi_\lambda}{du}$ y $\frac{d\varphi_\lambda}{dv}$ y es independiente de la carta elegida según se expone en [Car76] sección 2.4)

Habrá que ver que esta asignación $P \rightarrow w(P)$ es independiente de la carta elegida, es decir, que si consideramos otra carta λ' que contenga a P , se tiene que ver que $w(P) = w_{\lambda'}(P) = \frac{d\varphi_{\lambda'}}{du}A_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv}B_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'})$.

Veamos esto último:

$$\begin{aligned} w_{\lambda'}(P) &= \frac{d\varphi_{\lambda'}}{du}A_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv}B_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \\ &= \frac{d\varphi_{\lambda'}}{du} \left(\frac{df}{du}A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) + \frac{df}{dv}B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \right) \\ &\quad + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv} \left(\frac{dg}{du}A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) + \frac{dg}{dv}B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \right) \\ &= \left(\frac{d\varphi_{\lambda'}}{du} \frac{df}{du} + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv} \frac{dg}{du} \right) A_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \\ &\quad + \left(\frac{d\varphi_{\lambda'}}{du} \frac{df}{dv} + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv} \frac{dg}{dv} \right) B_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) \end{aligned}$$

Habremos conseguido demostrar que $w(P) = w_{\lambda'}(P)$ si vemos que:

$$\left(\frac{d\varphi_{\lambda'}}{du} \frac{df}{du} + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv} \frac{dg}{du} \right) = \frac{d\varphi_\lambda}{du}$$

y

$$\left(\frac{d\varphi_{\lambda'}}{du} \frac{df}{dv} + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv} \frac{dg}{dv} \right) = \frac{d\varphi_\lambda}{dv}$$

Los c culos son tediosos, pero mostraremos que la primera igualdad se da cambiando f por $(\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda)_1$ y g por $(\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda)_2$.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\varphi_{\lambda'}}{du} \frac{df}{du} + \frac{d\varphi_{\lambda'}}{dv} \frac{dg}{du} \\
&= d\varphi_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'})(1, 0) \frac{df}{du} + d\varphi_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'})(0, 1) \frac{dg}{du} \\
&= d\varphi_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \left(\frac{df}{du}(u_{\lambda}, v_{\lambda}), \frac{dg}{du}(u_{\lambda}, v_{\lambda}) \right) \\
&= d\varphi_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \left(d(\pi_1 \circ \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda})(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0), \right. \\
&\quad \left. d(\pi_2 \circ \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda})(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0) \right) \\
&= d\varphi_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \left(\pi_1 \circ d(\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda})(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0), \right. \\
&\quad \left. \pi_2 \circ d(\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda})(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0) \right) \\
&= d\varphi_{\lambda'}(u_{\lambda'}, v_{\lambda'}) \left(d(\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda})(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0) \right) \\
&= d(\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda})(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0) \\
&= d\varphi_{\lambda}(u_{\lambda}, v_{\lambda})(1, 0) = \frac{d\varphi_{\lambda}}{du_{\lambda}}(u_{\lambda}, v_{\lambda})
\end{aligned}$$

Concluimos pues, que $w(P)$ es independiente de la carta elegida para su definición y es un vector perteneciente al plano tangente a \mathcal{M}^2 .

Hasta ahora hemos considerado un sistema diferencial en la superficie \mathcal{M}^2 como un conjunto de sistemas de ecuaciones homogéneos, los cuales están ligados por estrechas relaciones que nos han permitido definir un campo de vectores asociado al sistema.

Igual que en el plano, sería deseable formalizar las nociones de órbitas y soluciones. Esto no va a ser tarea difícil, para cada sistema S_{λ} consideraremos las soluciones del sistema en el abierto V_{λ} del plano y luego diremos que una solución local en \mathcal{M}^2 será $\varphi_{\lambda}(\gamma(t))$ donde $\gamma(t)$ es una solución de S_{λ} . Llamaremos órbita local de S a $\varphi_{\lambda}(C)$ donde C es una órbita de S_{λ} . Estas órbitas y soluciones locales están limitadas al abierto U_{λ} y no pueden salir de ahí por ser imágenes de φ_{λ} . Aspiramos a que una órbita y una trayectoria pueda vagar libremente por toda la superficie.

Observación 2.2.1 (interpretación de las soluciones). *Aunque falta por formalizar un poco la noción de solución del sistema diferencial S , la definición que acabamos de introducir de solución local no sería más que una curva en \mathbb{R}^n que tendría por vectores tangentes en cada uno de sus puntos P al vector $w(P)$ antes introducido. Vamos a formalizar estas nociones de órbitas y soluciones no teniendo que restringirnos a las cartas.*

Definición 2.2.5 (solución del sistema S). Diremos que $F(t) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{M}^2$ es una solución del sistema dinámico S si tenemos que en cada carta λ , $F(t) = \varphi_{\lambda}((u_{\lambda}(t), v_{\lambda}(t)))$, siendo $u_{\lambda}(t)$ y $v_{\lambda}(t)$ soluciones del sistema diferencial plano S_{λ} en V_{λ} .

Definición 2.2.6 (solución maximal del sistema S). Diremos que $F(t)$ es una solución maximal de S si no existe otra función vectorial $\tilde{F}(t)$ definida en un intervalo más grande que (α, β) tal que satisfaga la condición de la definición anterior y coincida con F en (α, β) .

Hemos definido las soluciones maximales en intervalos abiertos. En principio no hay motivo para pensar que no pueda haber un intervalo cerrado que extienda a (α, β) y la solución F , sin embargo los teoremas de extensión (ver [NOR95], sección 4.5) aseguran que las soluciones maximales están definidas en intervalos abiertos, a no ser que la solución tienda a salirse del dominio de definición de la ecuación diferencial. Puesto que trabajaremos en superficies compactas y con sistemas diferenciales definidos en toda la superficie, los intervalos de definición serán abiertos.

Definición 2.2.7 (órbita del sistema S). $O \subset \mathcal{M}^2$ será una órbita si existe una trayectoria $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{M}^2$ tal que $O = F(\alpha, \beta)$ y O será maximal si dicha F es maximal.

Notación 2.2.1. Para cada punto p de \mathcal{M}^2 denotaremos por $\Gamma(p)$ y Γ_p a la órbita de S que contiene a p .

Teorema 2.2.1 (unicidad de soluciones). Para todo punto P_0 en \mathcal{M}^2 y para todo t_0 , existe una única trayectoria maximal $F(t)$ satisfaciendo la condición inicial $P_0 = F(t_0)$.

Demostración: es una fácil aplicación de la unicidad en los sistemas S_λ , unido a las relaciones que los ligan entre ellos y a la existencia de soluciones maximales en cada uno de los S_λ . \square

Teorema 2.2.2. Toda trayectoria maximal en una superficie compacta está definida desde $-\infty$ a $+\infty$.

Observación 2.2.2. Esta es una primera diferencia significativa respecto a los sistemas dinámicos en el plano derivados de ecuaciones diferenciales, que en general, no tienen que estar definidos en todo \mathbb{R} .

Demostración del teorema: Razonaremos por reducción al absurdo. Si $F(t)$ fuera la trayectoria maximal y no estuviera definida en $(-\infty, +\infty)$, ella estaría definida para $t \in (\tau'_0, \tau_0)$ y supongamos $\tau_0 < +\infty$. Sea C la órbita asociada a F .

Consideremos una sucesión $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de términos menores que t_0 y que tiendan hacia t_0 y designemos por P_i a las imágenes de los t_i por F . Por ser \mathcal{M}^2 compacta, entonces o bien $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ o una subsucesión suya converge hacia un punto P de \mathcal{M}^2 . Supondremos sin pérdida de generalidad que $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge.

Tomemos una carta que contenga a P $\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$, consideremos ahora los puntos P_i^* de U_λ que son la imagen inversa mediante φ_λ de los P_i (no tienen por

qué estar bien definidos todos los P_i^* , pero sí lo están a partir de un cierto i_0 como es fácil ver). A cada P_i^* lo denotaremos por sus coordenadas $(u_\lambda^i, v_\lambda^i)$.

No es restrictivo suponer que V_λ es una bola, por ejemplo $V_\lambda = B(P^*, 1)$. A partir de un cierto i_1 , todos los P_i^* estarán dentro de $\bar{B}(P^*, 1/2)$. Aplicando los teoremas de prolongación de soluciones para el plano, la solución del sistema S_λ con condición inicial $\gamma(t_0) = K \in \bar{B}(P^*, 1/2)$ la tendremos definida, al menos, en el intervalo $(t_0 - \eta_0, t_0 + \eta_0)$ para un $\eta_0 > 0$. Como $t_n \rightarrow \tau_0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, podemos elegir n_0 tal que $|t_n - t_0| < \eta_0/2$ para todo n superior a n_0 .

Consideremos la solución del sistema S_λ :

$$u_\lambda = u_\lambda(t - t_n, u_\lambda^n, v_\lambda^n)$$

$$v_\lambda = v_\lambda(t - t_n, u_\lambda^n, v_\lambda^n)$$

Esta solución estará definida, al menos, en $t_n \leq t \leq \tau_0 + \eta_0/2$ (tomando un $n \geq n_0$ fijo).

Ahora consideramos $\varphi_\lambda(u_\lambda(t), v_\lambda(t))$, que será una trayectoria de S en \mathcal{M}^2 . Esta solución coincide con F y está definida para $t_n \leq t \leq \tau_0 + \eta_0/2$. Por lo tanto hemos contradicho la suposición de que F está definida sólo para valores de t menores que τ_0 . \square

Hemos probado ya el primer resultado interesante que nos dice que no todo lo que pasa en los sistemas dinámicos en el plano va a ser traducible a superficies. El siguiente paso es el teorema de Schwartz del cual se deduce que todo ω -límite carente de puntos críticos sobre una superficie compacta \mathcal{M}^2 es o una órbita periódica o bien toda la superficie y en este caso \mathcal{M}^2 es el toro. Debemos utilizar la maquinaria geométrica y en especial, el teorema de Gauss-Bonnet.

Definición 2.2.8 (flujo). El flujo asociado al sistema S , siendo \mathcal{M}^2 compacta, es una aplicación $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$, tal que para todo x de \mathcal{M}^2 $\Psi_x(t) = \Psi(t, x)$ es la trayectoria de S que pasa por x cuando $t = 0$.

Proposición 2.2.1 (propiedades del flujo). *El flujo asociado a S satisface las siguientes propiedades:*

1. $\Psi(0, p) = p \quad \forall p \in \mathcal{M}^2$.
2. $\Psi(t, \Psi(s, p)) = \Psi(t + s, p) \quad \forall p \in \mathcal{M}^2, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$
3. Si S es de clase C^r (es decir, $\forall \lambda, A_\lambda$ y B_λ son de clase C^r) entonces Ψ es de clase C^r . (Aquí la diferenciabilidad se entiende en términos geométricos)
4. Si la superficie está en \mathbb{R}^3 , existe $\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^r tal que $\Phi|_{\mathbb{R} \times \mathcal{M}^2} = \Psi$ (S de clase C^r).

5. Fijado t , definimos $\Psi_t : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ tal que $\Psi_t(x) = \Psi(t, x)$. Entonces Ψ_t es un difeomorfismo de clase C^r .

Demostración de (1): este apartado es trivial según la definición de flujo dada anteriormente.

Para los siguientes apartados utilizaremos el siguiente hecho: si $(u_\lambda(t, u, v), v_\lambda(t, u, v)) = f_\lambda(t, u, v)$ es el flujo asociado a S_λ , entonces $\varphi_\lambda(u_\lambda(t, u, v), v_\lambda(t, u, v)) = \Psi(t, \varphi_\lambda(u, v))$. Conviene observar que esta propiedad no es suficiente y con esto queremos decir que no siempre se va a dar que el valor $\Psi(t, \varphi_\lambda(u, v))$ esté dentro de la imagen de la carta φ_λ , hecho que complicará un poco las demostraciones.

Demostración de (3): veamos que para todo punto $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2$ se tiene que Ψ es de clase C^r . $\Psi(t_0, p_0)$ pertenece a uno de los U_λ , así que $\Psi(t_0, p_0) = \varphi_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1}(\Psi(t_0, p_0))$ y denotaremos por comodidad $(u_0, v_0) = \varphi_\lambda^{-1}(\Psi(t_0, p_0))$. Utilizando las propiedades del flujo en el plano se tiene que $f_\lambda(t - t_0, u_0, v_0)$ está definido en un entorno W_λ de (t_0, u_0, v_0) y que f_λ es de clase C^r (sentido analítico).

Ahora tenemos que $\Psi(t_0, p_0) = \varphi_\lambda \circ f_\lambda(t_0, u_0, v_0)$ y $\Psi(t, p) = \varphi_\lambda \circ f_\lambda(t, \varphi_\lambda^{-1}(\Psi(t_0, p_0)))$ en un entorno $I \times Z_\lambda$ de (t_0, p_0) que satisfaga $\varphi_\lambda^{-1}(I \times Z_\lambda) \subset W_\lambda$. De donde se deduce la continuidad de Ψ utilizando las continuidades de φ_λ , f_λ y φ_λ^{-1} . La propiedad de clase C^r la explicamos seguidamente.

Para ver que $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ es de clase C^r hay que ver que para cualesquiera cartas φ_λ y $\varphi_{\lambda'}$ se tiene que si la composición $\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \Psi \circ (id \times \varphi_\lambda)$ está bien definida entonces es de clase C^r . Veámoslo, para ello suponemos que $\Psi(t_0, p_0)$ cae dentro de la imagen de la carta λ' y demostremos que en un entorno de (t_0, p_0) la composición anterior es de clase C^r . Debido a la continuidad de Ψ podemos elegir un entorno $U_{(t_0, p_0)} \subset U_\lambda$ tal que $\Psi(U_{(t_0, p_0)}) \subset U_{\lambda'}$ y veamos que la composición anterior restringida a $(id \times \varphi_\lambda)^{-1}(U_{(t_0, p_0)})$ es de clase C^r .

Para un par $(t, \varphi_{\lambda'}^{-1}(p)) = (t, p^*)$ de $(id \times \varphi_\lambda)^{-1}(U_{(t_0, p_0)})$ se tiene

$$\begin{aligned} & \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \Psi \circ (id \times \varphi_\lambda)(t, p^*) \\ &= \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \Psi(t - t_0, \Psi(t_0, p)) = \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_{\lambda'} \circ f_{\lambda'}(t - t_0, \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \Psi(t_0, p)) \\ &= f_{\lambda'}(t - t_0, \varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \Psi(t_0, p)) \end{aligned}$$

Puesto que $f_{\lambda'}$ es de clase C^r hemos reducido el problema a demostrar que la aplicación $\Psi_{t_0}(p) = \Psi(t_0, p)$ es de clase C^r . Tomemos un punto p_0 y veamos que la aplicación anterior es de clase C^r . Aparecen dos casos posibles:

1. p_0 y $\Psi_{t_0}(p_0)$ se encuentran en un mismo U_λ . La demostración en este caso no tiene ninguna dificultad ya que $\varphi_\lambda^{-1} \circ \Psi_{t_0}(\varphi_\lambda(u, v)) = f_\lambda(u, v)$ que es de clase C^r .

2. p_0 y $\Psi_{t_0}(p_0)$ no están simultáneamente dentro de la misma carta. Aquí la prueba deriva de la constatación de la existencia de un número finito de reales $0 = t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,n} = t_0$ tales que las parejas $\Psi_{t_{0,i}}(p_0)$ y $\Psi_{t_{0,i+1}}(p_0)$ se encuentran dentro de una misma carta para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Podremos elegir entornos adecuados de $\Psi_{t_{0,i}}(p_0)$ y $\Psi_{t_{0,i+1}}(p_0)$ tales que, razonando como en el apartado anterior, la aplicación $\Psi_{t_{0,i+1}-t_{0,i}}$ es de clase C^r .

El resultado sigue de constatar que Ψ_{t_0} en un entorno de p_0 es la composición de aplicaciones de clase C^r , en particular:

$$\Psi_{t_0} = \Psi_{t_{0,1}-t_0} \circ \Psi_{t_{0,2}-t_{0,1}} \circ \dots \circ \Psi_{t_{0,n}-t_{0,n-1}}$$

Demostración de (2): queremos demostrar la igualdad $\Psi(t, \Psi(s, p)) = \Psi(t+s, p)$ para cualquier valor de t y s . Fijemos para ello un s y veamos que se da la igualdad para todo valor de t . Si $t = 0$ la igualdad se da utilizando (1), observemos ahora que $\Psi(t+s, p)$ vista como función de t es la solución de S que pasa por $\Psi(s, p)$ cuando $t = 0$ y por la unicidad de dicha trayectoria se tiene necesariamente $\Psi(t+s, p) = \Psi(t, \Psi(s, p))$.

Demostración de (5): es trivial pues la inversa de Ψ_t es Ψ_{-t} utilizando (2).

Demostración de (4): utilizaremos para demostrar este apartado el teorema de Whitney, pero antes de enunciarlo introduciremos un poco de notación.

Si $\beta \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ y f es una aplicación suficientemente diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^n , denotamos $\beta! = \beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$, $y^\beta = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n}$ y $D_\beta f(y) = \frac{\delta^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}}{\delta x_1^{\beta_1} \delta x_2^{\beta_2} \dots \delta x_n^{\beta_n}} f(y)$, denotaremos por $D_0 f$ a f .

Teorema 2.2.3 (Whitney). *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado de \mathbb{R}^n . Las siguientes afirmaciones son válidas:*

Sea $f^0 : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación Lipschitziana y acotada. Entonces existe una aplicación lipschitziana y acotada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = f^0(x)$ para todo x de C .

2. *Sea $1 \leq |\beta| \leq \infty$ y sean $f^\beta : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicaciones arbitrarias para cada $\beta \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$ con $0 \leq |\beta| \leq k$. Sea $F^{\gamma,r} : C \times C \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por*

$$F^{\gamma,r}(x, y) = \frac{f^\gamma(y) - \sum_{0 \leq |\beta| \leq r} \frac{f^{\gamma+\beta}(x)(y-x)^\beta}{\beta!}}{\|y-x\|^r}$$

si $x \neq y$, y

$$F^{\gamma,r}(x, x) = 0$$

en el otro caso, para cada $\gamma \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$ y $0 \leq r < \infty$ con $|\gamma| + r \leq k$. Si todas las aplicaciones $F^{\gamma,r}$ son continuas entonces existe una aplicación de clase C^k $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $D_\beta f = f^\beta$ para todo $\beta \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$, $0 \leq |\beta| \leq k$.

Referencias: la prueba del primer apartado, que es una extensión posterior al teorema de Whitney se puede encontrar en [Ste70], página 177, teorema 4. En cuanto al segundo nos remitimos al artículo original de Whitney [Whi34]. \square

Nuestro cerrado será la superficie \mathcal{M}^2 sobre la que tenemos definido la función vectorial w que queremos definir globalmente sobre el espacio \mathbb{R}^3 . Para ello necesitamos dar las definiciones de las funciones las funciones f^β , que no serán más que una extensión de la función w en un pequeño entorno de la superficie, pasamos ya a exponer la manera de hacer esta extensión.

Para cada punto p de \mathcal{M}^2 consideramos la recta normal a \mathcal{M}^2 pasando por p , esta recta puede intersectar a otra recta normal a la superficie en otro punto q . Sin embargo, usando la compacidad de \mathcal{M}^2 podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de tal manera que para cualquier punto p de la superficie la recta normal a \mathcal{M}^2 , parametrizada por $p + N(p)t$, no interseca a ninguna otra recta normal $q + N(q)t$ para valores del parámetro t con valor absoluto menor que ε y $q \in \mathcal{M}^2$.

Definimos ahora el campo \tilde{w} en el abierto $W = \{p + tN(p) \mid |t| < \varepsilon \text{ y } p \in \mathcal{M}^2\}$ como sigue:

$$\tilde{w}(p + tN(p)) = w(p)$$

Consideramos ahora el cerrado $W_0 = \{p + tN(p) \mid |t| \leq \varepsilon_0 < \varepsilon \text{ y } p \in \mathcal{M}^2\} \subset W$ y definimos $f^0(p) = \tilde{w}|_{W_0}(p)$ y $f^\beta(p) = D_\beta \tilde{w}|_{W_0}(p)$ sobre él.

Las definiciones de las funciones hechas en el párrafo anterior satisfacen las hipótesis del teorema de Whitney que nos da una ampliación de w a todo \mathbb{R}^n , ampliación que denotaremos por \tilde{w} . Considerando el flujo asociado al sistema de ecuaciones diferenciales

$$z'(t) = \tilde{w}(z(t))$$

obtenemos el flujo Φ del enunciado. \square

Observación 2.2.3. *En la proposición anterior hemos visto que un flujo de clase C^r sobre una superficie cerrada se puede ver como la restricción de un flujo de clase C^r en \mathbb{R}^3 , para lo cual se ha utilizado el teorema de Whitney y hemos necesitado que \mathcal{M}^2 sea cerrada. Cabría preguntarse si en otras superficies (no cerradas) esto se puede probar usando otras técnicas. La respuesta es no y damos a continuación un contraejemplo que zanja el problema.*

Vamos a considerar como superficie el cilindro sobre la curva $\alpha(t) = (t \cos \frac{1}{t}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t})$ $t \in (0, +\infty)$.

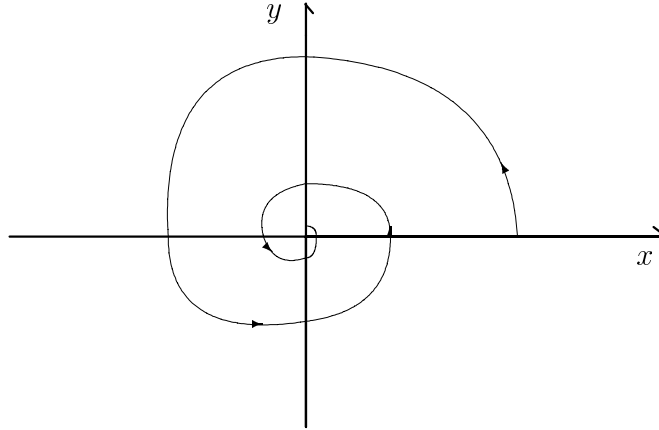


Figura 2.1: Curva sobre la que consideramos el cilindro para construir el contraejemplo.

Por lo tanto la superficie va a venir parametrizada por $\tilde{\alpha}(u, v) = (u \cos \frac{1}{u}, u \operatorname{sen} \frac{1}{u}, v)$ con $(u, v) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Definimos el campo de vectores tangentes a la superficie $w(u \cos \frac{1}{u}, u \operatorname{sen} \frac{1}{u}, v) = (u \cos \frac{1}{u} - \operatorname{sen} \frac{1}{u}, u \operatorname{sen} \frac{1}{u} + \cos \frac{1}{u}, 0)$. Este campo no se puede extender a un campo $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo, ya que

$$\lim_{u \rightarrow 0, u \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}} w(u \cos \frac{1}{u}, u \operatorname{sen} \frac{1}{u}, v) = (1, 0, 0)$$

y por otra parte,

$$\lim_{u \rightarrow 0, u \in (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}} w(u \cos \frac{1}{u}, u \operatorname{sen} \frac{1}{u}, v) = (-1, 0, 0)$$

2.3 Espacios recubridores. Levantamientos.

Introducimos ahora los conceptos de espacio recubridor y de levantamiento de un flujo a su espacio al espacio recubridor. Daremos también algunos resultados que necesitaremos tanto en este capítulo como en el siguiente para probar el teorema de Knesser.

Para desarrollar esta sección he seguido las apartados 5.6 y 5.10 de [Car76] donde se introducen estos conceptos detalladamente. También han sido de utilidad para resultados específicos el capítulo 8 de [Mun75] referente a espacios recubridores y

al grupo fundamental y el libro de Fulton [Ful95] de topología algebraica en sus capítulos 8 y 16.

Otros libros de interés relacionados con este tema que dan una visión más clara de las superficies que estamos manejando son [Moi77], [Wal68] y [GP74]. Empezamos ya con la definición de recubrimiento.

Definición 2.3.1 (recubrimiento). Sean B y \tilde{B} dos espacios topológicos. Decimos que (\tilde{B}, p) es un recubrimiento de B o que p es una aplicación recubridora si:

1. $p : \tilde{B} \rightarrow B$ es una aplicación.
2. p es continua y $p(\tilde{B}) = B$.
3. Cada punto $q \in B$ tiene un entorno U_q en B (que se denominará entorno distinguido de q) tal que

$$p^{-1}(U) = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$$

donde los V_{α} son conjuntos abiertos disjuntos dos a dos tal que la restricción de p a V_{α} es un homeomorfismo de V_{α} sobre U .

Este concepto se introduce para facilitar la tarea del estudio de flujos. Si tenemos un espacio topológico del que no conocemos bien su estructura topológica y que tiene un recubridor más asequible, lo que haremos será “pasar” el flujo al recubridor y estudiarlo allí. Para formalizar este paso tenemos que dar el concepto de levantamiento:

Definición 2.3.2 (levantamiento). Supongamos que (\tilde{B}, p) es un recubrimiento de B y supongamos que tenemos una curva $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ continua. Si existe

$$\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$$

con $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, se dice que $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α con origen en $\tilde{\alpha}(0) \in \tilde{B}$. Resumiendo, si el diagrama es conmutativo, entonces $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α .

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{B} \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \pi \\ [0, l] & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Con la notación precedente introducimos una primera proposición que el lector puede encontrar en la página 376 de [Car76] y que aquí no demostraremos.

Proposición 2.3.1. Sean $p : \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ una curva en B y $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ un punto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Entonces existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ de α con origen en \tilde{p}_0 , es decir, con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$.

Utilizando esta proposición vamos a levantar un flujo de un espacio a su recubridor. La manera de realizarlo la da el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1 (levantamiento al recubridor de un flujo). *Sea (\tilde{X}, \tilde{p}) un recubridor del espacio X y sea*

$$\Psi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

un flujo definido sobre X siendo Ψ continua. Entonces existe un único flujo

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{R} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

tal que $\tilde{p} \circ \tilde{\Psi}(t, \tilde{x}) = \Psi(t, \tilde{p}(x))$ y además $\tilde{p}|_{\tilde{\Psi}(\mathbb{R} \times \tilde{X})}$ es un homeomorfismo local. Resumiendo, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \tilde{X} \\ id \times \tilde{p} \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{\Psi} & X \end{array}$$

Demostración: Para definir $\tilde{\Psi}(t, \tilde{x})$ consideramos la curva $\Psi_{\tilde{p}(\tilde{x})} : [0, t] \rightarrow X$ y la levantamos con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ a \tilde{X} (únicamente, según [Car76], página 376). Denotaremos al levantamiento por la letra $\tilde{\alpha}$. Tenemos que ver que $\tilde{\Psi}$ es continua y cumple $\tilde{\Psi}(t + s, x) = \tilde{\Psi}(t, \tilde{\Psi}(s, x))$.

Para la continuidad hay que mostrar que para cualquier abierto \tilde{V} de \tilde{X} , $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{V})$ es un abierto de $\mathbb{R} \times \tilde{X}$.

Descomponemos $\tilde{V} = \bigcup_{q \in Q} \tilde{V}_q$, con los \tilde{V}_q abiertos tales que $\tilde{p}|_{\tilde{V}_q}$ son homeomorfismos. Ahora $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{V}) = \bigcup_{q \in Q} (id \times \tilde{p})^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \tilde{p}(\tilde{V}_q)$ y como $\tilde{p}^{-1}|_{\tilde{p}(\tilde{V}_q)}$, Ψ y $id \times \tilde{p}$ son continuas, se tiene que $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{V})$ es un abierto.

Veamos ahora que $\tilde{\Psi}(t + s, x) = \tilde{\Psi}(t, \tilde{\Psi}(s, x))$. Por la definición de $\tilde{\Psi}$ tenemos que $\tilde{\Psi}(t + s, x) = \beta(t + s)$ donde β es el levantamiento de $\Psi_{\tilde{p}(x)}|_{[0, t+s]}$ con condición inicial $\beta(0) = x$.

Por otra parte $\tilde{\Psi}(s, x) = \beta^*(s)$ donde β^* es el levantamiento de $\Psi_{\tilde{p}(x)}|_{[0, s]}$. Debido a la unicidad del levantamiento se tiene que $\beta^* = \beta|_{[0, s]}$.

$\tilde{\Psi}(t, \beta^*(s))$ será $\beta^{**}(t)$ donde β^{**} es el levantamiento de $\Psi_{\tilde{p}(\beta^*(s))}$ y por la unicidad del levantamiento se tiene que $\beta^{**} = \beta|_{[t, s+t]}$ de donde llegamos a $\tilde{\Psi}(t + s, x) = \tilde{\Psi}(t, \tilde{\Psi}(s, x))$.

La condición $\tilde{p} \circ \tilde{\Psi}(t, \tilde{x}) = \Psi(t, \tilde{p}(x))$ se satisface trivialmente por definición de $\tilde{\Psi}$. Y por último $\tilde{p}|_{\tilde{\Psi}(\mathbb{R} \times \tilde{X})}$ es un homeomorfismo local por serlo \tilde{p} . \square

Proposición 2.3.2. *En los flujos antes definidos, \tilde{x} es un punto fijo o singular de $\tilde{\Psi}$ si y sólo si $\tilde{p}(\tilde{x})$ lo es de Ψ .*

Demostración: si \tilde{x} es un punto singular de $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}(t, \tilde{x}) = \tilde{x}$ para todo t de \mathbb{R} , así que $\tilde{p} \circ \tilde{\Psi}(t, \tilde{x}) = \tilde{p}(\tilde{x}) = \Psi(t, \tilde{p}(\tilde{x}))$ y $\tilde{p}(\tilde{x})$ es un punto singular de Ψ .

Recíprocamente, si $\tilde{p}(\tilde{x})$ es un punto fijo o singular de Ψ , tenemos que $\Psi(t, \tilde{p}(\tilde{x})) = \tilde{p}(\tilde{x})$ para todo t de \mathbb{R} .

$\tilde{p} \circ \tilde{\Psi}(t, \tilde{x}) = \Psi(t, \tilde{p}(\tilde{x})) = \tilde{p}(\tilde{x})$ y puesto que $\tilde{p}|_{\tilde{\Psi}(\mathbb{R} \times \tilde{X})}$ es un homeomorfismo local, tenemos que $\tilde{\Psi}(t, \tilde{x}) = \tilde{x}$ y por tanto \tilde{x} es un punto fijo de $\tilde{\Psi}$. Es más, por ser homeomorfismo local \tilde{p} , para cada $\tilde{x}' \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{x})$ es un punto fijo de $\tilde{\Psi}$. \square

Hasta ahora nos hemos limitado a propiedades topológicas de los recubridores, pero en este trabajo juega un papel esencial la diferenciabilidad y nos gustaría que si el flujo Ψ que levantamos proviene de una ecuación diferencial, es decir tiene un campo de vectores asociado, que el $\tilde{\Psi}$ también lo tenga. Esto se podrá conseguir cuando tengamos \tilde{p} un recubridor que sea localmente un difeomorfismo.

Proposición 2.3.3. *Supongamos que la aplicación recubridora \tilde{p} es un difeomorfismo local de clase C^1 y que el flujo que tenemos sobre X proviene de un sistema diferencial de clase C^1 con campo de vectores asociado W . Tomemos el flujo $\tilde{\Psi}$ definido como en el teorema anterior. Entonces $\tilde{\Psi}$ es un flujo que proviene de un sistema diferencial de clase C^1 y al campo de vectores lo denotaremos por \tilde{W} .*

Demostración: cada una de las curvas $\tilde{\Psi}_{\tilde{x}}$ será diferenciable por serlo \tilde{p} . Definimos el campo vectorial $\tilde{W}(\tilde{x}) = \tilde{\Psi}'_{\tilde{x}}(0) = d\tilde{p}^{-1}|_{V_{\tilde{x}}}(\Psi'_{\tilde{p}(\tilde{x})}(0))(\Psi'_{\tilde{p}(\tilde{x})}(0))$ donde $V_{\tilde{x}}$ es un entorno distinguido de \tilde{x} .

Para ver que \tilde{W} es continuo en \tilde{x} escogemos un entorno $V_{\tilde{x}}$ de \tilde{x} difeomorfo por \tilde{p} a un entorno $V_{\tilde{p}(\tilde{x})}$ de $\tilde{p}(\tilde{x})$. En estos entornos se tiene que $\tilde{W}(\tilde{x}) = d\tilde{p}^{-1}|_{V_{\tilde{p}(\tilde{x})}}(\tilde{p}(\tilde{x}))(W(\tilde{p}(\tilde{x})))$ con lo cual \tilde{W} es continua para cualquier punto \tilde{x} de \tilde{X} . \square

Nos limitamos ahora a presentar unos resultados sobre recubridores orientables de superficies no orientables. Este resultado se puede ver en [Car76] en las páginas 440 y 441 y en [Ful95] en la página 219 y las siguientes.

Teorema 2.3.2 (recubrimiento orientable doble). *Sea S una superficie conexa y no orientable. Para cada $p \in S$ se considera el conjunto \mathcal{O}_p de las dos orientaciones posibles de $T_p(S)$. Sea*

$$\tilde{S} = \{(p, O_p) : p \in S \text{ y } O_p \in \mathcal{O}_p\}$$

Dotemos a \tilde{S} de una estructura diferenciable utilizando la de S $\{U_\alpha, x_\alpha : U_\alpha \rightarrow S\}_{\alpha \in \Gamma}$. Definimos:

$$\tilde{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \tilde{S}$$

como

$$\tilde{x}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = \left(x_\alpha(u_\alpha, v_\alpha), \left[\frac{d}{du_\alpha}, \frac{d}{dv_\alpha} \right] \right)$$

donde $(u_\alpha, v_\alpha) \in U_\alpha$ y $\left[\frac{d}{du_\alpha}, \frac{d}{dv_\alpha} \right]$ es el elemento de \mathcal{O}_p determinado por la base $\left\{ \frac{d}{du_\alpha}, \frac{d}{dv_\alpha} \right\}$.

Con estas definiciones se tiene:

1. $\{(U_\alpha, \tilde{x}_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable en \tilde{S} con la que \tilde{S} es orientable.
2. La aplicación $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ definida por $\pi(p, O_p)p$ es diferenciable y sobreyectiva. Además, cada punto $p \in S$ tiene un entorno U tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$ donde V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de \tilde{S} tales que la restricción de π a cada V_i es un difeomorfismo sobre U .

Para las secciones siguientes será de gran utilidad disponer de un recubridor orientable de la botella de Klein, dicho recubridor será el toro. Esta afirmación se puede ver demostrada en [Car76] página 434 y nos ocuparemos de ella en el capítulo siguiente dedicado al estudio de flujos sobre la botella de Klein, en particular se trata de la proposición 3.2.1. Por otra parte necesitaremos saber que el toro no recubre con dos hojas a ninguna otra superficie compacta, conexa y no orientable. Este hecho se deduce de un resultado que enunciaremos a continuación.

Teorema 2.3.3. *Si \tilde{X} y X son dos superficies de manera que existe una aplicación recubridora $p : \tilde{X} \rightarrow X$ de n hojas entonces $\chi(\tilde{X}) = n\chi(X)$, donde $\chi(X)$ denota la característica de Euler-Poincaré de X .*

Referencia: la prueba de este resultado se puede seguir en el libro [Kin93], página 167, teorema 7.19. \square

Corolario 2.3.1. • *El toro es el único recubridor orientable de dos hojas de la botella de Klein.*

- *La única superficie no orientable que puede recubrir el toro con dos hojas es la botella de Klein.*

Demostración: hemos hecho notar antes que el toro recubre a la botella de Klein, por el teorema tenemos entonces que el toro es la única superficie para el recubrimiento de dos hojas de la botella.

La característica de Euler-Poincaré del toro determina que la característica del espacio recubierto por dos hojas tiene característica de Euler 0 y puesto que dos superficies compactas no orientables de la misma característica son isomorfas, se tiene que el toro sólo recubre a la superficie no orientable de característica 0, esto es, la botella de Klein. \square

Por último introducimos un lema que será de utilidad posteriormente al levantar flujos, nos remitimos para la prueba a [ST88b].

Lema 2.3.1. *Supongamos que $p : X \rightarrow Y$ es un recubridor y Ψ y flujo sobre X levantado de un flujo Φ sobre Y . Sea x un punto de X cuya semiórbita positiva se queda dentro de un compacto de X entonces $p(\omega(\Gamma_x)) = \omega(p(\Gamma_{p(x)}))$.*

Hacemos notar que sin la hipótesis de que la semiórbita Γ_x^+ se encuentre dentro de un compacto es posible que $\omega(\Gamma_x) = \emptyset$ y sin embargo $\omega(\Gamma_{p(x)}) \neq \emptyset$. Como ejemplo se puede poner el flujo irracional del toro y su levantamiento a \mathbb{C} .

2.4 El teorema de Schwartz.

Pasamos ahora a abordar uno de los pocos resultados importantes que se han hecho referentes a ω -límites en superficies, se trata del teorema de Schwartz cuya prueba original se puede seguir en el artículo [Sch63]. Versiones más débiles de este teorema se remontan a 1932 y fueron presentadas por el francés Arnold Denjoy en [Den32], sin embargo allí la única superficie que es objeto de estudio es el toro.

En cuanto al teorema de Schwartz, a pesar de suponer una generalización respecto a los resultados de Denjoy sigue siendo bastante limitado, pues su estudio se fija sólo en superficies compactas y conexas dejando a un lado todas las superficies abiertas y cerradas no acotadas. Otra restricción más analítica que geométrica en este caso es el orden de diferenciabilidad de las funciones que entran en juego: la validez está condicionada a flujos de clase C^2 . En el aspecto analítico el resultado de Denjoy es mucho más vistoso ya que se ocupa también de los flujos continuos.

Otras pruebas del teorema que aquí vamos a desarrollar detalladamente pueden seguirse en los libros [Sot79, Har82]. Sin más preámbulos pasamos a la exposición.

A partir de ahora y durante lo que resta de capítulo \mathcal{M}^2 será una superficie compacta y conexa de, al menos, clase C^2 .

Definición 2.4.1 (conjunto minimal). Sea $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ un flujo sobre \mathcal{M}^2 derivado de un sistema diferencial tal y como consideramos en la definición 2.2.8. Un subconjunto $\mu \subset \mathcal{M}^2$ se dice minimal para Ψ si $\mu \neq \emptyset$, es compacto e invariante por el flujo. Esto último quiere decir que $\Psi_t(\mu) = \mu$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Además se debe cumplir adicionalmente que μ no tiene subconjuntos propios con estas propiedades.

Definición 2.4.2 (conjunto minimal trivial). Un conjunto minimal se dice trivial si es un punto singular, una órbita periódica o el toro.

Observación 2.4.1. *Veremos en el capítulo 4 que efectivamente el toro es un conjunto minimal.*

Teorema 2.4.1 (Schwartz). *Un flujo de clase C^2 en una superficie \mathcal{M}^2 compacta, conexa y de clase al menos C^2 no puede poseer un conjunto minimal μ distinto de un punto singular o una órbita periódica a menos que $\mathcal{M}^2 = \mathbb{T}^2 = \mu$. (\mathbb{T}^2 denota el toro).*

Antes de empezar la prueba del teorema demostraremos unos lemas que serán necesarios para hacer la prueba más liviana. Además vamos a enunciar el importante teorema del flujo tubular en superficies, que será de gran utilidad para justificar ciertos pasos de la demostración del teorema de Schwartz.

Definición 2.4.3 (sección local). Sea Ψ un flujo sobre \mathcal{M}^2 , I se dice que es una sección si existe una curva diferenciable inyectiva sobre la superficie $\alpha : J \rightarrow I \subset \mathcal{M}^2$, siendo J un intervalo cerrado de \mathbb{R} . Además exigimos que $\alpha'(t)$ y $w(\alpha(t))$ sean linealmente independientes para todo t de J y que α sea una biyección sobre J .

Recordamos que por $w(\alpha(t))$ denotamos al vector asociado en el punto $\alpha(t)$ al sistema diferencial que define al flujo Ψ .

Teorema 2.4.2 (flujo tubular en superficies). *Supongamos definido un flujo Ψ de clase C^r sobre una superficie \mathcal{M}^2 y denotemos por w al campo vectorial asociado a dicho flujo. Sea p un punto de la superficie tal que $w(p) \neq 0$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ y sea X_C el campo vectorial sobre C definido por $X_C(x) = (1, 0)$.*

Bajo estas hipótesis, existe un difeomorfismo de clase C^r de un entorno de p sobre C $h : V_p \rightarrow C$ que lleva soluciones de la ecuación generada por X_C a soluciones del sistema diferencial que genera el flujo Ψ . Además el difeomorfismo h conserva las orientaciones de las órbitas.

Referencias: la demostración de este hecho se puede seguir en [PM82], página 40, teorema 1.1. □

Lema 2.4.1. *Sea $\mu \in \mathcal{M}^2$ un conjunto minimal para un flujo Ψ de clase C^1 sobre \mathcal{M}^2 . Si μ tiene interior vacío y es no trivial entonces para toda sección transversal I , $I \cap \mu$ es un conjunto compacto sin puntos aislados. Además, el conjunto $I \cap \mu$ tiene interior vacío.*

Demostración: veamos en primer lugar que cada órbita γ de μ es densa en μ . Eli-
jamos una de estas órbitas, γ . Tenemos que ver por tanto que cada punto $p \in \mu$
está en la clausura de γ , si p estuviera en γ es claro que p pertenece a la clausura
de γ . Supongamos que existiera $p \notin \gamma$ y que p no es de acumulación de γ , es decir,
existe U_p tal que $\gamma \cap U_p = \emptyset$. Utilizando esto vamos a demostrar que ningún punto
perteneciente a la trayectoria que pasa por p es de acumulación de γ .

Sea $q \in \Gamma(p)$ (trayectoria que pasa por p). Se tiene $\Psi(0, p) = p$ y para un cierto
 t_0 $\Psi(t_0, p) = q$. Utilizando que Ψ_{t_0} es un difeomorfismo tenemos $\Psi_{t_0}(U_p) = U_q$ y
 $\Psi_{t_0}(\gamma \cap U_p) = \gamma \cap U_q = \emptyset$. Así que q no pertenece a la clausura de γ .

Tomemos ahora $N = \{m \in \mu \text{ tales que } m \text{ no es de acumulación de } \gamma\}$ $N \neq \emptyset$ ya que $\Gamma(p) \subset N$ y además N es invariante por ser unión de órbitas. Consideramos $\mu' = \mu \setminus N$. Se ve que μ' es invariante y cerrado ya que si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de μ' que tiene como límite a p , entonces vamos a mostrar que p está en μ' . Esto es fácil de ver ya que, para cada p_n podemos encontrar q_n en γ con la condición $\|p_n - q_n\| < 1/n$ y en particular $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también tenderá hacia p , lo cual nos da la pertenencia de p a μ' (conjunto de puntos de acumulación de la órbita γ).

Así que μ' será compacto y por tanto contradecimos la minimalidad de μ , esta contradicción viene de suponer que existe una órbita no densa en μ . Por tanto, toda órbita es densa en μ .

Observación 2.4.2. *Bajo las hipótesis anteriores no sólo se puede probar que una órbita de μ es densa en μ sino que si α es una parametrización de una órbita de μ , entonces para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha(t_0, +\infty)$ y $\alpha(-\infty, t_0)$ son densas en μ .*

Procedemos ahora a la demostración propia del lema. $I \cap \mu$ es compacto debido a la compacidad de I y de μ . Por otra parte, que todo punto de $I \cap \mu$ no sea aislado es una consecuencia de que toda semiórbita de μ sea densa en μ y del teorema del flujo tubular en superficies.

Por último $I \cap \mu$ tiene interior vacío como subconjunto de μ ya que μ también tiene interior vacío. Pero además $I \cap \mu$ tiene interior vacío como subconjunto de I , ya que, si no tuviera interior vacío contendría un abierto de I , A . Consideramos $\tilde{A} = \Psi((0, t_0), A) \subset \mu$. Por el teorema del flujo tubular se tiene que para una elección de A y t_0 suficientemente pequeña, \tilde{A} es un abierto de μ , lo cual es una contradicción con que μ tenga interior vacío. Por lo tanto debemos admitir que $I \cap \mu$ debe tener interior vacío en I . \square

Lema 2.4.2. *En las mismas condiciones que el teorema anterior, si μ tiene interior no vacío, entonces $\mu = \mathcal{M}^2$ y \mathcal{M}^2 es el toro.*

Prueba: como μ es cerrado, si vemos que también es abierto, utilizando la conexión de \mathcal{M}^2 tendremos que $\mu = \mathcal{M}^2$.

Veamos que μ es abierto. Como μ tiene interior no vacío existe un abierto U contenido en μ . Lo que queremos demostrar es que para todo punto $p \in \mu$ podemos construir un abierto U_p tal que $p \in U_p \subset \mu$.

La órbita $\Gamma(p)$ debe cortar a U ya que en la prueba del lema anterior se vio que toda órbita γ de μ es densa en μ , por lo tanto existe un t_0 tal que $\Psi(t_0, p) \in U$. Por otro lado, $\Psi_{-t_0}(U)$ es un abierto de μ (por ser μ invariante y Ψ_{-t_0} difeomorfismo) que contiene a p . Así que tomamos $U_p = \Psi_{-t_0}(U)$ y hemos probado que μ es abierto, de donde se tiene que $\mu = \mathcal{M}^2$.

Debido a que $\mu = \mathcal{M}^2$ nos encontramos ante un flujo sin singularidades, es decir $w(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{M}^2$ (compacta y conexa) y tenemos un campo tangente definido en toda la superficie que no se anula. Usando el teorema de Poincaré-Hopf vamos a ver que en el caso de que \mathcal{M}^2 sea orientable es necesariamente el toro. Posteriormente veremos el caso no orientable.

Definición 2.4.4 (índice de una singularidad). Supongamos que tenemos definido sobre la superficie \mathcal{M}^2 un campo de vectores w . Si $w(p) \neq 0$ entonces $i(w, p) = 0$.

Sin embargo para definir el índice del campo de vectores en un punto q tal que $w(q) \neq 0$ es necesario tomar una curva de Jordan simple y diferenciable $\beta : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ que encierre a q en una región J_q homeomorfa a un disco del plano. Una vez definida β tomamos una función continua $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f(\beta(t)) = \text{ángulo}(w(\beta(t)), \beta'(t))$. Con toda esta notación se tiene que $i(w, q)$ es el entero $\frac{f(\beta(1)) - f(\beta(0))}{2\pi}$.

En principio los índices así introducidos no tienen por qué estar bien definidos, podrían depender de f y de la curva β pero se demuestra en [Tho79], lema 5, página 202 que no hay tal dependencia.

Teorema 2.4.3 (Poincaré-Hopf). *Sea S una superficie orientable, compacta y conexa sobre la que tenemos definido un campo vectorial diferenciable tangente X que se anula solamente en un número finito de puntos p_1, \dots, p_n entonces $\sum_{k=1}^n i(X, p_k) = \chi(S)$ (característica de Euler-Poincaré).*

Referencias: nos remitimos a [Tho79], capítulo 21 y [Car76], página 283. □

Según la definición 2.4.4, en nuestro caso como no tenemos singularidades la suma de índices es cero y por tanto $\chi(\mathcal{M}^2) = 0$ y la superficie ha de ser un toro.

Para el caso de superficies no orientables, utilizaremos el recubridor orientable doble de la superficie que hemos introducido en la sección anterior. El flujo que tenemos sobre la superficie no orientable \mathcal{M}^2 sin singularidades vamos a levantarlo a un flujo de la misma clase al reubridor orientable doble \mathcal{B}^2 .

El levantamiento de Ψ nos da un flujo $\tilde{\Psi}$ sobre \mathcal{B}^2 al que se le puede asociar un campo de vectores $\tilde{w}(p) = \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}(t, p)|_{t=0}$ de manera que al no tener $\tilde{\Psi}$ puntos críticos (por la proposición 2.3.2) el campo \tilde{w} tampoco los tendrá. Así que $\chi(\tilde{\mathcal{B}}^2) = 0$ y por el corolario 2.3.1 se tiene que \mathcal{M}^2 es la botella de Klein.

Pero si \mathcal{M}^2 es la botella de Klein hay un teorema de Knesser que demostraremos en el capítulo próximo que asegura que un flujo sin singularidades sobre la botella de Klein ha de poseer una órbita periódica, por lo tanto μ no puede ser toda la botella de Klein. □

Demostración del teorema de Schwartz: razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que Ψ admite un conjunto minimal de interior vacío y que no sea ni un punto singular ni una órbita cerrada.

Tomemos una sección local $i : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{M}^2$ de clase C^2 tal que $i(-1)$ e $i(1)$ no están en μ y $i(0) \in \mu$. La existencia de esta sección se justifica por no tener μ singularidades y por tanto, si tomamos $p \in \mu$ existe un entorno de p V_p en el que w no se anula por ser w de clase C^2 . Por otro lado podemos elegir $i'(0)$ y $w(i(0))$ linealmente independientes y por la continuidad de i y w existe un entorno $[-\varepsilon, \varepsilon]$ tal que w e i' son linealmente independientes en $I \cap V_p$.

En el lema 2.4.1 de la página 45 vimos que $I \cap \mu$ tiene interior vacío en I , así que podemos elegir los extremos de I tales que $i(-1)$ y $i(1)$ no estén en μ .

Vamos a definir ahora un sistema de coordenadas en torno al punto $i(0)$ como sigue. Para $\sigma > 0$, $1 > r > 0$, construimos la aplicación:

$$\delta : (-\sigma, \sigma) \times (-r, +r) \rightarrow U_{i(0)}$$

que actúa de la siguiente manera sobre un par (t, s) :

$$\delta(t, s) = \Psi(t, i(s))$$

Observación 2.4.3. *En principio $U_{i(0)} = \delta((-\sigma, \sigma) \times (-r, r))$ no tiene por qué ser un conjunto abierto, posteriormente veremos que δ es una aplicación abierta (en concreto homeomorfismo) y por tanto $U_{i(0)}$ ha de ser un abierto.*

δ es diferenciable de clase C^2 y además si escogemos r y σ suficientemente pequeños vamos a justificar que es un difeomorfismo ya que δ es inyectiva (con σ pequeño). Por otro lado para ver que $\delta|_{(-\sigma, \sigma) \times (-r, r)}$ es abierta se puede utilizar el teorema del flujo tubular que enunciamos en la página 45. Así que δ^{-1} lo podemos tomar como sistema de coordenadas.

No es restrictivo suponer que $U_{i(0)}$ contiene a toda la sección transversal, lo cual nos evitará meter una notación más tediosa. Ahora vamos a definir la aplicación de Poincaré π que nos dará para cada p de un determinado abierto del intervalo $[-1, 1]$ la imagen inversa por i del punto de retorno de la órbita $\Gamma(i(p))$ a I , formalmente: sea $W = \{x \in [-1, 1] \text{ tales que existe } t > 0 \text{ con } \Psi(t, i(x)) \in I\}$. W es abierto en I por la continuidad de Ψ . Para cada x de W definimos $t(x) = \min\{t : \Psi(t, i(x)) \in I \quad t > 0\}$. Definimos ahora $V = i^{-1}(W) \subset (-1, 1)$, V es abierto por ser la antiimagen de un abierto, en cuanto a π :

$$\pi : V \rightarrow (-1, +1)$$

con

$$\pi(v) = i^{-1}[\Psi(t(i(v)), i(v))] \text{ para todo } v \text{ de } V$$

Queremos ver que π así definida es de clase C^2 , para ello definimos la aplicación $\pi_2 : U_{i(0)} \rightarrow (-r, r)$ que será tomar la segunda coordenada de la aplicación δ^{-1} . Utilizando esto tenemos que para $|v - v_0|$ suficientemente pequeño $\pi(v) = \pi_2[\delta^{-1}[\Psi(t(i(v_0)), i(v))]]$, así que π es composición de funciones de clase C^2 y esto conlleva que π es de clase C^2 .

Ya tenemos definida la aplicación de Poincaré en una superficie asociada a un sistema dinámico en un segmento, nuestro problema se va a reducir al estudio de esta aplicación.

Por el lema 2.4.1 de la página 45 se tiene que $I \cap \mu$ es de interior vacío, compacto y no tiene puntos aislados. Además vimos en la demostración de dicho lema que cada semiórbita de μ es densa en μ . En consecuencia $G = i^{-1}(I \cap \mu)$ está contenido en V , ya que en particular cada órbita asociada a un punto de μ pasará tan cerca de $i(0)$ como queramos y por lo tanto intersecará a I por el teorema del flujo tubular. G tendrá interior vacío, compacto y cada punto suyo es aislado.

Notación 2.4.1 (conjunto perfecto). *A partir de ahora, a cada conjunto de interior vacío, compacto y sin puntos aislados lo denominaremos conjunto perfecto.*

Tomamos un abierto U tal que $G \subset U \subset \bar{U} \subset V$. Debemos justificar la existencia de un tal U , vamos a dar una construcción de U . Para todo $g \in G$ existe $\varepsilon_g > 0$ tal que $(g - \varepsilon_g, g + \varepsilon_g) \subset V$. Tomaremos $U_g = (g - \varepsilon_g/2, g + \varepsilon_g/2)$ y $U = \bigcup_{g \in G} U_g$. U es abierto y cumple las condiciones requeridas.

Para terminar la prueba necesitamos dos lemas que demostraremos más tarde, damos ahora el enunciado:

Lema 2.4.3. *π y G poseen las siguientes propiedades:*

1. $G = (-1, 1) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ donde (a_i, b_i) son intervalos abiertos y disjuntos.
2. $\pi(G) = G$.
3. Si $v \in G$ y $\pi^k(v) = v$, entonces $k=0$.
4. G es un conjunto minimal para π en el sentido de que G no contiene propiamente un subconjunto cerrado $K_0 \neq \emptyset$ con $\pi(K_0) = K_0$.
5. Existe $L > 0$ tal que $|\pi'(w)| \geq L$ para todo $w \in U$.
6. Dado $a \in G$, el conjunto $H = \{\pi^k(a) : k \in \mathbb{Z}\}$ es denso en G .
7. Existe $M > 0$ tal que $|\pi''(w)| \leq M$ para todo $w \in U$.

Lema 2.4.4. *Para π y G según hemos definido en el teorema de Schwartz se tiene:*

1. *Existe $a \in G$ tal que $\lim D\pi^k(a) = 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$.*
2. *Existe un entorno de a en la topología de U , $V_a \subset U$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} D\pi^k(x) = 0$ uniformemente en $x \in V_a$.*

Dejando la prueba de estos lemas para más tarde y admitiéndolos, terminamos la prueba del teorema de Schwartz.

Veamos que no existe una función satisfaciendo las propiedades del lema 2.4.3 y para ello usaremos el lema 2.4.4. Debido a las propiedades 2.4.3.6 y 2.4.4.2 se sigue la existencia de $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset V_a$ y existe también k , entero suficientemente grande tal que

$$|\pi^k(a) - a| \leq \frac{\delta}{2} \text{ por 2.4.3.6}$$

y

$|D\pi^{k+1}(s)| < \frac{1}{2}$ para $|s-a| < \delta$ por 2.4.4.2 y la observación que acabamos de hacer.

Así que $|\pi^k(a \pm \delta) - a| \leq |\pi^k(a \pm \delta) - \pi^k(a)| + |\pi^k(a) - a| \leq |D\pi^{k+1}(\theta)| |\delta| + \frac{\delta}{2} < \delta$ ya que $\theta \in (a - \delta, a + \delta)$.

Hemos visto que $\pi^k(a + \delta)$ y $\pi^k(a - \delta)$ están en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, lo que implica que la función $\pi^k(s) - s$ tiene signos opuestos en $s = a + \delta$ y $s = a - \delta$. Por el teorema de los valores intermedios, existe $s_0 \in (a - \delta, a + \delta)$ tal que $\pi^k(s_0) = s_0$ y por tanto, para todo n natural $\pi^{nk}(s_0) = s_0$.

Usando 2.4.4.2 veamos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{nk}(a) = s_0$. Debido a que $|\pi^{nk}(a) - \pi^{nk}(s_0)| = |D\pi^{nk+1}(\theta_k)| |a - s_0|$ para algún θ_k de $(a - \delta, a + \delta)$ y como $\lim_{n \rightarrow \infty} D\pi^{nk+1}(\theta_k) = 0$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{nk}(a) = s_0$. Así que $s_0 \in G$ y contradice 2.4.3.3, con lo cual acabamos la prueba del teorema de Schwartz. \square

Vamos ahora a probar los lemas enunciados, que hemos usado para la demostración del teorema.

Demostración del lema 2.4.3, pág.49: 1. G es un conjunto perfecto en $(-1, +1)$ ya que es compacto, con interior vacío y sin puntos aislados. Así que G ha de ser de la forma $(-1, +1) \setminus \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ tomando los (a_i, b_i) como las componentes conexas del complementario de G y por lo tanto los (a_i, b_i) son disjuntos. Como consecuencia, el conjunto de índices I ha de ser numerable porque $\sum_{i \in I} (b_i - a_i) \leq 2$, lo cual es imposible si I es no numerable.

2. Veamos que $\pi(G) = G$. Sea $g \in G$, lo que quiere decir que $i(g) \in \mu \cap I$. Debido a que la semiórbita $\Gamma^+(i(g))$ es densa en μ (es decir, los puntos de $\Gamma_{i(g)}$ para valores de $t > t_0$, donde t_0 cumple $\gamma(t_0) = i(g)$ y $\gamma(\mathbb{R}) = \Gamma_{i(g)}$) se tiene que la órbita que pasa por $i(g)$ vuelve a cortar a I y entonces $G \subset V$. Además, como $i(\pi(g))$ es un punto de I y de $\Gamma_{i(g)} \subset \mu$ se tiene que $\pi(G) \subset V$.

Igualmente, como $\Gamma^-(i(g))$ es densa en μ , $G \subset \pi(G)$ y se tiene $G = \pi(G)$.

3. Si existe $v \in G$ tal que $\pi^k(v) = v$, esto querría decir que existe en μ una órbita periódica, a menos que $k = 0$. Con lo cual k debe ser 0 porque en μ no hay órbitas periódicas.

4. Supongamos que existiera K_0 cerrado con $\pi(K_0) = K_0$, consideremos el conjunto $\tilde{K}_0 = i(K_0)$ y $\tilde{G} = i(G) = I \cap \mu$. Tomamos la unión de todas las órbitas que pasen por puntos de \tilde{K}_0 , Ω y mostremos que Ω es cerrado y tendremos una contradicción con la minimalidad de μ .

Si Ω no fuera cerrado, consideramos $p \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$, como $p \in \mu$, existe t_0 tal que $\Psi(t_0, p) \in I \cap \mu = \tilde{G}$. Como $\tilde{G} \setminus \tilde{K}_0$ es un abierto en \tilde{G} y $\Psi(t_0, p) \in \tilde{G} \setminus \tilde{K}_0$, existe un entorno de $\Psi(t_0, p)$ en \tilde{G} que llamaremos \tilde{V} con $\tilde{V} \cap \tilde{K}_0 = \emptyset$ tal que $\Psi_{-t_0}(\tilde{V})$ no contiene puntos de Ω , pero esto es absurdo ya que $p \in \Psi_{-t_0}(\tilde{V}) \cap (\bar{\Omega} \setminus \Omega)$.

Como Ω es cerrado y por lo tanto compacto, debe ser todo μ y por lo tanto K_0 debe ser G .

5. Es inmediata ya que \bar{U} es compacto y además $|\pi'(v)| \neq 0$ para todo $v \in V$ por la manera de haber definido π , veámoslo:

si $|v - v_0|$ es suficientemente pequeño

$$\pi(v) = \pi_2 \circ \delta^{-1} \circ \Psi[t(i(v_0)), i(v)]$$

y

$$\pi'(v_1) = \pi_2 \circ d\delta^{-1}(\Psi[t(i(v_0)), i(v_1)]) \circ d\Psi(t(i(v_0)), i(v_1))(0, i'(v_1))$$

puesto que $d\delta^{-1}(\Psi[t(i(v_0)), i(v_1)])$ y $d\Psi(t(i(v_0)), i(v_1))$ son biyectivas, lineales y $(0, i'(v_1))$ es no nulo se tiene que $\pi'(v_1)$ es no nulo ya que la componente π_1 de $(\delta^{-1} \circ \Psi[t(i(v_0)), i(v)])'$ es cero.

6. Sea $H = \{\pi^k(a), \quad k \in \mathbb{Z}\}$, veamos que H es denso en G . Es una consecuencia inmediata de la densidad de $\Gamma(i(a))$ en μ y el teorema del flujo tubular.

7. Como π es de clase C^2 y \bar{U} es compacto, entonces debe existir $M > 0$ tal que $|\pi''(w)| \leq M$ para todo w de U .

□

Antes de pasar a la demostración del lema 2.4.4 (página 50) necesitamos dos lemas que nos darán las claves de la demostración de dicho lema.

Lema 2.4.5. *Existe un intervalo abierto (a, b) con a y b en G tal que $\pi^k\{(a, b)\} \subset U$ para todo $k \geq 0$.*

Demostración: definimos $\delta = \text{distancia}(G, (-1, 1) \setminus U)$ y para los intervalos (a_i, b_i) del lema 2.4.3 (página 49) introducimos el conjunto $S = \{i : b_i - a_i \geq \delta\}$ e $Y = \{a_i, b_i : i \in S\}$. Hacemos notar que tanto S como Y son finitos.

Por ser Y finito y el conjunto $H = \{\pi^k(a_1) : k \in \mathbb{N}\}$ denso en G se tiene que H será infinito y a partir de un cierto entero positivo N $\pi^k(a_1) \notin Y$.

$\pi^k(a_1)$ será un punto de G y como veremos al final que $K_1 = \{a_i, b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es invariante entonces $\pi^N(a_1)$ será un a_i ó b_i de los que no se encuentran en Y . Sabemos también que π está definida en todo el intervalo (a_i, b_i) y como la derivada no sea anula entonces si π es creciente $\pi((a_i, b_i) \cap G) = \pi(\emptyset) = (\pi(a_i), \pi(b_i)) \cap G = \emptyset$, lo cual implica que $(\pi(a_i), \pi(b_i)) \subset (a_j, b_j)$ y necesariamente se tendrá $\pi(a_i) = a_j$, $\pi(b_i) = b_j$. Para π decreciente en (a_i, b_i) se tendrá $\pi(a_i) = b_j$ y $\pi(b_i) = a_j$.

En general para un entero k arbitrario $\pi^k(a_i, b_i)$ será igual a un (a_j, b_j) con lo cual o bien $\pi^k(a_i) = a_j$ y $\pi^k(b_i) = b_j$ o bien $\pi^k(a_i) = b_j$ y $\pi^k(b_i) = a_j$ y por lo tanto el intervalo (a_i, b_i) satisface las condiciones requeridas.

Queda por ver que el conjunto K_1 satisface $\pi(K_1) = K_1$, para ello observemos que $K_1 \subset G$ y cada punto x_0 de $G \setminus K_1$ satisface para cada $\varepsilon > 0$

$$G \cap (x_0 - \varepsilon, x_0) \neq \emptyset \quad G \cap (x_0, x_0 + \varepsilon) \neq \emptyset$$

Tomemos un intervalo arbitrario (a_j, b_j) y descompongámoslo en la unión $(a_j, c_j) \cup (c_j, d_j) \cup (d_j, b_j)$ estando π definida en el primer y tercer intervalo de la unión. $G \cap (a_j, c_j) = \emptyset$ y $G \cap (d_j, b_j) = \emptyset$ y por lo tanto $G \cap (\pi(d_j), \pi(b_j))$ y $G \cap (\pi(a_j), \pi(c_j))$ son vacíos y por lo tanto $\pi(a_j)$ y $\pi(b_j)$ estarán en K_1 , con lo cual $\pi(K_1) \subset K_1$.

Haciendo un razonamiento similar para π^{-1} se tiene el contenido contrario y por lo tanto $\pi(K_1) = K_1$.

□

Vamos a demostrar un último lema antes de dar paso a la demostración del lema 2.4.4 (página 50), que le dará validez al teorema de Schwartz.

Lema 2.4.6 (desigualdad fundamental). *Sea N un entero y $[p, q] \subset (-1, 1)$ tal que $\pi^k([p, q]) \subset U$ para todo $0 \leq k \leq N$. Entonces:*

$$\left| \frac{D\pi^{k+1}(u)}{D\pi^{k+1}(v)} \right| \leq \exp \left(\frac{M}{L} \sum_{j=0}^k |\pi^j(p) - \pi^j(q)| \right) \quad (2.1)$$

para todo $0 \leq k \leq N$ y u, v en $[p, q]$. Siendo los números M y N los que introdujimos en el lema 2.4.3.

Demostración: la prueba de este lema es básicamente técnica pero la explicaremos por tener completa la demostración del teorema de Schwartz.

$\frac{|D\pi^{k+1}(u)|}{|D\pi^{k+1}(v)|} = \frac{|\pi'(\pi^k(u))\pi'(\pi^{k-1}(u))\dots\pi'(\pi(u))\pi'(u)|}{|\pi'(\pi^k(v))\pi'(\pi^{k-1}(v))\dots\pi'(\pi(v))\pi'(v)|}$, y tomando logaritmo se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \log \left| \frac{D\pi^{k+1}(u)}{D\pi^{k+1}(v)} \right| \right| &\leq \sum_{j=0}^k \left| \log |\pi' \pi^j(u)| - \log |\pi' \pi^j(v)| \right| \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{|\pi''(w_j)|}{|\pi'(w_j)|} |\pi^j(u) - \pi^j(v)| \end{aligned}$$

y esta última desigualdad se debe al teorema de Lagrange, donde $w_j \in (\pi^j(u), \pi^j(v))$ si π es creciente ó $w_j \in (\pi^j(v), \pi^j(u))$ si π es decreciente en el intervalo (u, v) .

Utilizando las desigualdades del lema 2.4.3 y la monotonía de π en el intervalo (u, v) , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{D\pi^{k+1}(u)}{D\pi^{k+1}(v)} &\leq \exp \left(\sum_{j=0}^k \frac{|\pi''(w_j)|}{|\pi'(w_j)|} |\pi^j(u) - \pi^j(v)| \right) \\ &\leq \exp \left(\sum_{j=0}^k \frac{M}{L} |\pi^j(u) - \pi^j(v)| \right) = \exp \left(\frac{M}{L} \sum_{j=0}^k |\pi^j(u) - \pi^j(v)| \right) \quad (2.2) \end{aligned}$$

□

Estamos ya en condiciones de abordar la demostración del lema 2.4.4.

Prueba del lema 4: 1. Tomaremos como punto a , el punto escogido en el lema 2.4.5 y demostraremos que satisface las condiciones exigidas por el lema 2.4.4. Para demostrar este apartado probaremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |D\pi^k(a)|$ converge. Sean $a^k = \pi^k(a)$ y $b^k = \pi^k(b)$, vista la definición de a y b en el lema 2.4.5 se tiene que a^k, b^k están en K_1 y por tanto los intervalos $[a^k, b^k]$ son disjuntos. Se tiene pues que:

$$2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} |b^k - a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\pi^k(b) - \pi^k(a)| = \sum_{k=0}^{\infty} |D\pi^k(w_k)| |b - a| \quad (2.3)$$

para cierto $w_k \in (a, b)$. Así que $\sum_{k=0}^{\infty} |D\pi^k(w_k)| \leq \frac{1}{|b-a|}$ y por lo tanto $|D\pi^k(w_k)| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$.

Utilizamos ahora la desigualdad fundamental en el intervalo (a, b) ,

$$\frac{|D\pi^k(a)|}{|D\pi^k(w_k)|} \leq \exp\left(\frac{M}{L} \sum_{j=0}^k |\pi^j(b) - \pi^j(a)|\right) \leq \exp\left(\frac{M}{L}\right)$$

De donde, tenemos $|D\pi^k(a)| \leq \exp\left(\frac{M}{L}\right) |D\pi^k(w_k)|$ y como $D\pi(w_k)$ converge hacia cero, entonces $D\pi^k(a)$ también lo hará.

2. Vamos a determinar ahora un entorno de a en el que $\lim_{k \rightarrow \infty} D\pi^k(x) = 0$ uniformemente. Es decir, vamos a encontrar $d > 0$ tal que el entorno $V_a = \{x : |x - a| < d\}$ satisfaga las condiciones:

- (a) $|\pi^k(x) - \pi^k(a)| < \delta = \text{distancia}(G, [-1, 1] \setminus U)$
 (b) $|D\pi^k(x)| < \alpha |D\pi^k(a)|$

para cada $x \in V_a$ y $k \geq 0$ entero, α siendo un real mayor que cero. Haremos la demostración por inducción.

Para $k = 0$ existen $d = d_0$ y α tales que (a) y (b) se satisfacen trivialmente. Definimos $d = \min\{d_0, \frac{\delta}{\alpha\tau}, \frac{1}{\tau \exp(M/L)}\}$ donde $\tau = \sum_{k=0}^{\infty} |D\pi^k(a)|$. Las condiciones (a) y (b) se satisfacen para $k = 0$ para esta elección de d .

Supongamos que para $k = 1, 2, \dots, N$ se satisfacen las condiciones, veamos que se satisfacen para $k = N + 1$. Aplicaremos la desigualdad fundamental para $p = u = x$, $q = v = a$ si $x < a$. El intervalo $[p, q]$ está en las condiciones del lema 2.4.6 y por la desigualdad 2.1 tenemos:

$$\begin{aligned} |D\pi^{N+1}(x)| &\leq \exp\left(\frac{M}{L}\right) \sum_{k=0}^N |\pi^k(x) - \pi^k(a)| |D\pi^{N+1}(a)| \\ &\leq \exp\left(\frac{M}{L}\right) \sum_{k=0}^N |D\pi^k(u_k)| d |D\pi^{N+1}(a)| \\ &\leq \exp\left(\frac{M}{L}\right) \sum_{k=0}^N \alpha d |D\pi^k(a)| |D\pi^{N+1}(a)| \\ &\leq \exp\left(\frac{M}{L}\right) d \alpha \tau |D\pi^{N+1}(a)| \\ &\leq \alpha |D\pi^{N+1}(a)| \end{aligned}$$

siendo u_k un número del intervalo $[x, a]$. Esto demuestra (b) para $k = N + 1$.

Probemos (a): $|\pi^{N+1}(x) - \pi^{N+1}(a)| = |x - a| |D\pi^{N+1}(\theta)|$ con $\theta \in [x, a]$. Así que $|\pi^{N+1}(x) - \pi^{N+1}(a)| < d \alpha |D\pi^{N+1}(a)| < d \alpha \tau \leq \delta$.

El mismo razonamiento se puede utilizar para $x > a$.

□

2.5 Teorema de Poincaré en superficies.

Vamos a extraer del teorema de Schwartz la información posible en términos de ω -límites de flujos definidos sobre una superficie compacta y conexa. Antes de ello necesitamos un lema previo que nos dará la existencia de conjuntos minimales dentro de cualquier ω -límite, en una superficie compacta y conexa. Sin embargo esto no es cierto en general y recientemente ha aparecido [BM97] donde se pone de manifiesto que sobre cada superficie no compacta se pueden definir flujos sin conjuntos minimales.

Estos resultados pueden seguirse en [Sot79] y [Har82], pero allí los autores se limita sólo a enunciarlos sin entrar en detalles de demostración.

Lema 2.5.1 (existencia de conjuntos minimales). *Sea Ψ un flujo definido sobre una superficie \mathcal{M}^2 compacta de clase C^k para $k \geq 0$. Supongamos que M_1 es un conjunto no vacío, invariante, conexo y compacto. Entonces M_1 contiene al menos un conjunto minimal μ .*

Demostración: para la demostración de este resultado técnico usaremos el lema de Zorn. Consideraremos el conjunto

$$\mathcal{H} = \{T \subset M_1 : T \text{ es invariante, conexo, compacto y no vacío} \}$$

Dentro de este conjunto vamos a considerar el orden $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ si y sólo si $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$. Veamos que \mathcal{H} con este orden es inductivo.

El conjunto \mathcal{H} es no vacío, ya que M_1 es un elemento de él. Por otra parte mostremos que toda cadena en \mathcal{H} tiene un elemento maximal. Sea $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \leq \dots \leq \mathcal{C}_j \leq \dots$ una cadena, veamos que posee una cota superior. Definamos $\mathcal{C} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$.

El conjunto \mathcal{C} es no vacío por ser intersección de una sucesión de compactos contenidos cada uno en el anterior, compacto por ser intersección de compactos, conexo por ser intersección de conexos con un punto en común e invariante por ser intersección de invariantes.

Puesto que hemos probado que toda cadena posee un mayorante debe existir en \mathcal{H} un elemento maximal, que por definición del conjunto \mathcal{H} y del orden será un conjunto minimal en el sentido que le hemos dado en este capítulo al término. \square

Corolario 2.5.1. *Todo conjunto ω -límite posee en su interior un conjunto minimal.*

Demostración: por las propiedades de los ω -límites de flujos en general vistas en el primer capítulo: $\omega(\gamma)$ es conexo, compacto, invariante por Ψ y no vacío. Aplicando ahora el lema precedente tenemos el resultado enunciado. \square

Teorema 2.5.1 (Poincaré-Bendixson en superficies orientables). *Sea S un sistema dinámico de clase C^2 definido sobre una superficie \mathcal{M}^2 de clase C^2 compacta, conexa y orientable. Sea γ una órbita de S . Si $\omega(\gamma)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada ó $\omega(\gamma) = \mathcal{M}^2$ y $\mathcal{M}^2 = \mathbb{T}^2$.*

Demostración: el corolario anterior nos dice que $\omega(\gamma)$ posee dentro de él un conjunto minimal μ . Como el flujo es de clase C^2 se tiene, por el teorema de Schwartz que el conjunto minimal es trivial, es decir un punto crítico, una órbita periódica o \mathbb{T}^2 . Como en la hipótesis hemos admitido que $\omega(\gamma)$ no poseía puntos críticos, tenemos una de las dos alternativas:

1. $\mu = \mathbb{T}^2$. En este caso se tiene que la superficie es por tanto el toro y $\omega(\gamma) = \mathbb{T}^2$.
2. $\mu =$ órbita periódica. Por lo tanto tenemos que $\omega(\gamma)$ contiene una órbita periódica μ de periodo P que pasa por un punto x . Nuestro trabajo se concentra ahora en demostrar que, como en el caso de los sistemas dinámicos planos, el ω -límite se reduce a dicha órbita. Para ello vamos a definir una aplicación entre un abierto que contiene a la órbita y una corona circular (o el cilindro).

Fijemos el flujo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ y el campo vectorial que lo define \vec{V} . Consideremos también el campo vectorial normal a \vec{V} , que denotaremos por \vec{W} . Por último denotaremos por $\Sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ el flujo asociado a \vec{W} . Tomemos $\varepsilon > 0$ satisfaciendo $\Sigma((-\varepsilon, +\varepsilon), x) \cap \Sigma((-\varepsilon, +\varepsilon), y) = \emptyset$ para cualesquiera x, y de μ (esto es posible por la compacidad de μ). Denotaremos por U_μ a $\Sigma((-\varepsilon, +\varepsilon), \mu)$. Por ser todos los puntos de μ regulares, el teorema del flujo tubular nos dice que U_μ es abierto para ε suficientemente pequeño y que $\bar{U}_\mu = \Psi([-\varepsilon, +\varepsilon], \mu)$. Observemos también que el conjunto $\Psi_x([0, P])$ es μ con $\Psi_x(0) = \Psi_x(P)$, siendo $\Psi_x|_{[0, P]}$ un difeomorfismo de la misma clase que Ψ .

Definimos $f : \bar{U}_\mu \rightarrow [-\varepsilon, +\varepsilon] \times S^1$ por $f(\Sigma(t, y)) = (t, \exp(\frac{2\pi}{P}\Psi_x^{-1}|_{[0, P]}(y)))$. Obviamente f así definida es un difeomorfismo.

Usando el difeomorfismo f , pasamos el sistema dinámico en \bar{U}_μ al subconjunto $[-\varepsilon, +\varepsilon] \times S^1$ que es difeomorfo a un conjunto del plano y la órbita $f(\gamma)$ se encontrará en una de las dos situaciones representadas en el dibujo de la figura 2.2. Esto nos indica que la órbita γ queda dentro de abierto U_μ y eligiendo ε arbitrariamente pequeño se comprende que $\omega(\gamma) = \mu$.

□

Lema 2.5.2. *Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ una curva de Jordan simple, no homotópicamente nula. Si además, γ es diferenciable, se tiene que $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma(I)$ es difeomorfo al plano menos un punto.*

Demostración: la prueba de este resultado se basa en la proposición 5.3.1.3 que veremos posteriormente y que se trata de instrumento meramente geométrico. El lector puede admitir el resultado y continuar la lectura del capítulo. Si no, es aconsejable leer la sección 5.3.1 que explica con detalle que $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ es difeomorfo a una corona y por lo tanto al plano menos un punto. □

Corolario 2.5.2. *Sea S un flujo de clase C^2 sobre \mathbb{T}^2 . Si S no tiene singularidades, se tiene una de las dos alternativas:*

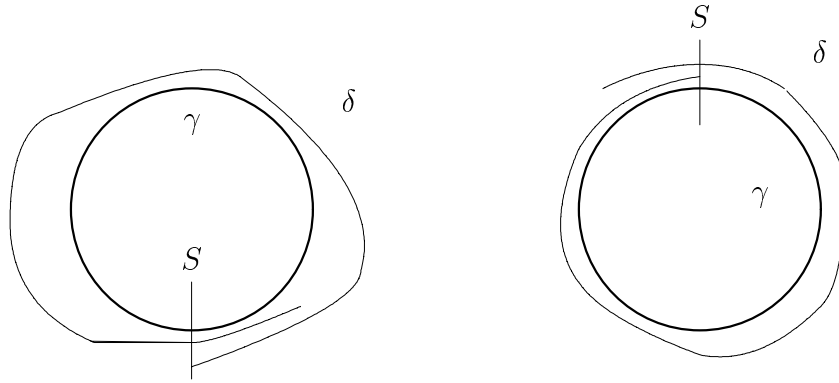


Figura 2.2: Situaciones posibles del ω -límite vistas en \mathbb{R}^2 por el difeomorfismo f .

1. El ω -límite de toda órbita de S es una órbita periódica.
2. El ω -límite de toda órbita de S es \mathbb{T}^2 .

Demostración: una vez visto el teorema anterior está claro que si tomamos una órbita γ del sistema dinámico, su ω -límite será o una órbita periódica o todo \mathbb{T}^2 . Vamos a ver que si en el toro dicho sistema dinámico posee una órbita periódica, entonces todos los conjuntos ω -límite son órbitas periódicas.

Así que nos situamos en el caso en el que tenemos una órbita periódica en el toro μ . Multiplicamos el campo que genera el sistema dinámico en el toro por una función escalar positiva que se anula en el órbita periódica que estamos suponiendo existente.

Utilizando el difeomorfismo del lema anterior podemos trasladar el sistema dinámico que tenemos en el toro menos la curva de Jordan al cilindro. Una vez en el cilindro cualquier ω -límite va a ser una órbita periódica ya que no hay puntos fijos y utilizando el difeomorfismo inverso se tiene que el ω de cualquier órbita del toro es una órbita periódica. \square

Sería conveniente establecer el mismo resultado sobre ω -límites para superficies no orientables y efectivamente lo vamos a poder hacer gracias a los recubridores que hemos estudiado en la sección 2.3. Pasaremos el flujo de la superficie no orientable a la orientable y allí discutiremos el problema.

Teorema 2.5.2 (Poincaré-Bendixson en superficies no orientables). *Sea S un sistema dinámico de clase C^2 definido sobre una superficie \mathcal{M}^2 de clase C^2 compacta, conexa y no orientable. Sea γ una órbita de S . Si $\omega(\gamma)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada.*

Demostración: levantaremos el flujo tal y como se ha explicado en la sección 2.3 y obtenemos un sistema dinámico de clase C^2 sobre el recubridor. La órbita γ se levanta a una órbita $\tilde{\gamma}$ y se cumple que $p(\omega(\tilde{\gamma})) = \omega(\gamma)$ donde p denota la aplicación recubridora. Como $\omega(\tilde{\gamma})$ no posee puntos críticos por no tenerlos $\omega(\gamma)$ se tiene que si \mathcal{M}^2 es distinta de la botella de Klein entonces $\omega(\tilde{\gamma})$ es una órbita periódica y también lo será por tanto $\omega(\gamma)$.

Si \mathcal{M}^2 fuera la botella de Klein y el flujo lo habríamos levantado al toro, cabiendo en este caso además que $\omega(\tilde{\gamma}) = \mathbb{T}^2$, caso que se descarta por el teorema de Knesser. \square

Hemos desarrollado una gran artillería para demostrar estos resultados y el esfuerzo puede no verse del todo compensado por la hipótesis de limitarnos al estudio de flujos de clase C^2 . Realmente la hipótesis de clase C^2 no se puede debilitar, pues existen ω -límites de flujos continuos de tal manera que no poseen en su interior ni puntos críticos, ni órbitas periódicas.

Por otra parte, queremos hacer notar que a pesar de que la hipótesis no se pueda debilitar en general, existen dos superficies en las que sí lo podemos hacer. Una es la esfera y no es necesario justificar esta afirmación a la luz del primer capítulo de esta tesina. La otra no podía ser otra que el plano proyectivo por ser la esfera su recubridor orientable. Puesto que el teorema de Poincaré-Bendixson ha sido totalmente generalizado en la esfera, cabe esperar que podamos utilizar toda la artillería que hay en la literatura sobre flujos en la esfera [BJ96, Poi85, Ben01, Vin52, Sol45] junto con las propiedades de los recubridores para establecer un resultado del estilo del primer capítulo para el plano proyectivo. Por ello queremos dedicar un estudio aparte a esta superficie no orientable, lo realizaremos en la sección 5.6.

Todavía no se ha terminado la prueba del teorema de Schwartz, puesto que no hemos dado la demostración del resultado de Knesser. Por ser demasiado extenso dejamos la prueba de este teorema para un capítulo independiente.

Apéndice: clasificación de superficies compactas y conexas.

Se trata de exponer en este apartado someramente la clasificación diferencial de las superficies debido a que nos ocuparán en gran parte de la tesina y es por tanto importante estar familiarizado con ellas. Daremos en este apéndice las definiciones de suma conexa, construiremos mediante esta operación otras superficies a partir de unas dadas de partida y veremos que cualquier superficie compacta y conexa se puede obtener haciendo sumas conexas de esferas, bandas de Möbius y cilindros.

No daremos las demostraciones de los hechos que aquí exponemos por su alta dificultad y por no tratarse del tema central de esta tesina. La información que aquí se expone procede en su gran mayoría del capítulo 9 de [Hir88], aunque también se han utilizado para esta recopilación [Kin93, Wal68, Moi77, GP74]; sin embargo el enfoque que más se corresponde con la estructura diferencial se encuentra en [Hir88, GP74, Wal68].

La clasificación de las superficies se conocía ya parcialmente a finales del siglo pasado. La principal idea para clasificarlas se debe a Riemann y consiste en cortar la superficie a lo largo de curvas cerradas hasta tal punto que un corte ulterior provoque la desconexión del espacio resultante. Sin más preámbulos vamos a pasar ya a explicar el concepto de suma conexa.

Construcción de superficies: suma conexa.

Vamos a dar en esta sección un método para construir superficies a partir de dos superficies dadas de partida, método que utilizaremos para construir los modelos que clasificarán las superficies compactas y conexas existentes. A partir de ahora denotaremos, como es habitual $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.

Suponemos de partida que tenemos definidas dos superficies compactas y conexas de clase C^r , \mathcal{M}^2 y \mathcal{N}^2 , de las cuales queremos construir una nueva superficie $\mathcal{M}^2 \# \mathcal{N}^2$ que llamaremos suma conexa de \mathcal{M}^2 y \mathcal{N}^2 .

Veamos primero su definición topológica: sea $f : \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathcal{M}^2 \cup \mathcal{N}^2$ una inmersión con $f(1 \times D^2) \subset \mathcal{M}^2$ y $f(-1 \times D^2) \subset \mathcal{N}^2$. Definimos $\mathcal{M}^2 \# \mathcal{N}^2$ como el espacio

topológico $\mathcal{M}^2 \cup_f \mathcal{N}^2$ que resulta de tomar la unión de \mathcal{M}^2 y \mathcal{N}^2 identificando los puntos $f(-1, t)$ y $f(1, t)$.

Se prueba en [Hir88], capítulo 9 que este espacio topológico es en realidad una superficie diferenciable de clase C^r .

Modelos orientables. Las esferas de p asas.

En este apartado vamos a construir las llamadas esferas de n asas que seguro que el lector conoce al menos intuitivamente. La formalización de este concepto pasa, al igual que antes, por definir un espacio cociente.

Empecemos con una superficie \mathcal{M}^2 y describamos el proceso de pegar asas. Para ello consideramos una inmersión

$$f : \mathbb{S}^0 \times D^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$$

La imagen de f es un par de discos disjuntos sobre la superficie \mathcal{M}^2 , quitemos de \mathcal{M}^2 estos discos y peguemos el cilindro $D^1 \times S^1$ mediante la aplicación $f|_{S^0 \times S^1}$ obteniéndose la superficie $\mathcal{M}_s^2 = \mathcal{M}^2 \setminus \text{Int}(S^0 \times D^2) \cup_f D^1 \times S^1$. En este caso se hace como antes la unión de las variedades $\mathcal{M}^2 \setminus \text{Int}(S^0 \times D^2)$ y $D^1 \times S^1$ y se identifican los puntos $f(1, t)$ de la superficie \mathcal{M}^2 con los del cilindro $(1, t)$ y $f(-1, t)$ con $(-1, t)$, donde $|t| = 1$.

La superficie \mathcal{M}_s^2 se dice que se ha obtenido de \mathcal{M}^2 pegándole un asa o “handle” en la literatura inglesa. Ahora para construir la esfera de n asas se parte de la esfera y se repite el proceso anterior n veces.

Modelos no orientables.

Construimos ahora las superficies no orientables que nos ayudarán a establecer un teorema de clasificación global sobre superficies compactas y conexas. La filosofía es la misma que en el apartado anterior, las técnicas se reducen intuitivamente a cortar y pegar de manera diferenciable. Antes la superficie clave era el cilindro, ahora juegan un papel fundamental la banda de Möbius B y el plano proyectivo \mathbb{P}^2 .

Una superficie no orientable de género p será la superficie que se obtiene de hacer p sumas conexas de copias distintas del plano proyectivo \mathbb{P}^2 , de manera que resultará una superficie no orientable.

A pesar de esta definición tan directa, en la literatura juega un papel importante la banda de Möbius (que al igual que el cilindro no serían superficies propiamente en el sentido de esta tesina por tener borde).

Una banda de Möbius es una superficie que se obtiene del espacio $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ identificando (x, y) con $(-x, -y)$. Otra forma más sencilla de visualizarla es en el cuadrado unitario identificando lados como se pone de manifiesto en la figura siguiente.

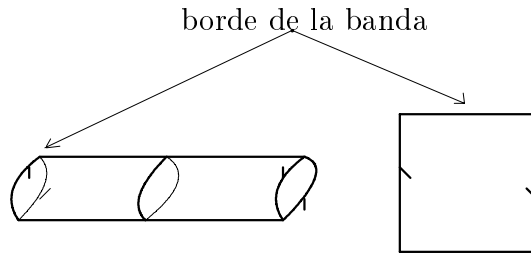


Figura 2.3: Dos formas de ver la banda de Möbius (B).

Pues bien, para cualquier superficie \mathcal{M}^2 conexa y compacta se verifica que la suma conexa $\mathcal{M}^2 \# \mathbb{P}^2$ es difeomorfa a $(\mathcal{M}^2 \setminus \text{Int } D) \cup_f B$, donde D es un disco y f es un difeomorfismo entre la frontera de B y de $\mathcal{M}^2 \setminus \text{Int } D$. La imagen de B en \mathcal{M}^2 la seguiremos llamando banda de Möbius y en la bibliografía inglesa recibe el nombre de “crosscap” donde se denomina también a la superficie de género p no orientable como esfera con p bandas de Möbius.

Algunas propiedades y el teorema de clasificación.

Enunciamos aquí algunas propiedades que serán útiles cuando hagamos operaciones geométricas de cortar y pegar superficies en los capítulos siguientes.

Proposición. • Si \mathcal{M}^2 y \mathcal{N}^2 son dos superficies orientables de géneros p y q respectivamente, entonces $\mathcal{M}^2 \# \mathcal{N}^2$ es una superficie orientable que tiene género $p + q$.

- Si \mathcal{M}^2 y \mathcal{N}^2 son dos superficies no orientables de géneros p y q respectivamente, entonces $\mathcal{M}^2 \# \mathcal{N}^2$ es una superficie no orientable de género $p + q$.
- Si \mathcal{M}^2 es orientable de género p entonces $\chi(\mathcal{M}^2) = 2 - 2p$.
- En cambio, si \mathcal{M}^2 es no orientable de género p entonces $\chi(\mathcal{M}^2) = 2 - p$.

Teorema. Si \mathcal{M}^2 es una superficie compacta, conexa y no orientable de género p , la superficie que se obtiene pegando un asa a \mathcal{M}^2 seguirá siendo no orientable y tendrá género $p + 2$.

Teorema. Si \mathcal{M}^2 es una superficie compacta, conexa y orientable de género p , la superficie que se obtiene pegando una banda de Möbius a \mathcal{M}^2 es no orientable de género $2p + 1$.

Teorema (clasificación de superficies orientables). Sea \mathcal{M}^2 una superficie orientable, compacta y conexa. Entonces existe un único entero $p \geq 0$ tal que \mathcal{M}^2 es difeomorfa a la esfera de p asas con $\chi(\mathcal{M}^2) = 2 - 2p$.

En este caso se pueden encontrar p curvas de Jordan en \mathcal{M}^2 disjuntas cuyo complementario es conexo y no podemos encontrar $p + 1$ curvas de manera que el complementario no quede desconexo.

Teorema (clasificación de superficies no orientables). Sea \mathcal{N}^2 una superficie compacta, conexa y no orientable. Entonces existe un único entero $p > 0$ tal que \mathcal{M}^2 contiene p bandas de Möbius disjuntas y nunca $p + 1$. A este número se le llama número de Möbius.

En este caso \mathcal{N}^2 es difeomorfa a una esfera a la que se le han sumado conexasmente p bandas de Möbius.

Para acabar, hacemos unas tablas, en la primera de ellas mostramos las superficies de género 0, 1 y 2, donde destacamos también su característica de Euler-Poincaré.

Género	0	1	2
Orientables	\mathbb{S}^2 $\chi = 2$	\mathbb{T}^2 $\chi = 0$	$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ $\chi = 0$
No orientables	no existe	\mathbb{P}^2 $\chi = 1$	botella de Klein $\chi = 0$

En esta segunda tabla mostramos las superficies no orientables de género menor que cuatro y su recubridor, para ello hay que tener en cuenta que la característica de Euler-Poincaré es el doble que la de la superficie recubierta según se vio en el teorema 2.3.3.

Superficie no orientable \mathcal{N}^2		Superficie orientable \mathcal{M}^2	
$\chi(\mathcal{N}^2)$	Género de \mathcal{N}^2	$\chi(\mathcal{M}^2)$	Género de \mathcal{M}^2
1	1	2	0
0	2	0	1
-1	3	-2	2
-2	4	-4	3
-3	5	-6	4
$2 - n$	n	$2 - 2(n - 1)$	$n - 1$

Capítulo 3

El teorema de Knesser-Markley.

3.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es hacer un estudio de los flujos sobre la botella de Klein y en particular demostrar el ya citado teorema de Knesser. Para hacer este estudio pasaremos los flujos en la botella de Klein al toro, estudiaremos los flujos del toro y con ello obtendremos las propiedades de los primeros.

En primer lugar vamos a introducir dos relaciones de equivalencia en el plano de los números complejos \mathbb{C}^2 , tales que, al hacer el conjunto cociente obtenemos \mathbb{T}^2 y \mathbb{B}^2 (botella de Klein). Estudiaremos los flujos en \mathbb{T}^2 y por último probaremos que un flujo continuo sobre \mathbb{B}^2 sin puntos singulares tiene forzosamente una órbita periódica.

Este capítulo está basado en el artículo de Markley [Mar69b] donde se prueba el teorema de Weyl que posteriormente enunciaremos. Dicho teorema fue enunciado en la conferencia de topología de Moscú en el año 1935 y permaneció sin demostrar hasta el citado artículo de 1969.

Damos ya paso a la introducción del toro y la botella de Klein como cocientes del plano complejo.

3.2 El toro y la Botella de Klein como cocientes de \mathbb{C} .

Definición 3.2.1. Para cada par de enteros n y m , definimos el homeomorfismo $T_{n,m}$ de \mathbb{C} sobre \mathbb{C} de la manera siguiente:

$$T_{n,m} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

con

$$T_{n,m}(z) = z + n + mi$$

Denotaremos por τ_0 al conjunto $\{T_{n,m} : n, m \text{ enteros}\}$. τ_0 es un grupo de homeomorfismos para la composición de aplicaciones.

Construiremos el conjunto τ como el grupo de homeomorfismos generado por $T_{0,1}$ y K , estando K definida como $K(z) = \bar{z} + 1$.

Definición 3.2.2 (recta racional). Diremos que una recta l en el plano complejo es racional si existe un homeomorfismo de τ_0 que deja invariante a l . O lo que es lo mismo, si l tiene pendiente racional.

Notación 3.2.1. Denotaremos por \mathbb{C}/τ_0 al espacio topológico cociente de \mathbb{C} que se obtiene identificando z con $T(z)$ para todo z de \mathbb{C} y para todo T de τ_0 .

Denotaremos por \mathbb{C}/τ al espacio que se obtiene como el anterior pero tomando las aplicaciones de τ .

Proposición 3.2.1. El toro es homeomorfo a \mathbb{C}/τ_0 y la botella de Klein es homeomorfa a \mathbb{C}/τ . Además las aplicaciones $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\tau_0$ y $p' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\tau$ son aplicaciones recubridoras y como $\tau_0 \subset \tau$, existe una aplicación recubridora $p_2 : \mathbb{C}/\tau_0 \rightarrow \mathbb{C}/\tau$ que completa el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{p} & \mathbb{C}/\tau_0 = \mathbb{T}^2 \\ p' \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \mathbb{C}/\tau & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C}/\tau \end{array}$$

Por último, (\mathbb{T}^2, p_2) es el recubridor universal de la botella de Klein.

Demostración: estos dos hechos se pueden encontrar en cualquier libro de topología o geometría como [Car76]. Para lo referente al toro, ver la página 430 y para la construcción de la botella de Klein y la aplicación p_2 ver la página 434. \square

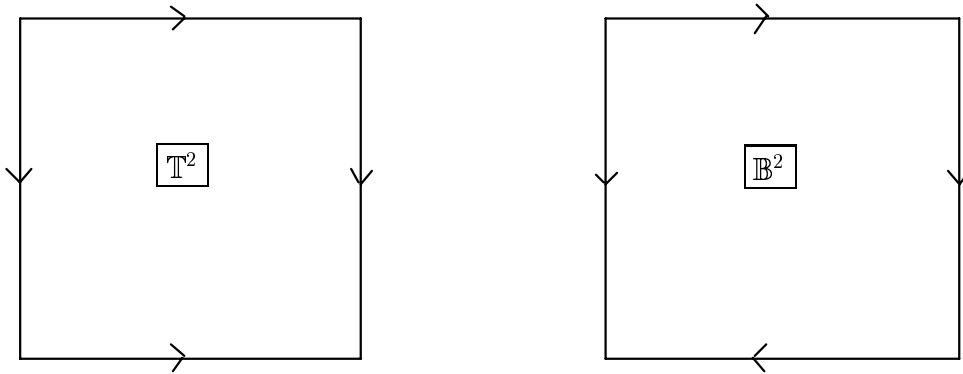


Figura 3.1: El toro y la botella de Klein vistos como los conjuntos cocientes dados en la proposición 3.2.1

Definición 3.2.3 (sección transversal). Sea $\Psi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un flujo continuo sobre una superficie y sea $x \in X$. Una sección transversal de Ψ en X es un subconjunto S de X que contiene a x y que es homeomorfo a un intervalo cerrado, además existe $\varepsilon > 0$ tal que la aplicación $(s, t) \rightarrow \Psi(s, t)$ es un homeomorfismo de $S \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ sobre la clausura de un entorno de x . Llamaremos ε longitud de la sección local.

Observación 3.2.1. Usando el teorema del flujo tubular, en una superficie cerrada, esta definición de sección transversal engloba a la que dimos en la demostración del teorema de Schwartz.

Por cada punto del interior de X que no sea fijo existe una sección transversal.

Notación 3.2.2. Si tenemos definido un flujo Ψ sobre un conjunto X , a veces denotaremos para un x de Ψ y un t de \mathbb{R} por xt a $\Psi(t, x)$ para simplificar la escritura.

Definición 3.2.4 (segmentos). Sea S una curva inyectiva y a, b de S . Denotaremos el segmento abierto de S entre a y b como $(a, b)_S$. Denotaremos también para $\tau > 0$ $(a, a\tau) = \{\Psi(a, t) : t \in (0, \tau)\}$ y $[a, a\tau] = \{\Psi(a, t) : t \in [0, \tau]\}$ donde Ψ es un flujo continuo. $ls(z, z')$ será la recta determinada por z y z' en \mathbb{C} .

Enunciaremos a continuación el teorema de Weil que necesitamos para la demostración del resultado de Kneser, no lo demostraremos por no guardar su demostración ninguna información relevante para el tema de esta tesina, una prueba se encuentra en estos términos en el artículo [Mar69b]. Posteriormente a este teorema enunciamos un lema que se usa para demostrar este teorema y que necesitaremos igualmente para concluir el teorema de Kneser.

Teorema 3.2.1 (de Weil). sea $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{T}^2$ una curva sobre el toro que no tiene autointersecciones. Sea $\tilde{\alpha} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ un levantamiento de α a \mathbb{C} . Si $|\tilde{\alpha}(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\alpha}(t)}{|\tilde{\alpha}(t)|}$ existe.

Lema 3.2.1. Sea $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{T}^2$ una curva simple y sea $\tilde{\alpha} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ un levantamiento de α . Sea L una recta racional. Si $|\tilde{\alpha}(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\tilde{\alpha}(t)$ no interseca todas las racionales paralelas a L .

Lema 3.2.2. Sean $\alpha, \beta : [0, +\infty) \rightarrow \tau$ dos curvas simples que no intersecan. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ dos levantamientos de α y β a \mathbb{C} . Si $|\tilde{\alpha}| \rightarrow +\infty$ y $|\tilde{\beta}| \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$, se tiene entonces que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\alpha}(t)}{|\tilde{\alpha}(t)|} = \pm \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\beta}(t)}{|\tilde{\beta}(t)|}$$

Demostración: supongamos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\alpha}(t)}{|\tilde{\alpha}(t)|} = \alpha$ y que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\beta}(t)}{|\tilde{\beta}(t)|} = \beta$ con $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ y $\beta \neq \pm\alpha$. Podremos encontrar pues ε tal que $0 \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon < \beta < \beta + \varepsilon < 2\pi$ con $\alpha - \varepsilon \neq \beta + \varepsilon$ y $\alpha + \varepsilon \neq \beta - \varepsilon$.

Como $\frac{\tilde{\alpha}(t)}{|\tilde{\alpha}(t)|} \rightarrow \alpha$ tenemos que para $t \geq t_0$ adecuado $\tilde{\alpha}(t)$ se encuentra en la región R_α determinada por el arco de circunferencia $A_\alpha = (Ke^{i(\alpha-\varepsilon)}, Ke^{i(\alpha+\varepsilon)})$ y las semirrectas l_α^1 y l_α^2 de pendiente $\alpha - \varepsilon$ y $\alpha + \varepsilon$ (estas semirrectas vendrán determinadas por valores del módulo de sus puntos mayores o iguales a K , con K suficientemente grande).

Podemos elegir el t_0 de manera que tengamos lo mismo para la curva $\tilde{\beta}$ en una región R_β definida exactamente igual cambiando α por β . Por último le impondremos a t_0 la condición siguiente:

$$\text{si } t \geq t_0 \quad |\tilde{\alpha}(t)| > K \text{ y } |\tilde{\beta}(t)| > K$$

Todo este razonamiento está representado geoméricamente en la figura 3.2.

Intuitivamente está claro que podemos elegir una transformación $T_{n,m}$ de manera que lleve el arco de circunferencia A_α al interior de la componente conexa de $R_\beta \setminus \tilde{\beta}([t_0, +\infty))$ que contiene a l_β^2 .

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T \circ \tilde{\alpha}}{|T \circ \tilde{\alpha}|} = \alpha$ se tiene que $T \circ \tilde{\alpha}$ debe cortar a $\tilde{\beta}$ lo cual es una contradicción. \square

3.3 Flujos en el toro.

Hacemos ahora un estudio de curvas sobre el toro, porque los flujos sobre la botella de Klein los levantaremos al toro para usar la artillería allí desarrollada.

Definición 3.3.1 (levantamiento universal). Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ una curva cerrada no homotópicamente nula y sea $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un levantamiento de α . Por ser α cerrada, se tiene que $\tilde{\alpha}(1) = T(\tilde{\alpha}(0))$ para un T en τ_0 . Definiremos el levantamiento universal de α como la curva $\tilde{\alpha}_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con $\tilde{\alpha}_u(t) = T^n(\tilde{\alpha}(t'))$ donde $n = [t]$ y $t' = t - n$.

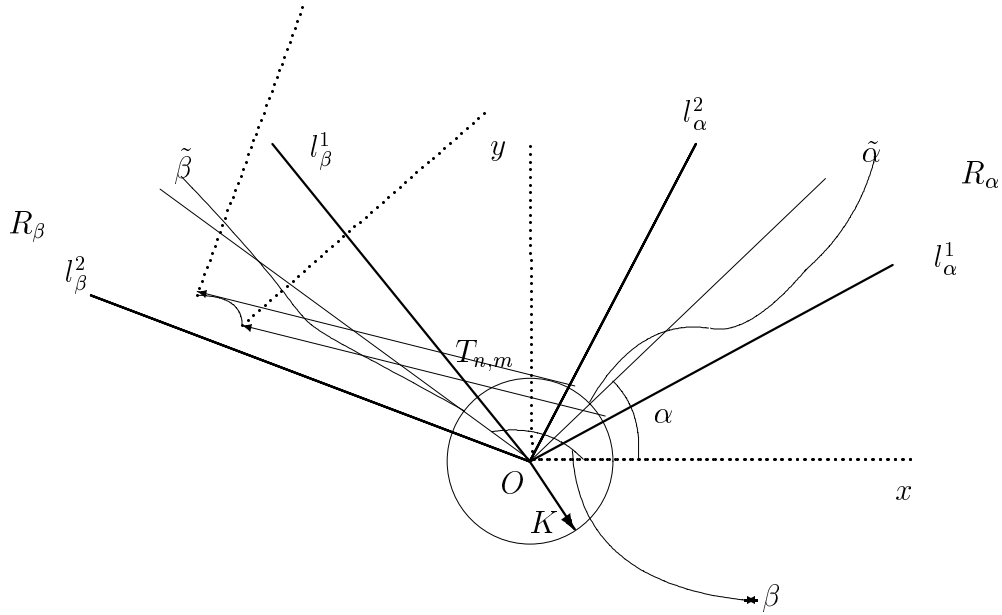


Figura 3.2: Interpretación geométrica de la demostración del lema 3.2.2.

Observación 3.3.1. Si $T' \in \tau_0$, entonces $T' \circ \tilde{\alpha}_u$ es otro levantamiento universal de α .

Definición 3.3.2 (curva cerrada y curva simple). Una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ es cerrada si $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Una curva cerrada $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ se dirá que es simple si $\alpha(0) = \alpha(1)$ y para cualesquiera t, t' distintos de $[0, 1]$ se tiene que $\alpha(t) \neq \alpha(t')$ a menos que $t = 0$ y $t' = 1$.

Proposición 3.3.1 (propiedades básicas). Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ una curva cerrada no homotópicamente nula y sea $\tilde{\alpha}_u$ un levantamiento universal de α , entonces se tiene:

- (a) La imagen de $\tilde{\alpha}_u$ se encuentra entre dos rectas paralelas racionales.
- (b) Si $\tilde{\alpha}_u(\mathbb{R})$ se encuentra en la región definida por las rectas racionales L_1 y L_2 , $\tilde{\alpha}_u(\mathbb{R}) \cap L \neq \emptyset$ siempre que L no sea paralela a L_1 .
- (c) La curva α es simple si y sólo si $\tilde{\alpha}_u$ es simple y para cualquier T en τ_0 , el conjunto $T \circ \tilde{\alpha}_u(\mathbb{R}) \cap \tilde{\alpha}_u(\mathbb{R})$ es o $\tilde{\alpha}_u(\mathbb{R})$ o el conjunto vacío.

Demostración: (a) Para ver esto construimos explícitamente $\tilde{\alpha}_u$. Primero levantamos la curva α y nos dará una curva $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2$ con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1)$.

La recta que pasa por $\tilde{\alpha}(0)$ y $\tilde{\alpha}(1)$ es racional de pendiente $\frac{m}{n}$ si se tiene que $T_{n,m}(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1)$. Es obvio que podemos encontrar rectas L_1 y L_2 paralelas a L que no corten a $\tilde{\alpha}$. En consecuencia $\tilde{\alpha}_u$ no puede cortar a L_1 ni a L_2 y si $\tilde{\alpha}_u$ cortara a L_1 o a L_2 $\tilde{\alpha}$ también lo haría.

- (b) Sea $p = ls(\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(1)) \cap L$. El punto p puede ser un $T_{n,m}^k(\tilde{\alpha}(0))$, en cuyo caso ya habríamos terminado o puede encontrarse en el segmento determinado por $T_{n,m}^k(\tilde{\alpha}(0))$ y $T_{n,m}^{k+1}(\tilde{\alpha}(0))$.

La recta L divide al plano en dos componentes conexas, una de ellas contendrá a $T_{n,m}^k(\tilde{\alpha}(0))$ y la otra a $T_{n,m}^{k+1}(\tilde{\alpha}(0))$. Debido a la conexión de la curva $\tilde{\alpha}_u$ deberá cortar a L en algún punto.

- (c) Si α es simple es claro que $\tilde{\alpha}_u$ es simple. Supongamos que α fuera simple y que se tuviera $T \circ \tilde{\alpha}_u(\mathbb{R}) \cap \tilde{\alpha}_u(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. En ese caso existirían t y t' tales que $\tilde{\alpha}_u(t) + n + mi = \tilde{\alpha}_u(t')$ y por lo tanto para algunos t_1, t'_1 :

$$\tilde{\alpha}(t_1) + n + mi = \tilde{\alpha}(t'_1)$$

De lo que se deduce que $n + mi = 0$ y $t_1 = t'_1$ y en consecuencia $T \circ \tilde{\alpha}_u = \tilde{\alpha}_u$.

Veamos el recíproco, es decir, demostremos que α es simple. Si suponemos que no $\alpha(0) = \alpha(1)$ y $\alpha(t) = \alpha(t')$ con $t \neq t'$ y $t, t' \notin \{0, 1\}$.

Ahora, por una parte se tiene que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0) + n + mi$ y por otra $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t') + k_1 + k_2i$ con (n, m) y (k_1, k_2) pares de enteros distintos de $(0, 0)$. Se tendría que $T_{k_1, k_2} \circ \tilde{\alpha}_u \cap \tilde{\alpha}_u \neq \emptyset$ y $T_{k_1, k_2} \circ \tilde{\alpha}_u \neq \tilde{\alpha}_u$ lo cual es una contradicción. \square

Definición 3.3.3 (curva de control). Sea S una sección local de Ψ en $w \in \mathbb{T}^2$ y supongamos que para un t_0 se tiene que $\Psi(t_0, w) \neq w$ con $[w, \Psi(t_0, w)] \cap (w, \Psi(t_0, w))_S = \emptyset$, entonces, $\gamma = [w, wt_0] \cup (w, wt_0)_S$ es una curva simple. Cuando γ no es homotópicamente nula, llamaremos al levantamiento universal $\tilde{\gamma}_u$ de γ una curva de control.

Observación 3.3.2. 1. Sea $\tilde{\gamma}_u$ una curva de control, entonces $\tilde{\gamma}_u$ divide a \mathbb{C} en dos componentes conexas.

2. Si $z_0 \in \tilde{\gamma}_u$ es tal que $p(z_0) \in (w, wt_0)_S$, entonces tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $z_0(-\varepsilon)$ cae dentro de una componente de $\mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}_u$ que denotaremos por Γ^- y $z_0\varepsilon$ cae dentro de la otra, denotada por Γ^+ .

Además Γ^+ y Γ^- no dependen del punto elegido $z_0 \in \tilde{\gamma}_u \cap \tilde{p}^{-1}(S)$.

Definición 3.3.4. Dado $z \in \mathbb{C}$ denotaremos por $O(z)$ al conjunto $\{zt : t \in \mathbb{R}\}$, por $O^+(z)$ a $\{zt : t \in [0, +\infty)\}$. Por último $O^-(z)$ será $\{zt : t \in (-\infty, 0]\}$.

Lema 3.3.1. *Sea $\tilde{\gamma}$ una curva de control, entonces Γ^+ y $\Gamma^+ \cup \tilde{\gamma}_u$ son positivamente invariantes por el flujo (es decir $\tilde{\Psi}(\mathbb{R}^+, \Gamma^+) \subset \Gamma^+$ y $\tilde{\Psi}(\mathbb{R}^+, \Gamma^+ \cup \tilde{\gamma}_u) \subset \Gamma^+ \cup \tilde{\gamma}_u$).*

Por otro lado, Γ^- y $\Gamma^- \cup \tilde{\gamma}_u$ son negativamente invariantes por el flujo (es decir $\tilde{\Psi}(\mathbb{R}^-, \Gamma^-) \subset \Gamma^-$ y $\tilde{\Psi}(\mathbb{R}^-, \Gamma^- \cup \tilde{\gamma}_u) \subset \Gamma^- \cup \tilde{\gamma}_u$).

Demostración: Sea $z \in \Gamma^+$ y supongamos que $O^+(z) \not\subset \Gamma^+$, sea τ el real positivo más pequeño tal que $z\tau \in \tilde{\gamma}_u$. Así que pasando ahora a \mathbb{T}^2 $p(z\tau) \in [w, w\tau]_S$ lo que implica que $z(\tau - \varepsilon) \in \Gamma^-$ para cualquier ε positivo suficientemente pequeño, lo que es una contradicción.

Ahora es claro que $\bar{\Gamma}^+ = \Gamma^+ \cup \tilde{\gamma}_u$ es también positivamente invariante. \square

Definición 3.3.5 (recurrencia). Una órbita del flujo diremos que es positivamente recurrente si dicha órbita está contenida en su ω -límite.

Una órbita del flujo diremos que es negativamente recurrente si ella está contenida en su α -límite.

Observación 3.3.3. *Cualquier órbita periódica es tanto positiva como negativamente recurrente.*

Teorema 3.3.1. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $O(p(z_0))$ es positivamente recurrente (respectivamente negativamente recurrente) y es no periódica, entonces $O^+(z_0)$ (respectivamente $O^-(z_0)$) no se encuentra entre dos rectas paralelas racionales.*

Demostración: Supongamos que $O(p(z_0))$ es positivamente recurrente y no periódica y supongamos que $O^+(z_0)$ se encuentre entre dos rectas paralelas racionales L' y L'' .

Llamemos $\{L_1, L_2, \dots, L_q\}$ las rectas paralelas a L' que se encuentran entre L' y L'' y para las que existe algún T de τ_0 tal que $T(L_i) = L'$. Podemos elegir L' y L'' de manera que $p(z_0) \in L_1$.

Debido a que $O(p(z_0))$ es positivamente recurrente, existe al menos un i tal que dado cualquier ε podemos encontrar $z' \in L_i$ satisfaciendo $z_0 \sim z'$ y $O^+(z_0) \cap S(z', \varepsilon) \neq \emptyset$, donde $S(z', \varepsilon) = \{z : |z - z'| < \varepsilon\}$. Consideremos dos casos:

Caso 1. (existe un i satisfaciendo la propiedad anterior, con $z_0 \notin L_i$)

Supongamos que $z_0 \in L_1$ y que $i = 2$, sea T una transformación de L_1 en L_2 . Por inducción vamos a probar que dado cualquier entero positivo m y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $z' \sim z_0$ tal que $z' \in T^m(L_1)$ y $O^+(z_0) \cap S(z', \varepsilon) \neq \emptyset$.

Para $k = 1$ está claro ya que lo estamos suponiendo como hipótesis. Supongámoslo cierto para todo $k \leq m$. Así que por una parte tenemos $z_1 \in L_2$ y $\tau > 0$ tal que $z_1 \sim z_0$ y $|z_0\tau - z_1| < \varepsilon$. Por la continuidad del flujo podemos elegir $\delta > 0$ tal que $S(z_0, \delta)\tau \subset S(z_1, \varepsilon)$. Usando que T es una isometría, vamos a mostrar que

$S(z', \delta)\tau \subset S(T(z'), \varepsilon)$ para todo $z' \sim z_0$. Esto es cierto debido a que: si $z' = T(z_0)$ entonces $S(z', \delta)\tau = S(T(z_0), \delta)\tau = T(S(z_0, \delta))\tau = T(S(z_0, \delta)\tau) \subset T(S(z_1, \varepsilon)) = S(T(z_1), \varepsilon) = S(z', \varepsilon)$.

Por la hipótesis de inducción existe $z_2 \sim z_0$ y $\tau' > 0$ tal que $z_2 \in T^m(L_1)$ y $|z_0\tau' - z_2| < \delta$. Así que $z_0(\tau' + \tau) \in S(T(z_2), \varepsilon)$ y $T(z_2) \in T^{m+1}(L_1)$. Debido a que $\lim_{m \rightarrow +\infty} d(T^m(L_1), L_1) = +\infty$, entonces $O^+(z_0)$ no puede estar entre L' y L'' .

Caso 2. (la figura 3.3 muestra la situación geométrica de este apartado de la prueba en \mathbb{C}) Si el caso 1 no se satisface tenemos $z_0 \in L_1$ y si $z' \sim z_0$ satisface que para $\varepsilon_1 > 0$ arbitrario $O^+(z_0) \cap S(z', \varepsilon_1) \neq \emptyset$ entonces $z' \in L_1$.

Como $O(z_0)$ no es recurrente porque un flujo en el plano no puede tener órbitas recurrentes que no sean órbitas periódicas o puntos críticos (teorema de Poincaré-Bendixson), existe una sección \tilde{S} de $\tilde{\Psi}$ en z_0 tal que $O(z_0) \cap \tilde{S} = z_0$ y $\tilde{S} \subset S(z_0, \varepsilon_1)$. Además eligiendo \tilde{S} suficientemente pequeña y utilizando que p es un homeomorfismo local entonces $S = p(\tilde{S})$ es una sección local de Ψ en $w = p(z_0)$. Como w es positivamente recurrente y no periódico, podemos encontrar $t_2, t_1 > 0$ satisfaciendo:

- (i) $wt_i \in S$
- (ii) $[w, wt_1] \cap (w, wt_1)_S = \emptyset$
- (iii) $wt_2 \in (w, wt_1)_S$

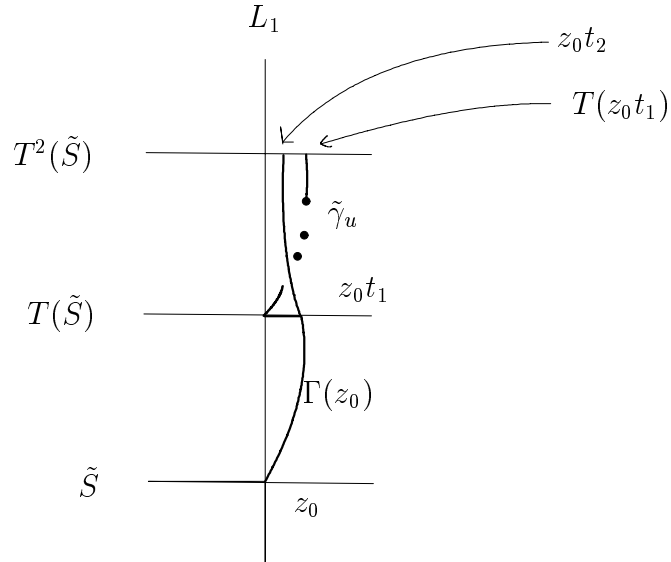


Figura 3.3: Situación geométrica de la prueba del teorema 3.3.1, caso 2.

Sea $\gamma = [w, wt_1] \cup (w, wt_1)_S$ que es simple por (ii). Si γ es homotópicamente nula, entonces $z_0 t_1 \in \tilde{S}$ que contradice la elección de \tilde{S} . Así que $\tilde{\gamma}_u$ es una curva de control a través de z_0 que se encuentra entre dos rectas paralelas a L_1 .

Es claro que $z_0 t_2 \in \Gamma^+ \cap T(\tilde{\gamma}_u)$ para algún $T \in \tau_0$. Además para un $\varepsilon > 0$ fijado, habiendo elegido t_2 suficientemente grande se tiene $|z_0 t_2 - z'| < \varepsilon$ donde $z' \sim z_0$. Por lo tanto es necesario que $T(L_1) = L_1$ y $T(\tilde{\gamma}_u) = \tilde{\gamma}_u$. En consecuencia $z_0 t_2 \in \Gamma^+ \cap \tilde{\gamma}_u = \emptyset$ lo cual es una contradicción y por tanto el segundo caso no se puede dar tampoco.

□

Teorema 3.3.2. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y A un compacto de \mathbb{C} . Supongamos que $p(z_0) \in \mathbb{T}^2$ genera una órbita positivamente recurrente y no periódica. Entonces existe un entorno V de z_0 y $\tau > 0$ tal que $Vt \cap A = \emptyset$ cuando $t > \tau$.*

Demostración: razonando de la misma manera que en el caso 2 de la demostración del teorema 3.3.1 se puede encontrar una curva de control $\tilde{\gamma}_u$ y una transformación T de τ tal que $A \cup z_0 \subset \Gamma^- \cap T(\Gamma^+)$.

La curva $\tilde{\gamma}_u$ se encuentra entre dos paralelas racionales L_1 y L_2 tal y como se muestra en la figura 3.3 y $T \circ \tilde{\gamma}_u$ se encuentra entre dos paralelas L_3 y L_4 a su vez paralelas a L_1 .

Según el teorema 3.3.1 la órbita $O^+(z_0)$ no se encuentra entre dos paralelas racionales luego debe cortar a $\tilde{\gamma}_u$, es decir, existe $\tau > 0$ tal que $z_0 \tau \in \Gamma^+$ y un entorno V de z_0 tal que $V\tau \subset \Gamma^+$. Como Γ^+ es positivamente invariante por el lema 3.3.1 obtenemos el resultado buscado. □

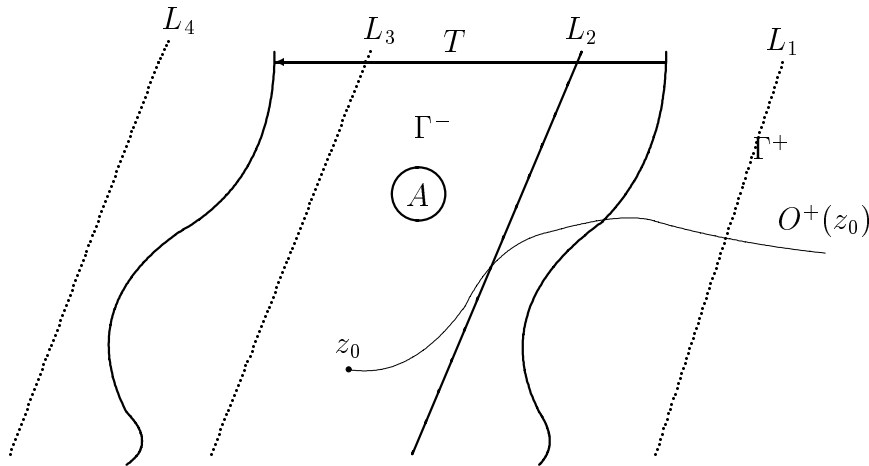


Figura 3.4: Interpretación geométrica de la demostración del teorema. 3.3.2

Corolario 3.3.1. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $p(z_0)$ positivamente recurrente y no periódico, entonces $|z_0 t| \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_0 t}{|z_0 t|}$ existe.*

Demostración: del teorema 3.3.2 se deduce que $|z_0 t| \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Por el teorema 3.2.1 se tiene entonces que existe el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_0 t}{|z_0 t|}$. \square

Teorema 3.3.3. *Sean z_0 y z_1 dos complejos tales que $p(z_0)$ y $p(z_1)$ son positivamente recurrentes y no periódicos. Entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_0 t}{|z_0 t|} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_1 t}{|z_1 t|}$$

Demostración: es una consecuencia del teorema anterior y del teorema 3.2.2. \square

3.4 La botella de Klein.

Teorema 3.4.1. *Sea $(\mathbb{B}^2, \mathbb{R}, \pi)$ un flujo continuo en la botella de Klein, entonces toda órbita positivamente recurrente es periódica.*

Demostración: sean $(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}, \hat{\pi})$ y $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, \tilde{\pi})$ los levantamientos de π al toro y al plano complejo respectivamente. Supongamos que $w \in \mathbb{B}^2$ genera una órbita positivamente recurrente y no periódica.

Sea $p_2^{-1}(w) = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}$. Claramente \hat{w}_1 y \hat{w}_2 no son periódicos porque si lo fueran también lo sería la órbita que genera w sobre la botella de Klein. La transformación $K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ introducida en la definición 3.2.1 define una aplicación sobre el toro $\hat{k} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ que permuta \hat{w}_1 y \hat{w}_2 .

La definición de \hat{k} es la siguiente: $\hat{k}(p(z)) = p(K(z))$. Hace falta comprobar que realmente esto está bien definido, pero es un simple ejercicio.

Al ser w positivamente recurrente se tiene que \hat{w}_1 o \hat{w}_2 están en el ω -límite de la órbita que pasa por \hat{w}_1 .

Si $\hat{w}_2 \in \omega(\hat{w}_1)$, aplicando \hat{k} se ve que $\hat{w}_1 \in \omega(\hat{w}_2) \subset \omega(\hat{w}_1)$, así que \hat{w}_1 y \hat{w}_2 son positivamente recurrentes y no periódicos.

Sea $z_1 \in p^{-1}(\hat{w}_1)$ entonces $p[K(z_1)] = \hat{w}_2$. Por ser $O(p(z_1))$ positivamente recurrente los teoremas anteriores nos dicen que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_1 t}{|z_1 t|}$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K(z_1 t)}{|K(z_1 t)|}$ existen y son complejos conjugados por la definición de K . Además ambas curvas $z_1 t$ y $K(z_1 t)$ no se cortan sobre el toro (porque si no, $\Gamma(\hat{w}_1)$ en \mathbb{B}^2 sería una curva de Jordan) y por el teorema 3.3.3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_1 t}{|z_1 t|} = 1$ o $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_1 t}{|z_1 t|} = -1$. A partir de ahora razonamos por reducción al absurdo suponiendo que $\text{Im}(z_1 t)$ está acotada superior o inferiormente.

Consideremos que el límite es $+1$. Por el teorema 3.3.1 $O^+(z_1)$ no se encuentra entre dos paralelas racionales. Nuestro objetivo es mostrar que $\text{Im}(z_1 t)$ no está acotada ni superior ni inferiormente para $t > 0$.

Admitiremos sin pérdida de generalidad que $\text{Re}(z_1 t) > \text{Re}(z_1)$ si $t > 0$. El semiplano $\{z : \text{Re}(z) > \text{Re}(z_1)\}$ está dividido en dos por $O^+(z_1)$. $K(z_1)$ se encuentra en una de las componentes y $T_{0,n}(k(z_1))$ en la otra para un n adecuado suficientemente grande.

$\text{Im}(K(z_1 t)) = -\text{Im}(z_1 t)$ e $\text{Im}(T_{0,n}(K(z_1 t))) = -\text{Im}(z_1 t) + n$, así que $\text{Im}(z_1 t)$ no tiene ni cota superior ni inferior ya que si no, podríamos encerrar $O^+(z_1)$ entre dos rectas racionales.

Así que $O^+(z_1)$ interseca a cualquier recta paralela al eje OX lo que contradice el lema 3.2.1, ya que, $t \rightarrow \hat{w}_1 t$ es una curva simple en el toro.

En el caso que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_1 t}{|z_1 t|} = -1$ se razona de manera análoga. □

Corolario 3.4.1 (teorema de Knesser-Markley). *Sea $(\mathbb{B}^2, \mathbb{R}, \pi)$ un flujo continuo en la botella de Klein sin puntos fijos, entonces posee una órbita periódica.*

Demostración: Sea M un conjunto minimal para π , que existe según vimos en el capítulo anterior usando el lema de Zorn y sea $w \in M$, w es recurrente, así que w es un punto periódico. □

Capítulo 4

El contraejemplo de Denjoy.

4.1 Introducción.

Esta sección viene motivada por el teorema de Schwartz. En el enunciado del teorema pedimos que el flujo en consideración sea de clase C^2 para reducir los conjuntos minimales a órbitas periódicas, puntos críticos o todo el toro. Una vez realizado ese trabajos cabe preguntarse qué es lo que pasa cuando debilitamos la hipótesis C^2 ¿Se mantendrá el mismo resultado? La respuesta es no.

Aunque nosotros planteemos el estudio en este orden, históricamente se resolvió al contrario. En 1932, el francés Arnold Denjoy propuso en [Den32] un ejemplo de un flujo en el toro de clase C^1 que posee un conjunto minimal perfecto y con interior vacío, que no es una órbita periódica ni un punto crítico.

Nuestro objetivo es reproducir en este capítulo someramente lo más importante de [Den32] para cerrar la pregunta planteada. Por otra parte cuestiones relacionadas con este tema tiene importancia vigente y han dado lugar a artículos relativamente recientes como [Hal81].

El artículo de Hall [Hal81] va enfocado totalmente a la construcción de un ejemplo de una función C^∞ de \mathbb{S}^1 en \mathbb{S}^1 de manera que contenga una órbita con ω -límite de interior vacío y con sólo dos puntos donde se anule la derivada. En este trabajo no se da el paso a ningún sistema dinámico continuo sobre el toro. Nosotros utilizaremos la función allí construida para dar un sistema dinámico continuo de clase C^2 sobre el toro que posea una órbita recurrente y cuyo ω -límite tenga interior vacío.

Otro ejemplo similar a este se puede leer en [PM82] página 178, se trata de un ejemplo dado por Cherry en 1938. No obstante el que damos sigue los mismos razonamientos que hizo Denjoy en los ejemplos introducidos en [Den32].

Otra referencia de interés para este tema es el capítulo 1 del libro de De Melo y Van Strien [MS93].

4.2 Planteamiento del problema.

El objetivo final es buscar un flujo sobre el toro que tenga órbitas recurrentes y cuyo ω -límite sea de interior vacío. Para ello definiremos una ecuación diferencial sobre el toro, pero en este caso no utilizaremos las cartas para no perder la interpretación geométrica, veremos el toro tal y como lo presentamos en el capítulo anterior, como el conjunto cociente de \mathbb{R}^2 por la relación de equivalencia $(\varphi, \theta) \sim (\varphi', \theta')$ si y sólo si $(\varphi - \varphi', \theta - \theta') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Geoméricamente si $M = (\varphi, \theta)$ entonces φ mide el ángulo existente entre el meridiano en el que se encuentra M y un meridiano origen. Por su parte θ mide dentro del meridiano en el que se encuentra M , el ángulo entre el paralelo origen y el paralelo donde está M . Para clarificar ver la figura 4.1.

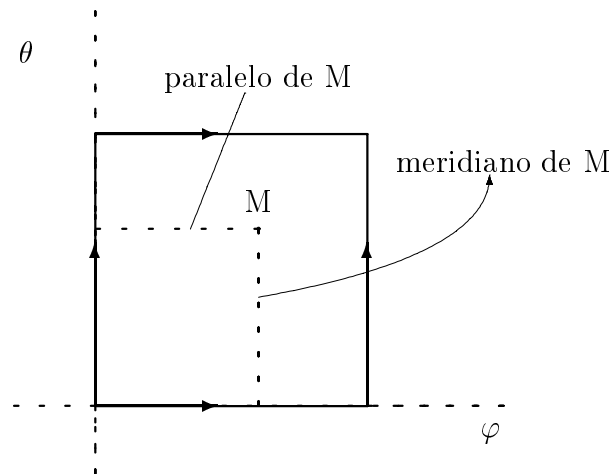


Figura 4.1: Interpretación geométrica de los parámetros φ y θ .

Así que nuestro objetivo es definir una ecuación diferencial en el plano que pase bien al cociente antes indicado. Poco a poco iremos precisando el significado de esta frase.

La ecuación que habrá que estudiar será:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt}(\varphi, \theta) = A(\varphi, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt}(\varphi, \theta) = B(\varphi, \theta) \end{cases}$$

al igual que Denjoy, escogeremos $B(\varphi, \theta) = 1$, de donde sigue que nuestro sistema es equivalente a la ecuación diferencial $\frac{d\theta}{d\varphi}(\varphi, \theta) = A(\varphi, \theta)$. Exigiremos que A sea

periódica de periodo 1 separadamente en φ y θ para que podamos verla como una ecuación diferencial sobre el toro. Para tener unicidad en las soluciones pediremos también que A sea localmente lipschitziana.

Según la teoría general de ecuaciones diferenciales, fijadas las condiciones iniciales (φ_0, θ_0) tenemos una solución única satisfaciendo dicha condición. Por otra parte, la solución $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0)$ estará definida en $-\infty < \varphi < +\infty$ (esto se ve utilizando el lema de Witner [NOR95], página 137).

Observación 4.2.1. *A pesar de la periodicidad de la función A , $u(\varphi, \varphi_0, \theta)$ mirada como función de φ no tiene por qué ser periódica. Si al aumentar φ en un entero q , $u(\varphi + q, \varphi_0, \theta_0)$ toma el mismo valor que $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0)$ aumentado en un entero p diremos que la solución u es una órbita periódica o un ciclo que se enrolla q y p veces alrededor del eje del toro y del círculo medio respectivamente.*

Pasamos ahora a estudiar algunas propiedades de la función u .

4.3 Propiedades de las soluciones en relación a sus condiciones iniciales.

En esta sección vamos a estudiar $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0)$ como función de φ_0 . En primer lugar hacemos notar que u como función de θ_0 es periódica de periodo 1 (1-periódica). Para ver esto simplemente hace falta darse cuenta que $u(\varphi_0, \varphi_0, \theta_0 + 1) = u(\varphi_0, \varphi_0, \theta_0) + 1$ y tendremos que $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0 + 1) = u(\varphi, \varphi_0, \theta_0) + 1$ para cualquier φ por la unicidad de soluciones. Definimos ahora la función $\nu(\varphi, \varphi_0, \theta_0) = u(\varphi, \varphi_0, \theta_0) - \theta_0$. ν es 1-periódica y se anula para $\varphi = \varphi_0$ como se comprueba fácilmente. Geométricamente todo esto que estamos poniendo quiere decir que a dos valores θ_0 y $\theta_0 + 1$ le corresponden en el toro la misma órbita.

Por otro lado la función u es continua respecto de las condiciones iniciales φ_0 y θ_0 . Esto es inmediato a partir de la teoría general de ecuaciones diferenciales ([NOR95], página 152).

Veamos brevemente que la función u es monótona creciente respecto a θ_0 . En primer lugar si $\theta'_0 - \theta_0$ no es un entero entonces $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0) - u(\varphi, \varphi_0, \theta'_0)$ no puede ser entero para ningún valor de φ , si no, las órbitas en el toro coincidirían, lo cual es absurdo. Así que $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0) - u(\varphi, \varphi_0, \theta'_0)$ está siempre comprendido entre los mismos enteros que θ'_0 y θ_0 . En particular la desigualdad $\theta_0 < \theta'_0$ implica $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0) < u(\varphi, \varphi_0, \theta'_0)$ para cualquier φ y en consecuencia: fijado φ , u crece con θ_0 .

Fijado φ_0 (meridiano origen) definimos ahora los valores:

$$\beta(\varphi) = \inf_{\theta_0 \in [0,1]} (\nu(\varphi, \varphi_0, \theta_0))$$

$$\gamma(\varphi) = \sup_{\theta_0 \in [0,1]} (\nu(\varphi, \varphi_0, \theta_0))$$

y

$$\Delta(\varphi) = \gamma(\varphi) - \beta(\varphi)$$

Con estas definiciones podemos ver que $\Delta(\varphi)$ es siempre inferior a 1. Si no, existirían tres números φ' , θ'_0 y θ''_0 con $\theta'_0 < \theta''_0 < \theta'_0 + 1$ para los cuales $\nu(\varphi', \theta''_0) - \nu(\varphi', \theta'_0) = \pm 1$.

En tal caso

$$u(\varphi_0, \varphi_0, \theta''_0) - u(\varphi_0, \varphi_0, \theta'_0) = \theta''_0 - \theta'_0$$

y

$$u(\varphi', \varphi_0, \theta''_0) - u(\varphi', \varphi_0, \theta'_0) = \theta''_0 - \theta'_0 \pm 1$$

así que debe existir un φ'' entre φ_0 y φ' tal que $u(\varphi'', \varphi_0, \theta''_0) - u(\varphi'', \varphi_0, \theta'_0)$ es un entero lo cual es imposible.

Recapitulando lo dicho hasta ahora tenemos:

Proposición 4.3.1. 1. $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0 + 1) = u(\varphi, \varphi_0, \theta_0) + 1$.

2. u es creciente en el argumento θ_0 .

3. u es continua respecto de θ_0 , φ_0 y φ .

4. $\Delta(\varphi)$ es inferior a 1.

Lo que vamos a hacer ahora es definir para cada entero n una aplicación g_n en el meridiano determinado por un punto $M(\varphi_0, \theta_0)$ del toro, \mathcal{M} , y que tomará valores también en \mathcal{M} . La definición es como sigue:

Definición 4.3.1 (función n -simo consecuente y n -sima diferencia). Denotaremos por $g_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ a la función n -simo consecuente que vendrá dada por

$$g_n(\theta) = u(\varphi_0 + n, \varphi_0, \theta)$$

para cada $\theta \in \mathcal{M}$.

Por otro lado definimos la función n -sima diferencia, $\Psi_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, como $\Psi_n(\theta) = g_n(\theta) - \theta$ para cualquier θ de \mathcal{M} .

Cuando n sea igual a 1 utilizaremos designaremos también a g_1 por g y a Ψ_1 por Ψ .

Observación 4.3.1. Teniendo en cuenta la definición anterior es fácil ver que se da la igualdad siguiente:

$$g_n = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ veces}}$$

Definición 4.3.2 (*n -simo consecuente de un punto*). Dado un punto $M(\varphi_0, \theta)$ de \mathcal{M} , denotaremos por M_n al punto $(\varphi_0 + n, g_n(\theta))$ y lo llamaremos n -simo consecuente de M .

Pasamos ahora a definir el concepto de número de rotación y a relacionarlo con la existencia o ausencia de órbitas periódicas.

4.4 Número de rotación.

Nuestro objetivo inmediato es demostrar que los sucesivos cortes de una órbita con el meridiano \mathcal{M} se van dando de una manera ordenada cuando el tiempo se hace grande. Dentro de ese orden, según sea, obtendremos soluciones periódicas o soluciones no periódicas con órbitas recurrentes.

Proposición 4.4.1. 1. g_n es continua y creciente.

2. Ψ_n tiene periodo 1.

3. Denotando $\beta_n = \frac{1}{n} \inf_{\theta \in [0,1]} \Psi_n(\theta)$ y $\gamma_n = \frac{1}{n} \sup_{\theta \in [0,1]} \Psi_n(\theta)$ tenemos $n(\gamma_n - \beta_n) < 1$.

Estas propiedades son una consecuencia inmediata de las propiedades de la función u antes demostradas.

Corolario 4.4.1. Si v es un arco sobre \mathcal{M} entonces $g_n(v)$ es un arco sobre \mathcal{M} . Además si dotamos a v de una orientación determinada entonces $g_n(v)$ posee la misma orientación.

Demostración: tomemos v un arco sobre \mathcal{M} de extremos P y Q de manera que el arco $PQ = v$ esté orientado directamente. Tenemos que ver que $g_n(PQ) = P_n Q_n$, pero esto es una consecuencia de ser u monótona respecto a la variable θ_0 . \square

Teorema 4.4.1. Siguiendo las notaciones anteriores se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ existen y son iguales. Además si llamamos α a dicho límite, se tiene:

$$\beta_p \leq \alpha \leq \gamma_p \quad (4.1)$$

Definición 4.4.1 (**número de rotación**). Llamaremos número de rotación al límite anterior α .

Demostración del teorema: tomemos p entero arbitrario mayor que 1 y menor o igual que n y hagamos la división euclídea de n por p , $n = pr + s$ con $0 \leq s < p$. Usando las definiciones de β_k y γ_k se tiene para todo θ de \mathcal{M} :

$$p\beta_p \leq g_{mp}(\theta) - g_{(m-1)p}(\theta) \leq p\gamma_p \quad (m = 1, 2, \dots, r)$$

y

$$\beta_1 \leq g_k(\theta) - g_{k-1}(\theta) \leq \gamma_1 \quad (k - rp = 1, 2, \dots, s)$$

De aquí, teniendo en cuenta que $\beta_i \leq \beta_j$ y $\gamma_j \leq \gamma_i$ para $j \geq i$ se deduce:

$$rp\beta_p + s\beta_1 \leq n\beta_n < n\gamma_n \leq rp\gamma_p + s\gamma_1$$

Dejando p fijo y haciendo tender n a $+\infty$ se tiene:

$$\beta_p \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \leq \gamma_p$$

Ya que $\gamma_p - \beta_p < \frac{1}{p}$, concluimos que β_n y γ_n tienen un límite común α que verifica la desigualdad $\beta_p \leq \alpha \leq \gamma_p$ para cualquier p . \square

Definición 4.4.2. Denotaremos por β'_n y γ'_n a los números

$$\beta'_n = n\alpha - n\beta_n \quad \gamma'_n = n\gamma_n - n\alpha.$$

Con estas definiciones se tiene:

$$\beta'_n + \gamma'_n < 1 \tag{4.2}$$

y

$$-\beta'_n \leq \Psi_n(\theta) - n\alpha \leq \gamma'_n \text{ para todo } \theta \text{ de } \mathcal{M} \tag{4.3}$$

Debido a que $\Psi_n(\theta) - n\alpha$ es continua y mirando la definición de β'_n y γ'_n tenemos que para algún θ el término del centro alcanza los valores de los extremos.

4.4.1 Número de rotación racional.

En esta sección vamos a ligar la racionalidad de α con la existencia de órbitas periódicas para la función $g_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ y en consecuencia la existencia de órbitas periódicas en el toro.

Teorema 4.4.1.1. *Existe una solución periódica de la ecuación diferencial que estamos considerando si y sólo si el número de rotación α es racional.*

Demostración: supongamos primero que entre las soluciones hay una que es periódica y supongamos que partimos de las condiciones iniciales (φ_0, θ_0) y que la solución se cierra sobre sí por primera vez sobre el meridiano \mathcal{M} para $\varphi = \varphi_0 + q$, habiendo aumentado θ en un entero p . Está claro que sobre esta solución si φ pasa de φ_0 a $\varphi_0 + rq$ entonces θ se incrementa en pr para cualquiera que sea r entero. De este valor particular de θ_0 deducimos $\alpha = p/q$.

Recíprocamente, situémonos en el caso $\alpha = \frac{p}{q}$ racional con p y q enteros. Tenemos $-\beta'_q \leq \Psi_q(\theta_0) - p \leq \gamma'_q$ con β'_q y γ'_q no negativos y alcanzados en $\Psi_q(\theta) - p$ y

$\Psi_q(\theta') - p$. Por lo tanto $\Psi_q(\theta_0) - p$ habrá de tomar el valor cero para algún θ'_0 . Es decir $\Psi_q(\theta'_0) = p$.

La solución $u(\varphi, \varphi_0, \theta'_0)$ es un ciclo y termina la demostración. \square

Vamos a hacer ahora un estudio de otras propiedades que se presentan cuando el número de rotación es racional. Observemos de partida que cualquier órbita periódica del sistema dará siempre una órbita periódica de la aplicación $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ y además el periodo será para cualquiera de estas órbitas cíclicas de g el mismo en virtud del número de rotación.

Sea $E = \{\theta' \in \mathcal{M} : \theta' \text{ engendra una órbita periódica}\}$. Este conjunto es cerrado ya que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de E (de periodo p) que tiende hacia θ , se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_p(\theta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n$ y en consecuencia $g_p(\theta) = \theta$, luego E es cerrado.

Definición 4.4.1.1 (contiguo). A cada componente conexa de $\mathcal{M} \setminus E$ la llamaremos contiguo de E .

Proposición 4.4.1.1. *Si v es un contiguo de E , entonces cualquier iterada por g de v es un contiguo de E . Además, si q es el periodo de cualquier órbita periódica de E entonces la q -ésima iterada de v ($g_q(v)$) coincide de nuevo con v . Tenemos pues los contiguos $v, g(v), g_2(v), \dots, g_{q-1}(v)$ distintos dos a dos y $g_{qr+s}v = g_s(v)$ para todo entero r y para todo $0 \leq s < q$.*

Demostración: se basa en la monotonía de g y en que cada contiguo tiende en sus dos extremos hacia un elemento de E . \square

4.4.2 Número de rotación irracional.

Vamos a pasar ahora a estudiar el caso en el que el número de rotación es irracional. Según se ha probado en el teorema 4.4.1.1 ninguna órbita será periódica. Establecemos ahora una aplicación f entre la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 y el meridiano \mathcal{M} que posee el punto $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ del toro.

Previamente definimos una aplicación de las imágenes de los consecuentes de M_0 a \mathbb{S}^1 y luego la extenderemos a todo el meridiano.

Definición 4.4.2.1. Definimos $f_1(M_0) = 0$ y si M_n es el n -ésimo consecuente de M_0 ($(\varphi_n, g_n(\theta_0))$) entonces $f_1(M_n) = n\alpha$. Denotaremos por μ_n a $f(M_n)$.

Proposición 4.4.2.1. *La aplicación f_1 conserva el orden geométrico, es decir, dados M_p, M_r y M_q sobre \mathcal{M} y sus correspondientes λ_p, λ_r y λ_q sobre \mathbb{S}^1 se tiene que si recorremos \mathcal{M} en sentido directo empezando en M_r y \mathbb{S}^1 empezando en λ_r el orden de sucesión geométrica de M_p, M_q por una parte y el de λ_p y λ_q es el mismo.*

Demostración: bastará demostrar que si $\bar{\theta}_p, \bar{\theta}_q$ y $\bar{\omega}_p, \bar{\omega}_q$ son los argumentos de M_p, M_q y λ_p, λ_q en $[0, 1)$ y $[0, 2\pi)$ respectivamente se tiene que las dos diferencias $\bar{\omega}_q - \bar{\omega}_p$ y $\bar{\theta}_q - \bar{\theta}_p$ son del mismo signo. Por otro lado basta establecer el resultado para $\theta_0 = 0$ y luego establecer el caso general utilizando el crecimiento de g_n respecto a θ_0 .

Debido a que $\theta_n - \theta_0$ y $n\alpha$ se encuentran entre los mismos enteros consecutivos por 4.2 y 4.3 se tiene que si

$$k < p\alpha < k + 1 \text{ y } h < q\alpha < h + 1$$

se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_p &= \theta_p - k & \bar{\theta}_q &= \theta_q - h \\ \bar{\omega}_p &= p\alpha - k & \bar{\omega}_q &= q\alpha - h \end{aligned}$$

De aquí se tiene $g_{q-p}(\bar{\theta}_p) = g_{q-p}(\theta_p - k) = \theta_q - k = \bar{\theta}_q + h - k$.

Igual que antes $g_{q-p}(\bar{\theta}_p) - \bar{\theta}_p$ y $(q-p)\alpha$ se encuentran entre los mismos enteros consecutivos. Ya que $g_{q-p}(\bar{\theta}_p) - \bar{\theta}_p = \bar{\theta}_q - \bar{\theta}_p + h - k$ y $(q-p)\alpha = \bar{\omega}_q - \bar{\omega}_p + h - k$ entonces $\bar{\theta}_q - \bar{\theta}_p$ y $\bar{\omega}_q - \bar{\omega}_p$ se encuentran entre los mismos enteros consecutivos y deben tener, por tanto, el mismo signo. □

Vamos ahora a definir la aplicación f que deseábamos utilizando las propiedades de f_1 . Para empezar fijaremos M_0 sobre \mathcal{M} y un punto μ_0 sobre \mathbb{S}^1 definido por el ángulo $t \in [0, 2\pi)$.

Definición 4.4.2.2. El conjunto $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus M_0$ lo ordenaremos como sigue: M es anterior (resp. posterior) a M' si y sólo si el arco MM' de \mathcal{M} que no contiene a M_0 es directo (resp. retrógrado). En el conjunto \mathbb{S}^1 definimos el mismo orden quitando el punto μ_0 .

Definición 4.4.2.3 (de f). Se trata de fijar las imágenes de $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Definimos primeramente $f(M_n) = \mu_n$ siendo μ_n el punto de \mathbb{S}^1 con argumento $t + 2n\pi\alpha$ y esto para cualquier entero n .

Tomemos ahora $M \notin (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Consideremos los conjuntos $\mathcal{A}_M = \{M_i : M_i \text{ es anterior a } M\}$, $\mathcal{P}_M = \{M_i : M_i \text{ es posterior a } M\}$ y $\mathcal{A}'_M = \{f(M_i) : M_i \text{ es anterior a } M\}$, $\mathcal{P}'_M = \{f(M_i) : M_i \text{ es posterior a } M\}$. Tomamos A_M (resp. A'_M) como la cota posterior de \mathcal{A}_M (resp. \mathcal{A}'_M) y P_M (resp. P'_M) como la cota anterior de \mathcal{P}_M (resp. \mathcal{P}'_M). Debido a la densidad de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en \mathbb{S}^1 y a la conservación del orden geométrico de $f|_{\cup_i M_i}$ tenemos $A'_M = B'_M$.

Tomaremos $f(M) = A'_M$.

Esta aplicación f que hemos definido es continua y la construcción la hemos desarrollado prácticamente tal cual hizo Denjoy ([Den32] página 345) en 1932 por

guardar la imagen geométrica. La única diferencia radica en que la que definió Denjoy fue una especie inversa de f que partía de \mathbb{S}^1 y tomaba valores en \mathcal{M}/\sim con \sim una relación de equivalencia sobre \mathcal{M} . Me ha parecido, sin embargo, más conveniente mantener \mathbb{S}^1 y \mathcal{M} como conjuntos inicial e imagen y guardar las ideas de Denjoy antes que utilizar el conjunto cociente y la relación de equivalencia por no complicar la definición.

Observación 4.4.2.1. *Para todo M' anterior a P_M y posterior a A_M se tendrá también $f(M') = A'_M$.*

Definición 4.4.2.4 (puntos de primera y segunda especie). Si $A'_M = P'_M$, el punto M se dice que es un punto de primera especie y cuando son distintos el punto M se dice que es un punto de segunda especie.

Definición 4.4.2.5 (conjunto derivado). Dado un subconjunto A de un espacio topológico X denotaremos por A' al subconjunto:

$$\{x \in X : \text{tales que } x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$$

El conjunto A' se denomina conjunto derivado de A .

Definición 4.4.2.6 (órbitas y semiórbitas). Definimos la órbita de M_0 $\Omega(M_0)$ para la aplicación $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ como el conjunto $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} M_n$ (en la definición 4.3.2 se introducen los símbolos M_n).

$\Omega^+(M_0) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$ lo llamaremos semiórbita positiva de M_0 .

$\Omega^-(M_0) = \bigcup_{n=-\infty}^{-1} M_n$ lo llamaremos semiórbita negativa de M_0 .

Los conjuntos derivados de los anteriores los denotaremos por $J(M_0)$, $J^+(M_0)$ y $J^-(M_0)$, es decir:

$$\Omega(M_0)' = J(M_0) \quad \Omega^+(M_0)' = J^+(M_0) \quad \Omega^-(M_0)' = J^-(M_0)$$

Definición 4.4.2.7 (conjunto invariante por una aplicación). Dada una aplicación sobre el espacio topológico $h : X \rightarrow X$, un subconjunto A de X se dice invariante por h si $h(A) = A$.

Observación 4.4.2.2. *Debido a que $\Omega(M_0)$ es invariante se tiene que el conjunto de sus puntos límites $J(M_0)$ es también invariante.*

Nuestro objetivo ahora es demostrar que el conjunto $J(M_0)$ es independiente del punto M_0 elegido. Para ello estudiaremos algunas propiedades en general de los conjuntos cerrados e invariantes.

Consideramos un conjunto F cerrado e invariante por g distinto de \mathcal{M} . Su complementario será un abierto invariante por θ . Igual que antes a cada una de las componentes conexas del complementario la llamaremos contiguo a F . Estas componentes tienen dos extremos que pertenecen a F y que determinan al contiguo en cuestión.

Proposición 4.4.2.2. 1. Entre dos contiguos a F con extremos no coincidentes existen una infinidad de otros contiguos a F .

2. $J(M'_0) \cap F^c = \emptyset$ para cualquier M'_0 perteneciente a un contiguo de F .

Demostración: 1. Supongamos que los dos contiguos vienen definidos por los arcos $A_k B_k$ y $A_p B_p$. Por ser los extremos diferentes, el complementario está formado por dos arcos cerrados con interior no vacío. Los sucesores (infinitos) del extremo A_k definen infinitos contiguos que estarán entre los dos de partida. Con lo cual tenemos el resultado.

2. Debido a que M'_0 pertenece a un contiguo de F , se tiene que cualquier conjunto contiguo a F contendrá a lo sumo un punto de la órbita de M'_0 . Por lo tanto $J(M'_0) \subset F$ y por tanto $J(M'_0) \cap F^c = \emptyset$.

□

Observación 4.4.2.3. La proposición anterior nos ha mostrado que si F es invariante cerrado, para cualquier $M'_0 \in \mathcal{M} \cap F^c$ se tiene $J(M'_0) \subset F$. Por otro lado si tenemos un M' de F , puesto a que F es cerrado e invariante se dará también $J(M') \subset F$. Por lo tanto:

$$J(M) \subset F \quad \forall M \in \mathcal{M}.$$

Proposición 4.4.2.3. Existe J cerrado invariante tal que:

1. $J = J(M_0)$ para cualquier M_0 de \mathcal{M} .
2. $J' = J$.
3. J tiene interior vacío en \mathcal{M} .
4. J es totalmente desconexo (cada componente conexa de él se reduce a un punto).

Demostración: la primera parte de la proposición ya está probada. Veamos la segunda. Sabemos que J y J' son cerrados e invariantes, usando la observación 4.4.2.3 se tiene que $J \subset J'$. Como además J es cerrado se tiene que $J' \subset J$ y por lo tanto $J = J'$.

En cuanto a la tercera parte basta observar que la frontera de cualquier conjunto cerrado invariante es también invariante y que si F es cerrado, su frontera no puede tener interior no vacío en \mathcal{M} . Con las dos observaciones anteriores, puesto que $G = \text{Fr}J$ contiene a J (por ser G invariante cerrado y aplicando la observación 4.4.2.3), se tiene que J tiene interior vacío en \mathcal{M} .

La cuarta parte es la unión de 2 y 3.

□

Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar un meridiano escogido arbitrariamente φ_0 ; hemos escogido un punto M_0 , lo hemos iterado y hemos sacado una serie de conclusiones sobre el conjunto $J(M_0)$ además de haber dado una correspondencia entre \mathbb{S}^1 y \mathcal{M} . El conjunto $J(M_0)$ vimos que no dependía del punto que escogiéramos sobre el meridiano \mathcal{M} . ¿Pero deberíamos poner $J(\varphi_0)$? Es decir ¿Son independientes las propiedades de J del argumento φ ? La respuesta la encontramos en la siguiente proposición:

Proposición 4.4.2.4. *Para todo meridiano del toro (que será definido por un ángulo φ) se tiene que $J(\varphi_0)$ cumple 2,3 y 4 de la proposición 4.4.2.3 si y sólo si $J(\varphi)$ cumple 2,3,4 de la proposición 4.4.2.3.*

Demostración: similarmente a lo que vimos en la proposición 4.3.1 de la sección 4.3, la función $G_\varphi(\theta_0) = u(\varphi, \varphi_0, \theta_0)$ es continua y creciente. Análogamente $G_0(\theta_\varphi) = u(\varphi_0, \varphi, \theta_\varphi)$ es función continua y creciente en θ_φ . Así que el conjunto perfecto y totalmente discontinuo $J(\varphi_0)$ se transforma por G_φ en $J(\varphi)$ con las mismas propiedades que el primero. El recíproco se hace igual utilizando la aplicación G_0 . \square

Antes de pasar a la construcción de la ecuación diferencial que tenemos por objetivo, enunciemos unas últimas propiedades sobre las soluciones de estas.

Proposición 4.4.2.5. *Las soluciones $u(\varphi, \varphi_0, \theta'_0)$ y $u(\varphi, \varphi_0, \theta''_0)$ correspondientes a dos valores iniciales perteneciendo al mismo contiguo de $J(\varphi_0)$ tienen una distancia angular $u(\varphi, \varphi_0, \theta'_0) - u(\varphi, \varphi_0, \theta''_0)$ tendiendo hacia cero cuando φ tiende hacia infinito.*

Esta proposición es una simple consecuencia de resultados anteriores.

4.5 Construcción de un sistema diferencial de clase C^0 .

En esta sección nos daremos una función $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ de partida y construiremos una ecuación diferencial del tipo de la que hemos estudiado en las secciones anteriores de manera que g será la ley de los sucesivos cortes en el meridiano \mathcal{M} de las soluciones de la ecuación. Por tanto el conjunto J ofrecerá todas las particularidades hasta ahora enunciadas y el número de rotación será irracional.

Supongamos fijado el conjunto J y la ley de sucesión g sobre él. Fijaremos sobre J^c la función g como una función lineal.

Vamos a construir las curvas soluciones del sistema y luego construiremos el sistema diferencial que tendrá a dichas curvas por soluciones. A partir de ahora supondremos fijo el meridiano origen \mathcal{M} con valor del parámetro $\varphi = 0$.

Definición 4.5.1. Dado $(0, \theta_0)$ en \mathcal{M} definimos la curva I_0 que pasa por dicho punto para valor del parámetro φ entre 0 y 1:

$$u(\varphi, 0, \theta_0) = \theta_0 \cos^2\left(\pi \frac{\varphi}{2}\right) + (g(\theta_0) - \beta) \text{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi}{2}\right) + \beta \varphi$$

con β independiente de φ y θ_0 .

Proposición 4.5.1. 1. $u(0, 0, \theta_0) = \theta_0$.

2. $u(1, 0, \theta_0) = g(\theta_0)$.

3. $\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\varphi, 0, \theta_0) = \beta + \pi \left(\frac{g(\theta_0) - \theta_0}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \text{sen}(\pi \varphi)$

4. $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ es continua respecto a φ sobre todo el arco I_0 y vale β en los extremos. Lo cual implica que podemos prolongar I_0 más allá del intervalo $0 \leq \varphi \leq 1$ uniéndolo con el arco I_1 que obtenemos de igual manera con puntos extremos $g(\theta_0)$ y $g^2(\theta_0)$.

Demostración: es una simple verificación que el lector puede hacer fácilmente. En cuanto al apartado 4 explicitamos seguidamente la prolongación de la curva I_0 más allá de $[0, 1]$. Para un φ entre k y $k + 1$ la prolongación de I_0 vendrá dada por:

$$u(\varphi, 0, \theta_0) = u(\varphi - k, 0, \theta_k) = g^k(\theta_0) \cos^2\left(\pi \frac{\varphi - k}{2}\right) + (g^k(\theta_0) - \beta) \text{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi - k}{2}\right) + \beta(\varphi - k)$$

□

Definición 4.5.2. A la curva que se obtiene prolongando I_0 para valores del parámetro φ en \mathbb{R} se la denotará por I .

Seguiremos denotando por u a la parametrización de I .

Observación 4.5.1. Las curvas definidas por las parametrizaciones $u(\varphi, \varphi_0, \theta_0)$ y $u(\varphi, 0, \theta_0 + 1) = 1 + u(\varphi, 0, \theta_0)$ coinciden sobre el toro, es decir, pasan bien al cociente y cuando φ se incrementa en una unidad la curva I pasa una sola vez por cada meridiano.

Antes de dar la definición de la función A necesitamos definir otra función que nos dará para cada $(\varphi, \theta) \in [0, 1]^2$ la segunda coordenada del corte de la curva I que pasa por (φ, θ) con la recta $\varphi = 0$. Se verifica fácilmente que la aplicación $h(\varphi, \theta, \theta_0) = u(\varphi, 0, \theta_0) - \theta$ igualándola a cero define a θ_0 como función implícita de (φ, θ) , siendo además la función implícita θ_0 continua.

Definición 4.5.3 (función A). Vamos a definir la función $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que nos dará la ecuación diferencial que buscamos. Para $(\varphi, \theta) \in [0, 1]^2$ definimos

$$A(\varphi, \theta) = \frac{\partial u}{\partial \varphi_1}(\varphi, 0, \theta_0(\varphi, \theta)) = \beta + \pi \left(\frac{g(\theta_0(\varphi, \theta)) - \theta_0(\varphi, \theta)}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \text{sen}(\pi\varphi) \quad (4.4)$$

Ahora extendemos periódicamente la función A a todo \mathbb{R}^2 .

Proposición 4.5.2. *La función $A(\varphi, \theta)$ es continua, periódica de periodo 1 en sus dos argumentos y las curvas I verifican la ecuación diferencial:*

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta)$$

Demostración: lo único que plantea dificultades es demostrar la continuidad de A , lo demás son simples comprobaciones. Debido a la periodicidad de A bastará ver la continuidad de A para valores de φ entre 0 y 1.

Por otra parte si nos fijamos en la definición (4.4) de A sobraría con que probemos que la función $\theta_0 : [\varphi_0, \varphi_0 + 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ que asigna a cada $(\theta, \varphi) \in [\varphi_0, \varphi_0 + 1] \times \mathbb{R}$ la segunda componente del corte de la curva I que pasa por (φ, θ) con el meridiano \mathcal{M} es una función continua. La comprobación de la continuidad de θ_0 es un fácil ejercicio, pero hacemos notar que aquí no tenemos garantizada la validez del teorema de la función implícita como se puede contrastar en [Fer92], página 141.

□

Proposición 4.5.3. *La ecuación diferencial $\frac{du}{d\varphi} = A(\varphi, \theta)$ tiene solución única.*

Demostración: para verlo demostraremos que en cada región R formada por las curvas I que unen un contiguo de J con su consecuente la función A verifica la condición de Lipschitz. Nos restringiremos a $[0, 1]^2$

Por ser g lineal sobre i , si $M_0 = (0, \theta_0)$ y $M'_0 = (0, \theta'_0)$ están en i se tiene, denotando $i_1 = g(i)$ $\theta'_1 = g(\theta'_0)$ y $\theta_1 = g(\theta_0)$:

$$\theta'_1 - \theta_1 = \frac{i_1}{i}(\theta'_0 - \theta_0)$$

y si $\theta = u(\varphi, \theta_0)$, $\theta' = u(\varphi, \theta'_0)$ se tiene:

$$\theta' - \theta = (\theta'_0 - \theta_0) \cos^2\left(\pi\frac{\varphi}{2}\right) + (\theta'_1 - \theta_1) \text{sen}^2\left(\pi\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A(\varphi, \theta') - A(\varphi, \theta) = \pi \frac{\theta'_1 - \theta_1 - \theta'_0 + \theta_0}{2} \text{sen}(\pi\varphi)$$

de donde

$$\frac{|A(\varphi, \theta') - A(\varphi, \theta)|}{|\theta' - \theta|} = \pi/2 \frac{|i_1 - i| \text{sen}(\pi\varphi)}{i \cos^2(\pi\frac{\varphi}{2}) + i_1 \text{sen}^2(\pi\frac{\varphi}{2})}$$

que alcanza el máximo para $\varphi\pi = \pi/2$, de donde el máximo será $K = \pi \left| \frac{i_1}{i+i_1} - \frac{i}{i+i_1} \right|$.

Si $\frac{i_1}{i+i_1}$ y $\frac{i}{i+i_1}$ no están acotados a la misma vez para todos los contiguos de J , la condición de Lipschitz en la variable θ globalmente no se satisface, pero sobre una región R si se satisface, con lo cual tenemos la condición de Lipschitz en R para la variable θ .

Veamos que es lo que pasa en la variable φ . Tomemos dos puntos (φ, θ) y (φ', θ) dentro de R y estimemos la diferencia $A(\varphi, \theta) - A(\varphi', \theta)$. Supongamos para nuestros cálculos que $\theta = u(\varphi, 0, \theta_0)$ y $\theta = u(\varphi', 0, \theta_0^*)$. Utilizaremos el punto auxiliar (φ', θ') dado por $(\varphi', u(\varphi', 0, \theta_0))$.

$$|A(\varphi, \theta) - A(\varphi', \theta)| \leq |A(\varphi, \theta) - A(\varphi, \theta')| + |A(\varphi, \theta') - A(\varphi', \theta)|$$

Como A satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable, el primer sumando lo podemos acotar por $K|\theta - \theta'|$. En cuanto al segundo:

$$\begin{aligned} & |A(\varphi, \theta') - A(\varphi', \theta)| \\ & \leq \left| \pi \left(\frac{\theta'_1 - \theta_0}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \text{sen}(\pi\varphi) - \pi \left(\frac{\theta'_1 - \theta_0}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \text{sen}(\pi\varphi') \right| \\ & \leq \left| \sup \left\{ \pi \left(\frac{\theta'_1 - \theta_0}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \right\} \right| |\text{sen}(\pi\varphi) - \text{sen}(\pi\varphi')| \\ & \leq M |\text{sen}(\pi\varphi) - \text{sen}(\pi\varphi')| \end{aligned}$$

Debido a que la función $\text{sen}(\varphi)$ es lipschitziana, tendremos que A es lipschitziana en la variable φ .

Uniendo todo ello: por M (punto de i) pasa una y sólo una curva integral de la ecuación diferencial.

¿Pero qué pasará con las soluciones de la ecuación que pasan por J ? Por la construcción se tiene que dos de ellas o son idénticas o tienen intersección vacía. Por otra parte, una curva que tenga puntos de $\mathcal{M} \setminus J$ no puede pasar por ningún punto de J debido a la condición de Lipschitz satisfecha en las regiones R . \square

Observación 4.5.2. *Si la condición de Lipschitz se verifica para A sobre el toro, entonces los cocientes $\frac{i_1}{i}$ y $\frac{i_1}{i}$ están acotados por números independientes del contiguo i elegido. Si fijamos J con contiguos i ordenados en orden decreciente de tamaño $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$ tales que $\frac{j_{n+1}}{j_n} \rightarrow 0$, la condición de Lipschitz no se verificará en ningún punto de las órbitas que pasan por J , a pesar de que el sistema diferencial tiene solución única. Esto constituye un ejemplo de un sistema diferencial en el que no se satisface la condición de Lipschitz global y tiene solución única.*

4.6 Construcción de una ecuación diferencial de clase C^1 .

Hasta ahora hemos construido un contraejemplo al teorema de Schwartz, pero el flujo resultante sería solamente continuo ya que A era continua y no podemos asegurar su derivabilidad. Nuestro propósito es construir un contraejemplo cuyo flujo sea de clase C^1 . En este caso deberemos construir J nosotros y no podremos elegirlo arbitrariamente. Para empezar vamos a construir J totalmente disconexo y sin puntos aislados.

Sea $\omega', \omega'', \dots, \omega^{(h)}, \dots$ una sucesión de argumentos de puntos distintos de $\Gamma = S^1$. Sobre Γ situamos el conjunto de puntos $\eta = \{(\omega^{(h)} \pm 2n\pi\alpha) : n \geq 0\}$. En el meridiano \mathcal{M} haremos corresponder cada uno de estos $\lambda_{\pm n}^{(h)}$ con un intervalo abierto $i_{\pm n}^{(h)}$ de longitud $\frac{\varepsilon^{(h)}}{(n+h+1)(n+h+2)}$. J será el complementario de estos intervalos.

Proposición 4.6.1. *Las razones $\frac{i_i}{i}$ valen:*

1. $\frac{n+h+1}{n+h+3}$ si i es un $i_n^{(h)}$ con $n \geq 0$.
2. $\frac{n+h+2}{n+h}$ si i es un $i_{-n}^{(h)}$ con $n \geq 1$.

La definición de $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ aquí es constructiva, intentaremos investigar las condiciones que debemos exigirles a los $i_n^{(h)}$ de manera que $g(i_n^{(h)}) = i_{n+1}^{(h)}$

Definición 4.6.1. Sobre cada contiguo $i = (\theta'_0, \theta''_0)$ elegimos $\frac{dg}{d\theta}(\theta_0) = 1 + k \frac{(\theta''_0 - \theta_0)(\theta_0 - \theta'_0)}{i^2}$ donde θ'_0 y θ''_0 son los extremos que determinan el contiguo.

Observación 4.6.1. $i_1 = \int_i \left(\frac{dg}{d\theta}\right) d\theta = i(1 + \frac{k}{6})$, de donde integrando y teniendo en cuenta la proposición 4.6.1:

$$k = -\frac{12}{n+h+3} \text{ sobre } i_n^{(h)} \quad (n \geq 0)$$

$$k = \frac{12}{n+h} \text{ sobre } i_{-n}^{(h)} \quad (n \geq 1)$$

Posteriormente necesitaremos en la construcción de nuestra ecuación diferencial que la función g sea un difeomorfismo, lo cual lo conseguiremos si $\frac{dg}{d\theta} \neq 0$. Así que hacemos notar las siguientes particularidades derivadas de los valores de k :

Observación 4.6.2. *En estas condiciones, sobre $i_n^{(h)}$ se tiene:*

$$1 \geq \frac{dg}{d\theta} \geq 1 - \frac{3}{n+h+3} \geq 1/4 \quad (n \geq 0)$$

y sobre $i_{-n}^{(h)}$

$$1 \leq \frac{dg}{d\theta} \leq 1 + \frac{3}{n+h} \quad (n \geq 1)$$

y sobre el conjunto J haremos $\frac{dg}{d\theta} = 1$.

Proposición 4.6.2. *La medida total de los arcos de la serie h es:*

$$\varepsilon^{(h)} \left[\frac{1}{(h+1)(h+2)} + \frac{2}{h+2} \right] = \varepsilon^{(h)} \frac{2h+3}{(h+1)(h+2)}$$

Demostración: es una consecuencia de la suma de la serie

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+h)(n+2+h)} = \frac{1}{h+2}$$

□

Proposición 4.6.3. *La medida de J será $1 - \sum_{h=1}^{+\infty} \varepsilon^{(h)} \frac{2h+3}{(h+1)(h+2)}$ y la denotaremos por ξ .*

Evidentemente para que pueda existir J necesitamos que ξ sea mayor o igual que 0. Además está claro que ξ será menor o igual que 1.

Definición 4.6.2 (del conjunto J). Tomemos un punto origen $\bar{\mu}$ sobre Γ con argumento \bar{t} , de manera que \bar{t} no esté en el conjunto de puntos antes elegidos η y hagámosle corresponder un origen \bar{M} de argumento $\bar{\theta}$ sobre \mathcal{M} .

A un punto $\mu(t)$ definido por el arco geométrico directo $\bar{\mu}\mu$ de medida $t - \bar{t}$ le haremos corresponder el punto o los puntos $M(\theta)$ de \mathcal{M} tales que:

$$\theta - \bar{\theta} = \xi(t - \bar{t}) + (\bar{\mu}\Sigma\mu)i_{\pm n}^{(h)} + \rho i_m^{(k)}$$

donde $(\bar{\mu}\Sigma\mu)$ denota la suma de las longitudes de los $i_{\pm n}^{(h)}$ que se encuentran en el arco $\bar{\mu}\mu$ y $\rho = 0$ si μ no está en η ; $\rho = 0, 1$ si μ pertenece a η y coincide con $\lambda_m^{(k)}$.

El conjunto de puntos imágenes de los $\lambda_m^{(k)}$ son los puntos que dan lugar al conjunto J .

Consideremos para este conjunto J la misma ecuación que hemos considerado en la sección anterior.

Fijado φ_1 y denotando por \mathcal{M}_1 a la recta $\varphi = \varphi_1$, la función $v = \theta_0|_{\mathcal{M}_1}$ es continua y monótona creciente tomando valores en \mathcal{M}_0 (recta $\varphi = 0$). La inversa de v es $w(\theta) = u(\varphi_1, 0, \theta)$. Para cerciorarse de estas afirmaciones es suficiente hacer un razonamiento similar al que se encuentra en la sección 4.3.

Por otra parte ya hemos visto que $A(\varphi, \theta)$ es continua en cualquier punto (φ, θ) según la proposición 4.5 y que da lugar a un sistema diferencial sobre el toro con solución única.

Queremos probar que

$$A(\varphi, \theta) = \frac{du}{d\varphi}(\varphi, 0, \theta_0(\varphi, \theta)) = \beta + \pi \left(\frac{g(\theta_0) - \theta_0}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \text{sen}(\pi\varphi)$$

es de clase C^1 . Respecto a la variable φ es claro que A es derivable y la derivada es continua.

Veamos lo que pasa con la variable θ . Nuestro propósito es calcular, si existe, la derivada $\frac{dA}{d\theta}(\varphi_1, \theta)$.

Volvamos a las funciones v y w introducidas anteriormente y apoyémonos en ellas para realizar la derivada de A respecto de θ . Primero calculamos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta}(\theta) &= \frac{\partial u}{\partial \theta_0}(\varphi_1, 0, \theta) \\ &= \cos^2\left(\pi \frac{\varphi_1}{2}\right) + \frac{dg}{d\theta}(\theta) \operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi_1}{2}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{dg}{d\theta}(\theta) - 1\right) \operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi_1}{2}\right) \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta}(\theta) &= \frac{1}{\frac{dw}{d\theta}(v(\theta))} = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{dg}{d\theta}(v(\theta)) - 1\right) \operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi_1}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dg}{d\theta}(v(\theta)) - 1\right) \operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi_1}{2}\right)} \end{aligned}$$

Ahora:

$$\frac{dA}{d\theta}(\varphi_1, \theta) = \frac{dA}{dv} \frac{dv}{d\theta} = \frac{\pi/2 \left(\frac{dg}{d\theta} - 1\right) \operatorname{sen}(\pi \varphi_1)}{1 + \left(\frac{dg}{d\theta} - 1\right) \operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Debido a que $\frac{dg}{d\theta} \geq 1/4$, $\frac{dA}{d\theta}$ es continua en θ y en φ . Sobre las soluciones que pasan por J se tiene que:

$$\frac{dA}{d\theta} = 0$$

Puede ser que el lector esté tentado a continuar con este proceso para encontrar un contraejemplo de clase C^2 . Esto es imposible según el teorema de Schwartz. Además la derivabilidad de A de segundo grado fallaría en las funciones $\frac{d^2g}{d^2\theta}$ en los puntos de segunda especie.

Es más, Denjoy demostró que si f es un difeomorfismo de \mathbb{S}^1 con f' continua y de variación acotada con el número de rotación irracional, entonces f es transitiva, lo cual quiere decir que cualquiera de sus órbitas tiene ω -límite con interior no vacío. En particular, si f' es derivable, será de variación acotada y tendremos que es imposible que f sea de clase C^2 .

4.7 Pseudo-contraejemplo de clase C^2 .

Hasta aquí hemos llegado y parece que Denjoy no dejó nada abierto. Efectivamente en su artículo deja completamente estudiados los sistemas dinámico que no tienen puntos críticos en el toro. Pero en el momento que se quita la restricción de la no existencia de puntos críticos aparecen nuevas cuestiones. Aquí nos planteamos una relativa a los ω -límites.

Denjoy construyó órbitas recurrentes en el toro soluciones de sistemas diferenciales de clase C^1 , pero ¿Existirán órbitas soluciones de sistemas diferenciales de clase C^2 que sean recurrentes? Si uno revisa la bibliografía no encuentra ejemplos que utilicen los mismos argumentos geométricos que Denjoy. Sólo hemos encontrado un flujo propuesto por Cherry en el año 1938. No obstante nos proponemos antes de estudiar más detalladamente el flujo de Cherry, sacarle un poco más de partido al trabajo de Denjoy utilizando el artículo de Richard Hall [Hal81].

Vamos a poder construir en esta sección un flujo con infinitas órbitas recurrentes. Esto supone el primer ejemplo de clase C^2 que plantea una diferencia respecto al plano (véase el corolario 1.5.2 en la página 20).

Por otra parte el apelativo de pseudo contraejemplo de clase C^2 lo damos porque después del teorema de Schwartz se puede pensar que los ω -límites, al igual que los conjuntos minimales si son recurrentes tienen interior no vacío. Este ejemplo muestra que dicha afirmación no es cierta.

Teorema 4.7.1 (Hall,[Hal81]). *Para todo número irracional $\rho \in [0, 1)$ existe un homeomorfismo $\theta_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha = \rho$, θ_1 es de clase C^∞ y θ_1 no tiene órbitas densas. Los puntos en los que $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ se anula son a lo sumo dos que denotaremos por θ_0^c y θ_0^{cc} (y como mínimo 1).*

Vamos a entrar ahora en la construcción del sistema que hemos dicho. Básicamente es el mismo que el de Denjoy. Siguiendo la definición 4.5.1 introducimos las curvas I de la misma manera parametrizadas.

Definimos el flujo análogamente al de la sección 4.5 y tendremos las mismas particularidades que allí se presentaban, además de ser las curvas I soluciones de nuestro sistema. Utilizaremos la misma notación que allí.

Definición 4.7.1. El conjunto de los puntos del plano $(k, \theta_0^c + k')$ y $(k, \theta_0^{cc} + k')$ para todo k, k' enteros lo denotaremos por \mathcal{C} .

Todos los puntos de \mathcal{C} van a ser puntos críticos del sistema que buscamos construir. Siguiendo el mismo procedimiento podemos definir para todo (φ, θ) la función $A(\varphi, \theta)$ igual que en el apartado anterior.

Observación 4.7.1. *Hacemos notar aquí que razonando igual que en la página 91, la función $A(\varphi, \theta)$ es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.*

Así que nos falla la derivabilidad sólo en los puntos de \mathcal{C} .

Debemos desacelerar el campo en estos puntos en los que la derivada no está definida. Para ello multiplicaremos las funciones A y B que definen el sistema, por una función escalar que se anulará sólo en los puntos de \mathcal{C} consiguiendo en ellos la derivabilidad que buscamos.

Definición 4.7.2. Introducimos las funciones necesarias para definir la ecuación diferencial.

$$A'(\varphi, \theta) = A(\varphi, \theta) \left[1 + \left(\frac{dg}{d\theta} - 1 \right) \text{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi}{2}\right) \right]^3 \left[1 + \left(\frac{dg}{d\theta} - 1 \right) \text{cos}^2\left(\pi \frac{\varphi}{2}\right) \right]^3$$

$$B'(\varphi, \theta) = B(\varphi, \theta) \left[1 + \left(\frac{dg}{d\theta_0} - 1 \right) \text{sen}^2\left(\pi \frac{\varphi}{2}\right) \right]^3 \left[1 + \left(\frac{dg}{d\theta_0} - 1 \right) \text{cos}^2\left(\pi \frac{\varphi}{2}\right) \right]^3$$

Proposición 4.7.1. Las funciones A' y B' son de clase C^2 .

Demostración: La prueba consiste en derivar las dos funciones anteriores respecto de θ tal y como se hizo en la página 91 y darse cuenta que en los puntos de \mathcal{C} se tiene que tanto A' como B' tienden hacia 0.

□

Planteamos ahora el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt}(\varphi, \theta) = A'(\varphi, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt}(\varphi, \theta) = B'(\varphi, \theta) \end{cases}$$

que tendrá las mismas órbitas que:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt}(\varphi, \theta) = A(\varphi, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt}(\varphi, \theta) = B(\varphi, \theta) \end{cases}$$

salvo aquellas que caigan en un momento determinado en \mathcal{C} . Tomemos M_0 de \mathcal{M} y n suficientemente grande para que M_n no caiga \mathcal{C} , con lo cual la órbita que pasa por M_n es recurrente y no trivial.

4.7.1 El ejemplo de Cherry.

Nos limitamos en esta sección a hacer una recopilación del resultado dado por Cherry seis años después del artículo de Denjoy [Den32]. El que hemos construido nosotros anteriormente tiene una construcción sencilla, pero se basa en [Hal81] del año 1981.

Para las demostraciones de los resultados que seguidamente enunciamos, nos remitimos a [PM82], páginas 181-188.

Definición 4.7.1.1. Diremos que un punto crítico de un flujo Ψ es un repulsor si no pertenece al α -límite de ninguna órbita.

Diremos que un punto crítico es una silla si existen órbitas para las cuales dicho punto está en el α -límite y otras para las cuales dicho punto está en el ω -límite.

Definición 4.7.1.2 (campos de vectores de Cherry). Durante esta sección denotaremos por \mathcal{C} al conjunto de campos vectoriales X definidos sobre \mathbb{R}^2 que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $X(x + n, y + m) = X(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y para todo (m, n) de \mathbb{Z}^2 .
2. X es transversal a la recta $\{0\} \times \mathbb{R}$ y tiene sólo dos singularidades p y s en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$. Además p es un atractor y s es una silla.
3. Existen dos números reales $a < b < a + 1$ tales que si $y \in (b, a + 1)$ entonces la órbita positiva de X que pasa por $(0, y)$ interseca a la recta $\{1\} \times \mathbb{R}$ en el punto $(1, f_X(y))$. Por f_X denotamos a la aplicación de Poincaré $f_X : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_1$.
Por el contrario, si $y \in (a, b)$, la órbita positiva que pasa por $(0, y)$ no corta $\{1\} \times \mathbb{R}$ y tiende hacia p .
4. $\lim_{y \rightarrow b} f'_X = +\infty$ y $\lim_{y \rightarrow a+1} f'_X = +\infty$.

A los campos vectoriales que satisfacen las condiciones anteriores los llamaremos campos de Cherry.

La construcción del ejemplo de Cherry se basa en la constatación de los siguientes hechos:

Lema 4.7.1.1. *El conjunto \mathcal{C} es no vacío.*

Lema 4.7.1.2. *Existe un campo vectorial de Cherry X que cumple $df_X(y) > 1$ para todo $y \in (b, a + 1)$.*

Lema 4.7.1.3. *Existe un campo vectorial de Cherry X que cumple $df_X(y) > 1$ para todo $y \in (b, a + 1)$ con número de rotación irracional.*

De los lemas anteriormente enunciados se sigue el siguiente teorema:

Teorema 4.7.1.1. *Existe un campo vectorial Y de clase C^∞ sobre el toro con la siguiente dinámica:*

- Y tiene dos singularidades, una silla p y un punto mixto s .
- El conjunto $W^s(p) = \{q \in \mathbb{T}^2 : p \in \omega_Y(q)\}$ es denso en \mathbb{T}^2 y el conjunto compacto $\Lambda = \mathbb{T}^2 - W^s(p)$ es transitivo, es decir, una de sus órbitas lo tiene como α y ω límite.

- Si $q \in W^s(p) \setminus \{p\}$, entonces se tiene $\omega_Y(q) = p$ y $\alpha_Y(q) \subset \Lambda$.
- Existe un círculo Σ transversal al campo Y tal que $\Sigma \cap \Lambda$ es un conjunto de Cantor.

Del teorema anterior deducimos la existencia de una órbita Γ solución del sistema diferencial generado por el campo vectorial Y de tal manera que $\omega(\Gamma) = \Lambda$ y por la propiedad 4 se tiene que Γ es recurrente, con lo cual tenemos el ejemplo que deseábamos. No obstante la imagen geométrica no queda clara de este flujo, presentamos por ello una figura donde ponemos de manifiesto la estructura del flujo de Cherry.

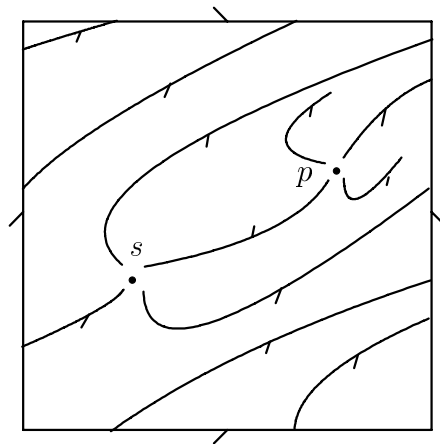


Figura 4.2: El flujo de Cherry.

4.8 Suavizando flujos.

Por todo lo visto hasta ahora en esta sección se percibe que hay un gran cambio entre los flujos de clase C^1 y los de clase C^2 o mayor ya que los segundos limitan mucho los conjuntos candidatos a ser minimales. Se trata ahora de ver qué pasa con un flujo que no admita conjuntos minimales tipo Cantor sino que posea sólo órbitas periódicas, puntos fijos y el toro. Parece lógico preguntarse si este flujo va a ser al menos de clase C^2 , esta pregunta tiene respuesta negativa en general pero sí se sabe que el flujo va estar estrechamente relacionado con un flujo de clase C^∞ .

Estos resultados fueron estudiados por Carlos Gutiérrez en 1979, para revisar la prueba de estos resultados que sólo enunciaremos nos remitimos al artículo original [Gut79]. Antes de pasar al enunciado del teorema que da cuerpo a esta sección introducimos el concepto de equivalencia topológica.

Definición 4.8.1 (equivalencia topológica). Dada una superficie \mathcal{M}^2 y dos flujos Φ y Ψ definidos sobre ella, diremos que Φ y Ψ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ que lleva órbitas de Φ a órbitas de Ψ conservando la orientación, lo cual quiere decir que para cada $p \in \mathcal{M}^2$ y para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $0 < t < \delta$ $h \circ \Phi(t, p) = \Psi(t', h(p))$ para algún $0 < t' < \varepsilon$.

Estamos en condiciones de enunciar ya el teorema de Gutiérrez que nos será de gran utilidad en el capítulo siguiente para suavizar flujos.

Teorema 4.8.1 (Gutiérrez). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ un flujo compacto sobre una superficie \mathcal{M}^2 de clase C^∞ . Entonces existe un flujo Ψ de clase C^1 sobre \mathcal{M}^2 que es topológicamente equivalente a Φ , además las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Cualquier conjunto minimal de Φ es trivial.*
2. *Φ es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^2 .*
3. *Φ es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^∞ .*

4.9 Sistema dinámico con una órbita densa en \mathbb{T}^2 .

Hasta aquí nos hemos limitado a que el conjunto ω -límite de una órbita intersección con \mathcal{M} fuera un conjunto perfecto con interior vacío. No hemos tenido en cuenta el caso de interior no vacío. Mostremos que se puede dar, con lo cual habremos demostrado la existencia del conjunto minimal que se preveía en el teorema de Schwartz.

Tomemos sobre \mathcal{M} la función $g(\theta_0) = \theta_0 + \alpha$ que es continua y de clase C^∞ con número de rotación α . Elijamos α irracional, con lo cual tendremos $\omega_g(\theta) = \mathcal{M}$ para todo punto θ de \mathcal{M} .

Usando el mismo tipo de argumentos que en las secciones 4.5 y 4.6 construimos el mismo sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt}(\varphi, \theta) = A(\varphi, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt}(\varphi, \theta) = B(\varphi, \theta) \end{cases}$$

que poseerá todas sus órbitas densas en \mathbb{T}^2 .

4.10 Orbitas densas en una superficie compacta arbitraria.

Se ha visto en la sección anterior que existe un flujo en el toro que posee órbitas densas en él. También sabemos que en la esfera esto no es posible según vimos en el capítulo 1 y que en la botella de Klein tampoco por el capítulo 3.

Se plantea por tanto un estudio sobre las superficies compactas y conexas que poseen un flujo definido sobre ellas con órbita densa y sobre aquellas que no lo poseen. Asombrosamente todas las superficies compactas y conexas salvo la esfera, la botella de Klein y el plano proyectivo poseen un flujo tal.

Este estudio está basado en el artículo [ST88b]. No obstante quedan abiertas cuestiones básicas como qué abiertos de una superficie compacta y conexa serán transitivos (existirá flujo con órbita densa en dicho abierto) y cuales serán intransitivos. En el citado artículo sólo se responde a esta cuestión en el caso que la frontera del abierto esté formada por un número finito de curvas de Jordan. Recogeremos esta cuestión en el capítulo reservado al ω -límite en superficies y la resolveremos dando una caracterización de dichos abiertos.

Pasamos ya a una exposición somera de [ST88b]. Comenzaremos con un resultado de geometría antes de entrar en el teorema que buscamos sobre la estructura asintótica de los flujos.

Definición 4.10.1 (superficie admisible). Diremos que una superficie diferenciable de clase C^r \mathcal{M}^2 , es admisible si se puede definir sobre ella un flujo Ψ que posea una órbita Γ con $\omega(\Gamma) = \mathcal{M}^2$.

Diremos que la superficie es admisible de clase C^k con $k \leq r$ si el flujo Ψ es de clase C^k .

Lema 4.10.1. 1. Si \mathcal{M}^2 es admisible de clase C^r , L es un subconjunto numerable y cerrado de \mathcal{M}^2 y la órbita Γ que tiene a toda la superficie por ω -límite no corta a L entonces $\mathcal{M}^2 \setminus L$ es admisible.

2. Supongamos que \mathcal{M}^2 y \mathcal{N}^2 son dos superficies diferenciables de clase C^r y $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{N}^2$ una sumersión de clase C^r de manera que $\mathcal{N}^2 \setminus f(\mathcal{M}^2)$ es compacta y con interior vacío. Entonces si \mathcal{M}^2 es admisible también lo es \mathcal{N}^2 .

Demostración: 1. La prueba de este resultado consiste en observar que si \mathcal{M}^2 es C^r admisible, entonces existe un flujo definido sobre \mathcal{M}^2 con una órbita Γ cuyo ω -límite es toda la superficie y cumple las condiciones del enunciado. Elegimos ahora una función positiva h de clase C^r que sea estrictamente positiva fuera de L y que se anule sólo sobre los puntos de L . El nuevo campo vectorial definido sobre $\mathcal{M}^2 \setminus L$ multiplicando el de partida por la función h posee a Γ como una de sus órbitas y además $\omega(\Gamma) = \mathcal{M}^2 \setminus L$.

2. El resultado se establece haciendo un razonamiento análogo al anterior. \square

Definición 4.10.2. Denotaremos por $T(n)$ con n un número natural a la superficie que se obtiene al quitarle a un toro n de sus puntos.

Observación 4.10.1. *El lema anterior junto con la definición de $T(n)$ y la sección 4.9 nos dice que esta superficie es admisible de clase C^∞ .*

Aparte de los resultados que hemos enunciado ya, debemos observar que cualquier superficie compacta conexa y orientable, que no sea la esfera, se puede obtener sumando conexamente un número determinado de toros. En cuanto a las superficies no orientables de género mayor o igual que tres se pueden obtener como sumas conexas de toros y una o dos bandas de Möbius.

En particular la superficie no orientable de género $2p$ se puede obtener como una suma conexa de $p - 1$ toros y dos bandas de Möbius y la de género $2p + 1$ como suma conexa de p toros y una banda de Möbius. Para convencerse de estos hechos nos remitimos al apéndice del capítulo del teorema de Schwartz.

Esta recopilación de resultados nos ha dejado el camino abierto para probar el teorema que queríamos demostrar:

Teorema 4.10.1. *Cualquier superficie compacta y conexa excepto la esfera, el plano proyectivo o la botella de Klein es admisible de clase C^∞ .*

Demostración: procedamos primero a la prueba para las superficies orientables. En este caso sólo es necesario darse cuenta que existe una sumersión $f : T(2k) \rightarrow \mathcal{M}^2$ en la esfera de k asas de manera que $\mathcal{M}^2 \setminus f(T(2k))$ es la unión de k curvas de Jordan. Por el lema 4.10.1 se obtiene el resultado.

En el artículo [ST88b] se anuncia la inmersión introducida como un hecho conocido, lo único que está claro es que es intuitivo, de todas formas, en el capítulo 5 desarrollaremos un apartado dedicado a la geometría de las superficies compactas, conexas y orientables, en particular la proposición 5.3.1.3 tendrá por consecuencia este resultado de la inmersión.

Veamos ahora si podemos conseguir que cualquier superficie no orientable, compacta, conexa y de género al menos tres sea admisible. Hemos visto que esta superficie se puede ver como una suma conexa de k toros con una o dos bandas de Möbius y cuya característica será $\chi = 2 - 2k - i$ con $i = 1$ ó 2 según tengamos una o dos bandas de Möbius; quitemos de la superficie las curvas Σ centrales de la bandas de Möbius y nos queda una superficie orientable (véase la figura 4.10) con frontera formada por una o dos curvas de Jordan. La nueva superficie que tenemos sería la misma que hubiésemos obtenido quitándole a una superficie orientable de género k uno o dos discos, con lo cual la superficie de partida es admisible.

En cuanto a la esfera sabemos por el capítulo dedicado al teorema de Poincaré-Bendixson que no es admisible, por otro lado el teorema de Knesser demostró que la

botella de Klein no es admisible. Por último, el plano proyectivo no es admisible ya que, si lo fuera se tendría levantando el flujo a la esfera que en ella existen abiertos que son ω -límites lo cual es imposible. \square

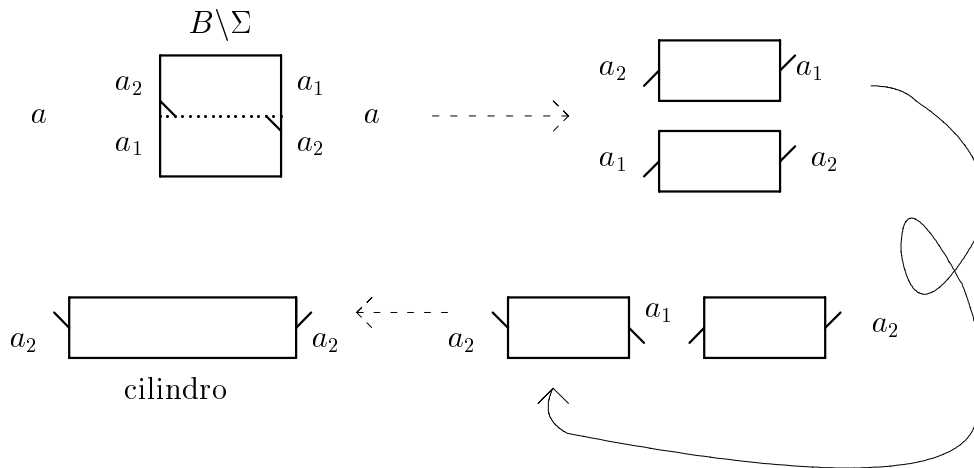


Figura 4.3: Operaciones sobre la banda de Möbius (B).

Capítulo 5

Estudio de los conjuntos ω -límites en superficies compactas y conexas.

5.1 Introducción.

Vamos a abordar en esta sección el estudio de los conjuntos ω -límites en superficies compactas, conexas y orientables. Hasta aquí lo único que habíamos visto en estas superficies eran sus conjuntos minimales para flujos de clase al menos C^2 , resultado conocido con el nombre de teorema de Schwartz que dio lugar al desarrollo del capítulo 2. Posteriormente, en el artículo dedicado al trabajo de Denjoy mostramos que los conjuntos minimales que Schwartz preveía aparecen efectivamente además de otros de naturaleza más complicada para flujos de clase C^1 .

Se trata aquí de dar un paso más y hacer una recopilación de los conjuntos que pueden ser ω -límites, de estudiarlos e intentar caracterizarlos. Alcanzaremos con éxito dicha labor en el caso de ω -límites generados por órbitas no recurrentes dando una caracterización similar a la que se da para el plano, pero dicha caracterización abre un problema de topología, cual es dar descripciones más sencillas de dichos conjuntos o ver que no se puede refinar nuestra definición.

Por otro lado tenemos las órbitas recurrentes, entendiéndose por recurrentes las órbitas que se encuentran dentro de su ω -límite. Dentro de estas haremos una nueva separación: aquellas en las que el ω -límite tenga interior no vacío y las otras, con ω -límite con interior vacío.

Las de ω -límite con interior no vacío llegaremos a clasificarlas de una manera satisfactoria utilizando el flujo irracional del toro y sobre todo muchos argumentos geométricos. En el caso de interior vacío se encuentran serias dificultades para la descripción topológica de estos conjuntos y sólo alcanzaremos resultados parciales.

5.2 ω -límites de órbitas no recurrentes.

Tal y como indica el título de esta sección vamos a estudiar aquí la estructura del conjunto ω -límite de aquellas órbitas Γ que satisfagan la propiedad $\Gamma \cap \omega(\Gamma) = \emptyset$. Se trata de buscar una condición similar a la que dimos en el capítulo del plano, pero pronto observamos en este paralelismo que las cosas no van a ser traducibles directamente y vamos a estar obligados a encontrar condiciones ligeramente diferentes.

Para plasmar un poco todo esto empezamos recordando que en el plano un conjunto F era el ω -límite de una órbita si y sólo si F era la frontera de un abierto conexo con complementario conexo o equivalentemente la frontera de un abierto conexo simplemente conexo, ya que en \mathbb{R}^2 se trata de nociones equivalentes. Si intentamos reproducir la prueba de [BJ96] probaremos con éxito que para órbitas no recurrentes su conjunto ω -límite va a ser la frontera de un abierto conexo con complementario conexo, pero si fijamos nuestra atención en estos conjuntos pronto vamos a evidenciar la existencia de conjuntos con esta propiedad que no pueden ser ω -límites.

Efectivamente, si dentro del toro tomamos uno de los dos abiertos A determinados por dos meridianos diferentes, se tiene que A es un abierto conexo cuyo complementario es conexo. Sin embargo tenemos que la frontera de A es no conexa y por lo tanto no es un ω -límite. La figura 5.1 refleja esta situación.

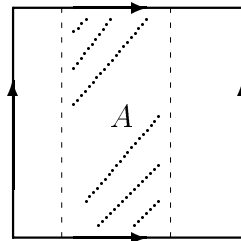


Figura 5.1: Abierto conexo con complementario conexo en \mathbb{T}^2 y frontera no conexa.

Una vez visto este ejemplo parece lógico plantearse si un ω -límite será una de las componentes conexas de la frontera de un abierto conexo con complementario conexo. En el ejemplo anterior, cada una de las dos componentes conexas pueden ser un ω -límite, pero tampoco va a ser esta la caracterización que necesitamos según se pone de manifiesto en la figura 5.2. En dicha figura hemos representado, en el toro, la frontera (conexa) de un abierto conexo con complementario conexo. Sin embargo, la frontera de dicho abierto no puede ser un ω -límite.

Por lo tanto es preciso encontrar una caracterización más restrictiva para un abierto cuya frontera sea candidata a ser un conjunto ω -límite. A tal efecto introducimos la definición de abierto conexo por caminos fronterizos. Antes de ello presentamos la noción de entorno de amplitud δ de la frontera de un conjunto.

Definición 5.2.1 (entorno de la frontera). Dado un abierto O con frontera $\text{Fr}O$ y dado $\delta > 0$, definimos el conjunto O_δ como

$$O_\delta = \{x \in O : d(x, \text{Fr}O) < \delta\}$$

Llamaremos a dicho conjunto entorno de amplitud δ de la frontera de O .

Definición 5.2.2 (Abierto conexo por caminos fronterizos). Dado un abierto conexo O de un espacio métrico X , diremos que es conexo por caminos fronterizos si existe una sucesión de componentes conexas $(C_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset (O_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tales que:

1. La sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente.
2. $C_{\delta_j} \subset C_{\delta_i}$ si $j > i$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$.
4. $\text{Fr}C_{\delta_j} \supset \text{Fr}O$.

Utilizando la definición que acabamos de dar de abierto conexo por caminos fronterizos vamos a dar la caracterización de ω -límites generados por órbitas no recurrentes en superficies:

Teorema 5.2.1. 1. *Supongamos fijado un flujo continuo sobre una superficie \mathcal{M}^2 $\Phi : \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}^2$ y supongamos que tenemos una órbita Γ del flujo tal que $\Gamma \cap \omega(\Gamma) = \emptyset$. Bajo estas condiciones se tiene que existe O , abierto conexo por caminos fronterizos, tal que:*

$$\omega(\Gamma) = \text{Fr}O$$

2. *Recíprocamente, si O es un abierto conexo por caminos fronterizos de \mathcal{M}^2 entonces existe un flujo $\Phi : \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}^2$ de clase C^∞ y una órbita Γ de dicho flujo tal que $\omega(\Gamma) = \text{Fr}O$.*

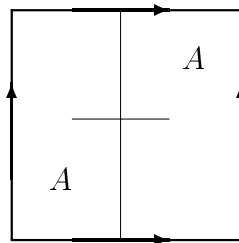


Figura 5.2: Abierto conexo con complementario conexo en \mathbb{T}^2 y frontera conexas.

Demostración: vamos a hacer sólo la prueba del primer apartado. En cuanto al segundo no podemos dar ninguna referencia, pero no la haremos por ser similar a un resultado análogo que daremos para \mathbb{R}^3 en el siguiente capítulo y que demostraremos allí. La razón de no realizar la prueba aquí es porque se necesitan unos resultados previos que guardan relación con los que se demostrarán para la prueba del teorema de Sidorov.

En cuanto a la primera parte, la prueba es realizar una similitud con lo que se hacía en [BJ96] para el caso del plano. Detallémoslo, tomemos el conjunto $A = \mathcal{M}^2 \setminus \omega(\Gamma)$ y hagamos su descomposición en componentes conexas:

$$A = \bigcup_{j \in J} O_j$$

la curva Γ debe encontrarse en una de las componentes conexas de A ya que $\Gamma \cap \omega(\Gamma) = \emptyset$. Tomemos O como esa componente conexa. Está claro que $\text{Fr}O = \omega(\Gamma)$; además, al igual que en el caso de sistemas dinámicos planos se cumple que $\mathcal{M}^2 \setminus O$ es conexo.

Se trata ahora de ver que el abierto O es conexo por caminos fronterizos. Para ver esto nos resta mostrar que satisface la condición de la cadena de la definición 5.2.2. Pero esto es claro tomando $\delta_n = \frac{1}{n}$ y para cada δ_n C_{δ_n} como la componente conexa de O_{δ_n} que contiene a Γ a partir de un cierto instante de tiempo. \square

Esto concluye la clasificación topológica de los ω -límites generados por órbitas no recurrentes en superficies compactas, conexas y orientables. Una posible generalización que se puede plantear es intentar que los puntos del ω -límite no sean críticos, ya que en nuestra construcción se verá en la sección 6.4 que son todos críticos.

Haciendo una similitud con el plano y viendo toda la teoría que en \mathbb{R}^2 hay desarrollada, nuestro resultado estaría en un estado de evolución similar al del teorema de Vinograd, lo cual sugiere que se podrán hacer mejoras sustanciales partiendo de aquí, se tratará de ver que estructura puede admitir el ω cuando metamos en él puntos no críticos.

Por otra parte sería deseable desentrañar la estructura de los abiertos conexas por caminos fronterizos, surgen varias preguntas al respecto, por ejemplo ¿Existirá algún conjunto conexo por caminos fronterizos de manera que para cada δ dado O_δ tenga infinitas componentes? Realmente estos abiertos no se van a comportar tan bien como los abiertos conexas simplemente conexas del plano, pero creemos que casos tan extremos como los de la pregunta anterior no se van a dar. Daremos una explicación de estos hechos más adelante a la luz de los resultados geométricos que iremos desarrollando.

5.3 ω -límites con interior no vacío.

Vimos en el capítulo del contraejemplo de Denjoy que el toro podía ser un ω -límite y que por lo tanto los ω -límites, al contrario que en el plano, no tienen por qué tener interior vacío. Se abren a este propósito varias preguntas básicas. Una de ellas es si existirán ω -límites con interior no vacío y que no rellenen a una superficie completamente. Otra sería si cualquier superficie va a ser un ω -límite de la cual ya nos hemos ocupado anteriormente.

Estas dos preguntas tienen respuesta positiva y la demostración la podemos encontrar en el artículo [ST88b]. No obstante la respuesta no es totalmente satisfactoria ya que allí lo que se hace es deformar el flujo irracional del toro para obtener flujos transitivos en cualquier superficie. Sin embargo no se entra en detalles sobre los abiertos que serán transitivos y aquellos que no.

Utilizando algunas técnicas de [ST88b] y otro tipo de argumentos geométricos vamos a conseguir desvelar cuando un abierto va a ser transitivo o no. Estudiaremos y demostraremos los resultados específicamente para el toro y después haremos una inducción sobre el género de la superficie para extender los resultados. Esta inducción nos la permitirá un lema de geometría que nos da el método para cortar una curva de Jordan a una superficie de género n y modificarla convenientemente para pasar a una superficie de género $n - 1$. Damos paso a un apartado de contenido geométrico.

5.3.1 Resultados geométricos sobre superficies.

Un estudio sobre la esfera.

La primera superficie que vamos a estudiar exhaustivamente es la esfera, puesto que algunas cuestiones que nos plantearemos en el toro las traduciremos a la esfera y como allí conocemos bien la estructura de los ω -límites tendremos fácilmente la respuesta para el toro.

Nuestro objetivo en la esfera, que denotaremos por \mathbb{R}_∞^2 , es ver que dado un abierto conexo U no trivial, $\emptyset \neq U \neq \mathbb{R}_\infty^2$, y contrayendo a un punto las componentes conexas del complementario obtenemos un espacio topológico homeomorfo a \mathbb{R}_∞^2 .

Suponemos pues fijado el abierto conexo y no trivial U y denotamos a su frontera por S . Descomponemos en componentes conexas los conjuntos:

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i$$

$$\mathbb{R}_\infty^2 \setminus (S \cup U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

Observación 5.3.1.1. Debido a que $\mathbb{R}_\infty^2 \setminus U_j$ es conexo se tiene que U_j es simplemente conexo y utilizando [Bur79], teorema 1.35, página 32 y el teorema de la aplicación de Riemann ([Bur79], teorema 9.1, página 293) se deduce que la frontera de cada U_j es conexa. En particular se tiene que para cada U_j existe un S_i tal que $\text{Fr}U_j \subset S_i$.

Observación 5.3.1.2. Definiendo C_i como la unión:

$$S_i \cup \bigcup_{j: \text{Fr}U_j \subset S_i} U_j$$

se tiene que el conjunto $\{C_i\}_{i \in I}$ es la descomposición de $\mathbb{R}_\infty^2 \setminus U$ en componentes conexas.

Vamos a definir ahora una relación de equivalencia \sim_U en \mathbb{R}_∞^2 de manera que dos puntos x e y estarán relacionados si y sólo si $x = y$ o existe C_i tal que x e y están simultáneamente en C_i . Denotaremos por $[x]_U$ a la clase de equivalencia que contiene a x y por $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$ al espacio cociente inducido por la relación \sim_U . Por otra parte la aplicación $\pi_U : \mathbb{R}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\infty,U}^2$ es la proyección que actúa $\pi_U(x) = [x]_U$.

Para abreviar la notación denotaremos $[A]_U = \bigcup_{x \in A} [x]_U$ y por A_U al conjunto de clases de equivalencia de los elementos de A . Es conveniente notar que mientras que A_U es un subconjunto de $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$ $[A]_U$ está incluido en \mathbb{R}_∞^2 .

Todo el desarrollo de este apartado va dirigido a probar que $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$ es homeomorfo a \mathbb{R}_∞^2 . Para ello vamos a introducir varias nociones nuevas entre las que están las de continuo y espacio de Janiszewski. Para ampliar o profundizar sobre esta exposición nos remitimos a [Kur68].

Definición 5.3.1.1 (Continuo). Un espacio topológico será un continuo si es Hausdorff, compacto y conexo.

Definición 5.3.1.2 (Espacio de Janiszewski). Un espacio topológico X será un espacio de Janiszewski si posee las propiedades:

1. X es localmente conexo.
2. X es continuo.
3. Para cada par de continuos $A_1, A_2 \subset X$ con $A_1 \cap A_2$ no conexo, existen puntos $x, y \in X \setminus (A_1 \cup A_2)$ que no están simultáneamente contenidos en ningún continuo de $X \setminus (A_1 \cup A_2)$

Teorema 5.3.1.1. Un espacio topológico X es homeomorfo a \mathbb{R}_∞^2 si y sólo si es de Janiszewski, contiene más de un punto y para cada $x \in X$ se tiene que $X \setminus \{x\}$ es conexo.

Demostración: para la prueba ver [Kur68], página 531 (teorema fundamental) y página 154. \square

Definición 5.3.1.3. Diremos que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es monótona cuando para todo conexo A de Y se tiene que $f^{-1}(A)$ también lo es.

Teorema 5.3.1.2. Si X es un espacio de Janiszewski, Y un Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y monótona entonces Y también es un espacio de Janiszewski.

Demostración: la prueba puede seguirse en [Kur68], teorema 9, página 507 asumiendo que Y es un continuo localmente conexo. Es necesario aplicar luego que si $f : X \rightarrow Y$ es continua, sobreyectiva y X es localmente conexo y continuo entonces Y es localmente conexo y continuo puesto que Y es Hausdorff. La prueba de esta afirmación se encuentra en [Kur68], teorema 9, página 259. \square

Proposición 5.3.1.1. 1. $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$ es Hausdorff.

2. $\mathbb{R}_{\infty,U}^2 \setminus \{X\}$ es conexo para cada $X \in \mathbb{R}_{\infty,U}^2$

3. $\pi_U^{-1}(A)$ es conexo para cada conjunto conexo $A \in \mathbb{R}_{\infty,U}^2$.

Demostración: 1. Sean $X, Y \in \mathbb{R}_{\infty,U}^2$ con $X \neq Y$, necesitamos encontrar entornos disjuntos $\mathcal{U}(X)$ y $\mathcal{U}(Y)$ de X e Y (en $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$). Si X y/o Y es un punto de U es inmediato, asumamos pues que X e Y son componentes de $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U$. Ya que $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U$ es compacto y Hausdorff, usando [Kur68], teorema 2, página 169, se prueba que X es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U$ que lo contienen (respecto a la topología de $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U$). Por lo tanto es posible encontrar conjuntos cerrados A y B con $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U = A \cup B$ y tal que $X \subset A, Y \cap B \neq \emptyset$.

La conexión de cada componente C_j de $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U$ conlleva que bien $C_j \subset A$ o bien $C_j \subset B$ (en particular $Y \subset B$). Así que existen abiertos disjuntos $X \subset V, Y \subset W$ con la propiedad de que cada una de las componentes de $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus U$ están incluidas en V o W . Por tanto V_U y W_U son abiertos de $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$ y es suficiente definir $\mathcal{U}(X) = V_U, \mathcal{U}(Y) = W_U$.

2. Hacemos notar que cada $U \cup C_j$ es conexo y también $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus C_j = U \cup \bigcup_{j' \neq j} C_{j'}$. En consecuencia $\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus X$ es conexo para cada $X \in \mathbb{R}_{\infty,U}^2$ lo que implica que $\mathbb{R}_{\infty,U}^2 \setminus \{X\}$ es conexo por la continuidad de π_U .

3. Esta propiedad se sigue del hecho que π_U es una aplicación cerrada y que X es conexo como subconjunto de \mathbb{R}_{∞}^2 para cada $X \in \mathbb{R}_{\infty,U}^2$ por [Kur68], teorema 9, página 131. \square

Teorema 5.3.1.3. $\mathbb{R}_{\infty,U}^2$ y \mathbb{R}_{∞}^2 son homeomorfos.

Demostración: resulta de la unión de los teoremas 5.3.1.1, 5.3.1.2 y proposición 5.3.1.1. \square

Cómo reducir una superficie de género n a una de género $n - 1$.

Como hemos mencionado antes investigaremos qué abiertos serán transitivos y cuales no por inducción sobre el género de la superficie en consideración. Se hace por tanto necesario pasar de alguna manera conveniente de una superficie de un género dado a otra de género menor.

Esta reducción se basa en el hecho intuitivo que relatamos a continuación. Si tomamos el toro y le cortamos un meridiano p se tiene que $\text{Fr}(\mathbb{T}^2 \setminus p) = p$. Si ahora cortamos un entorno U alrededor de p limitado por otros dos meridianos p_1 y p_2 se tiene que $\text{Fr}(U) = p_1 \cup p_2$. Pegamos seguidamente dos discos sin que intersequen entre ellos, uno a la componente p_1 y otro a p_2 obteniendo de nuevo una superficie compacta, conexa y sin borde que se puede demostrar tiene género menor, en particular se trata de una esfera. Es de gran utilidad revisar el capítulo 9 de [Hir88] (páginas 188-212) en el que se da una clasificación diferencial de las superficies o el apéndice del capítulo 2 de esta tesina donde damos un resumen de dicha clasificación. En cuanto a las técnicas de cortar y pegar aconsejamos una lectura el apartado 8.2 del libro [Hir88], páginas 184 y 185.

Nuestro propósito en este apartado es dar rigurosamente este procedimiento y hacer las demostraciones. Fijemos ya una superficie \mathcal{M}^2 compacta, conexa y orientable de género n y por tanto característica de Euler-Poincaré $2 - 2n$ (ver [Kin93], página 108).

Tomemos sobre \mathcal{M}^2 una curva de Jordan simple γ no homotópicamente nula que sólo supondremos continua y tomemos un entorno conexo U de γ de manera que γ divida a U en dos componentes conexas y que la frontera de U esté formada por dos curvas de Jordan simples. A las dos componentes de $U \setminus \gamma$ las denotaremos por U_1 y U_2 .

Realmente no vamos a quitar de la superficie los abiertos U_1 y U_2 para pegar en γ_1 y γ_2 dos discos porque sería difícil asegurar que podemos hacerlo sin que intersequen. Por ello vamos a meter la superficie \mathcal{M}^2 en \mathbb{R}^4 de manera que podamos pegar estos discos sin complicaciones de intersección entre ambos. Hacemos notar que esto es posible porque en principio por el teorema de clasificación no hay problema en suponer que \mathcal{M}^2 vive en \mathbb{R}^3 .

Consideramos una función continua sobre $\mathcal{M}^2 \setminus \gamma$ $d : \mathcal{M}^2 \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla:

1. para $(x, y, z) \in \mathcal{M}^2 \setminus (U_1 \cup \gamma)$ $d(x, y, z) = 0$.
2. para $(x, y, z) \in U_1$ se tiene el límite:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow \gamma, (x,y,z) \in U_1} d(x, y, z) = 1$$

Observación 5.3.1.3. *Utilizando el teorema de Whitney (ver el teorema 2.2.3, página 37) podemos considerar que la función d está definida sobre todo el espacio \mathbb{R}^3 e incluso la podemos definir de clase C^∞ .*

Consideramos en \mathbb{R}^4 el conjunto: $\mathcal{N}^2 = \{(x, y, z, k) : (x, y, z) \in \mathcal{M}^2 \setminus \gamma \text{ y } k = d(x, y, z)\}$.

Proposición 5.3.1.2. \mathcal{N}^2 es una superficie difeomorfa a $\mathcal{M}^2 \setminus \gamma$.

Demostración: para probar esta afirmación es necesario hacer dos comprobaciones, por una parte que \mathcal{N}^2 es una superficie y por otra parte encontrar el homeomorfismo.

Actuaremos en el orden inverso, daremos primero el homeomorfismo, para ello consideramos la aplicación $f : \mathcal{M}^2 \setminus \gamma \rightarrow \mathcal{N}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x, y, z, d(x, y, z))$ que es sin duda biyectiva. Veamos que también se trata de una aplicación continua, pero eso es claro ya que se trata de la restricción de la aplicación $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que asigna a cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el punto de \mathbb{R}^4 $(x, y, z, d(x, y, z))$. Falta probar que f es abierta. Para ver esto probaremos que la aplicación f^{-1} es continua, pero esto se ve claro ya que f^{-1} es la restricción de la función continua $G(x, y, z, k) = (x, y, z)$ a \mathcal{N}^2 .

Usando este homeomorfismo lo aprovechamos para darle estructura de superficie a \mathcal{N}^2 . Además se cumple que si la estructura de \mathcal{M}^2 fuera de clase C^r se tendría que \mathcal{N}^2 tiene también estructura de clase C^r y en dicho caso son difeomorfas de clase C^r . \square

Definición 5.3.1.4 (suma identificando la frontera). Supongamos que P y Q son dos superficies con frontera y que existe un difeomorfismo $f : \delta P \rightarrow \delta Q$ entre las fronteras de ambos. Llamaremos suma de P y Q identificando fronteras al espacio topológico que se obtiene haciendo el cociente de $P \cup Q / \sim_\delta$, donde la relación \sim_δ viene definida como definimos a continuación.

$x \sim_\delta y$ si y sólo si nos encontramos en uno de los casos siguientes:

1. $x = y$
2. $x \in \delta P$, $y \in \delta Q$ y además $y = f(x)$.
3. $x \in \delta Q$, $y \in \delta P$ y además $x = f(y)$.

El espacio $P \cup Q / \sim_\delta$ no sólo es un espacio topológico, sino que tiene estructura de superficie diferenciable con estructura diferenciable compatible con las de P y Q . El problema es que la estructura diferenciable de $P \cup Q / \sim_\delta$ no es única, pero sí tenemos que, aunque se puedan definir dos estructuras diferenciables, la superficies resultantes serían difeomorfas. (Ver teorema 2.1, capítulo 8, página 184 de [Hir88]).

Es interesante el caso en el que la frontera de las variedades se trata de curvas de Jordan, entonces, la suma identificando la frontera recibe el nombre de suma conexa. (Ver [Hir88], página 189).

El objetivo ahora es compactificar \mathcal{N}^2 añadiéndole dos discos sobre cada una de sus fronteras, que son curvas las curvas de Jordan γ_1^* y γ_2^* , definidas como sigue:

$$\gamma_1^*(t) = (\gamma_1(t), 1) \quad \gamma_2^*(t) = (\gamma_2(t), 0)$$

Para ello vamos a hacer dos sumas conexas de $\mathbb{S}^1 \setminus C_0$ con la superficie \mathcal{N}^2 , haciendo la primera suma con la curva γ_1^* y la segunda con γ_2^* . Donde C_0 denota una región compacta y conexa delimitada por una curva de Jordan difeomorfa a γ_1^* y γ_2^* . A la superficie diferenciable de clase C^r que obtenemos de esta manera la denotaremos por \mathcal{M}_r^2 , que será compacta, conexa y orientable.

Definición 5.3.1.5 (superficies reducidas). Dada una superficie compacta y conexa \mathcal{M}^2 , a la superficie que se obtiene del mismo modo que acabamos de describir se le llamará superficie reducida de \mathcal{M}^2 y la denotaremos como ya hemos dicho por \mathcal{M}_r^2 .

A la superficie \mathcal{N}^2 la llamaremos superficie reducida abierta de \mathcal{M}^2 y al difeomorfismo $f : \mathcal{M}^2 \setminus \gamma \rightarrow \mathcal{N}^2$ que hemos dado anteriormente lo denotaremos también por $f_{\mathcal{N}}$.

Si hiciéramos una reducción i -ésima reiterada de \mathcal{M}^2 los conceptos que acabamos de definir serían denotados por $\mathcal{M}_{r,i}^2$, \mathcal{N}_i^2 y el difeomorfismo por $f_{\mathcal{N},i}$ y estará definido como sigue:

$$f_{\mathcal{N},i} : \mathcal{M}_{r,i-1}^2 \setminus \gamma_i \rightarrow \mathcal{N}_i^2$$

Observación 5.3.1.4. Hacemos notar que para el caso $i = 1$ se tiene que $\mathcal{M}_{r,i}^2 = \mathcal{M}_r^2$, $f_{\mathcal{N},i} = f_{\mathcal{N}}$ y $\mathcal{N}_i^2 = \mathcal{N}^2$.

Vamos a ver ahora que género de \mathcal{M}_r^2 es una unidad menor que el de \mathcal{M}^2 . De este resultado no podemos dar referencias, por ello lo vamos a demostrar.

Proposición 5.3.1.3. Si el género de \mathcal{M}^2 es n entonces el género de \mathcal{M}_r^2 es $n - 1$.

Demostración: en nuestro caso, al tratarse de superficies orientables, si probamos que la característica de Euler-Poincaré de \mathcal{M}_r^2 ($\chi(\mathcal{M}_r^2)$) es $2 - 2(n - 1)$ habremos terminado, para ello debemos utilizar que $\chi(\mathcal{M}^2) = 2 - 2n$.

Tomemos primero una triangulación de la superficie \mathcal{M} de manera que cualquier arista de la triangulación que corte a γ esté toda entera contenida en γ . Induzcamos la triangulación sobre $\overline{\mathcal{N}^2}$ con la aplicación $f_{\mathcal{N}}$ de la proposición 5.3.1.2 o de la definición anterior.

Ahora tomemos una triangulación de cada uno de los dos casquetes de esfera (CS^1) que sumamos conexasmente con $\overline{\mathcal{N}^2}$ tomando la precaución de que en la frontera la triangulación sólo tenga vértices o aristas enteras y de manera que si $g_i : \gamma_i^* \rightarrow \beta_i$ son los difeomorfismos entre las curvas de Jordan de la frontera de \mathcal{N}^2 y la frontera de cada uno de los casquetes de circunferencia considerados, se tiene que g_i conserva tanto vértices como aristas.

Ahora lo tenemos fácil para computar la característica de Euler-Poincaré de \mathcal{M}_r^2 utilizando las triangulaciones que inducen las de los casquetes y la de \mathcal{N}^2 (inducida a su vez por \mathcal{M}^2). Pero antes vamos a tomar ciertos convenios para la notación.

Denotaremos por $C_{\mathcal{N}}$ al número de caras de la triangulación de $\overline{\mathcal{N}^2}$, $A_{\mathcal{N}}$ al de aristas y $V_{\mathcal{N}}$ al de vértices. Sus análogos en cada uno de los casquetes los denotaremos por C_i, A_i, V_i con $i = 1, 2$.

Por otra parte, dentro de las aristas y los vértices hay algunos que son comunes a dos variedades, el número de estos que son comunes lo denotamos por $A_{\mathcal{N},c}$ y $V_{\mathcal{N},c}$ en el caso de la superficie \mathcal{N}^2 y por $A_{i,c}$ y $V_{i,c}$ sus análogos para cada uno de los casquetes. Cambiando la c del subíndice por una n denotamos a las aristas y vértices no comunes.

Observemos que:

1. $A_{\mathcal{N},c} = V_{\mathcal{N},c}$.
2. $A_{i,c} = V_{i,c}$.
3. $V_{1,c} = V_{2,c} \quad A_{1,c} = A_{2,c}$.
4. $A_{\mathcal{N},c} = A_{1,c} + A_{2,c} = 2A_{i,c}$.
5. $C_{\mathcal{M}} = C_{\mathcal{N}}$.
6. $V_{\mathcal{M}} = V_{\mathcal{N},n} + \frac{1}{2}V_{\mathcal{N},c}$.
7. $A_{\mathcal{M}} = A_{\mathcal{N},n} + \frac{1}{2}A_{\mathcal{N},c}$.

Una vez fijada la notación y con las observaciones que acabamos de hacer, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathcal{M}_r^2) &= C_{\mathcal{M}_r} - A_{\mathcal{M}_r} + V_{\mathcal{M}_r} = \\
 & \quad C_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}} + V_{\mathcal{N}} + C_1 - A_1 + V_1 + C_2 - A_2 + V_2 - \\
 & \quad \quad \quad (-A_{1,c} + V_{1,c} - A_{2,c} + V_{2,c}) = \\
 & \quad C_{\mathcal{M}} - A_{\mathcal{M}} + V_{\mathcal{M}} - \frac{1}{2}A_{\mathcal{N},c} + \frac{1}{2}V_{\mathcal{N},c} + C_1 - A_1 + V_1 + C_2 - A_2 + V_2 - \\
 & \quad \quad \quad (-A_{1,c} + V_{1,c} - A_{2,c} + V_{2,c}) = \\
 & \quad \quad \quad \chi(\mathcal{M}^2) + \chi(\mathcal{CS}_1^2) + \chi(\mathcal{CS}_1^2) = \\
 & \quad \quad \quad 2 - 2n + 1 + 1 = 2 - 2(n - 1).
 \end{aligned}$$

Con lo cual el género de \mathcal{M}_r^2 es $n - 1$ como queríamos ver. \square

Contracción de componentes en superficies de género superior.

Hemos visto en un apartado anterior que si tomamos un abierto conexo sobre la esfera y contraemos las componentes conexas del complementario el espacio cociente que se obtiene es topológicamente una esfera. Este resultado admite una generalización a superficies de género mayor. El resultado es el siguiente:

Teorema 5.3.1.4. *Sea \mathcal{M}^2 una superficie compacta, conexa y orientable de género n sobre la que tenemos definido un abierto conexo U . Si en U podemos definir n curvas de Jordan no homotópicamente nulas con intersección vacía dos a dos, el espacio \mathcal{M}_U^2 definido de manera análoga al caso de la esfera es homeomorfo a \mathcal{M}^2 .*

Demostración: utilizando repetidamente $n - 1$ veces el lema 5.3.1.3 obtenemos después de hacer la relación de equivalencia una superficie homeomorfa a la esfera. Ahora invirtiendo el proceso de cortar y pegar, se tiene que \mathcal{M}_U^2 es homeomorfa a la superficie de género n y por tanto a \mathcal{M}^2 . \square

Abiertos conexos en el toro.

Necesitaremos saber la estructura de los abiertos del toro para demostrar los teoremas que siguen. Se impone por tanto la necesidad de fijarnos y estudiar su estructura. Básicamente vamos a distinguir dos tipos de abiertos conexos: aquellos que son difeomorfos a un abierto del plano y los que no lo son. La distinción entre ellos es muy sencilla de enunciar y se hace en base a las curvas de Jordan que sobre el abierto se puedan definir.

Si nos fijamos en el plano, dos curvas de Jordan pueden ser o bien disjuntas o bien han de tener un número infinito o par de intersecciones (no contamos las intersecciones que sean tangentes). Este hecho se puede constatar con el teorema de la curva de Jordan. En cambio en el toro existen curvas de Jordan que pueden intersecar en un solo punto. Otra diferencia sustancial es que en el plano una curva de Jordan divide al espacio en dos componentes conexas, mientras que el toro esto no es necesario.

Pues bien, en el toro vamos a basar la distinción de los abiertos en estas consideraciones, en particular: habrán abiertos que contengan dos curvas de Jordan que intersecan en un solo punto y los que no las posean. Los segundos serán siempre difeomorfos a abiertos del plano.

Teorema 5.3.1.5. *Un abierto conexo O sobre el toro que no posea dos curvas de Jordan intersecando no tangencialmente en un solo punto es un abierto difeomorfo a un abierto del plano.*

Demostración: es necesario distinguir dos casos en la prueba, en el primero supondremos que en O se puede definir una curva de Jordan γ no homotópicamente nula.

En este caso cortamos la curva γ y nos queda el abierto $O \setminus \gamma$ dentro de $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ descompuesto en dos componentes conexas O_1 y O_2 . Realizamos la suma conexa de $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ consigo misma y obtenemos en dicha suma ($\mathbb{T}^2 \setminus \gamma \# \mathbb{T}^2 \setminus \gamma$) dos copias de O_1 y otras dos de O_2 . Tomamos $\tilde{O} = \tilde{O}_1 \cup \tilde{O}_2$, donde \tilde{O}_1 y \tilde{O}_2 son las copias de O_1 y O_2 en $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma \# \mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ que poseen frontera común y que es parte de la frontera por donde hacemos la suma conexa. Claramente O es difeomorfo a $\tilde{O}_1 \cup \tilde{O}_2 \cup \gamma$ y por lo tanto es difeomorfo a un abierto del plano, ya que $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma \# \mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ es difeomorfo a un cilindro.

En el segundo caso se tiene que en O no existe ninguna curva de Jordan homotópicamente nula. En este caso tomamos una curva de Jordan no homotópica al elemento neutro por la que cortamos el toro (no estará por tanto contenida en el abierto O aunque sí que puede cortarlo). Descomponemos en una cantidad numerable de componentes conexas el abierto $O \setminus \gamma$.

Vamos a ordenar dichas componentes indizadas por los números enteros, antes de ello separemos la frontera γ en dos copias utilizando el difeomorfismo $f_{\mathcal{N}}$ introducido en el apartado de la reducción del género. En realidad lo que estamos haciendo es trabajar en la superficie reducida abierta \mathcal{N} y las componentes conexas inducidas por la aplicación $f_{\mathcal{N}}$. El objetivo de esta astucia no es otro que el de tener para cada una de las componentes de $f_{\mathcal{N}}(O \setminus \gamma)$ dos tipos de frontera común con las dos copias de γ en $\overline{\mathcal{N}}$.

Llamemos a las copias en las que se desdobra γ por γ_1^* y γ_2^* y ahora ordenemos las componentes por la aplicación h :

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Componentes de } O \setminus \gamma$$

de manera que la imagen inversa por f de la frontera de $f_{\mathcal{N}}(h(n))$ en γ_2^* es común con la imagen inversa de $f_{\mathcal{N}}(h(n+1))$ en γ_1^* .

Antes de continuar haciendo consideraciones sobre h acerca de la buena definición hacemos notar que el conjunto de partida pudiera no ser \mathbb{Z} sino un subconjunto de él, pero aquí nos situaremos en el caso en que el conjunto de partida es todo \mathbb{Z} , que es el caso más difícil.

La aplicación h está bien definida por inducción. Ahora sólo nos queda por dar el difeomorfismo entre el abierto O y un abierto del plano, para ello consideramos una suma conexa de cilindros $\#_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}$ y definimos el difeomorfismo entre O y un abierto del cilindro como sigue:

$$g : O \rightarrow \#_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}$$

a cada componente conexa $h(n)$ de $O \setminus \gamma$ la llevamos al cilindro n -simo, de manera que la aplicación g es la identidad en cada una de las componentes y en la frontera de dos componentes diferentes la aplicación g es trivialmente diferenciable. \square

Este teorema también puede enunciarse en términos de homeomorfismos y lo

utilizaremos en estos términos para algunos resultados que demostraremos sobre ω -límites.

Teorema 5.3.1.6. *Un abierto conexo O sobre el toro que no posea dos curvas de Jordan intersecando no tangencialmente en un solo punto es un abierto homeomorfo a un abierto del plano.*

Demostración: la parte directa es una consecuencia del anterior. En cuanto a la condición suficiente, la prueba se basa al igual que antes en el teorema de la curva de Jordan. \square

Abiertos conexos en superficies compactas, conexas y orientables

¿Será cierto el teorema 5.3.1.5 en otras superficies orientables que no sea el toro? La respuesta va a ser sí y utilizaremos las mismas técnicas que antes. Puede que el lector empiece a pensar que esta maraña de resultados topológicos no conduce a ningún sitio pero serán de gran utilidad en las secciones siguientes para probar el teorema de estructura topológica de ω -límites con interior no vacío en superficies. Será éste ya el último resultado topológico antes de volver al tema central de la tesina.

Teorema 5.3.1.7. *Un abierto conexo O sobre una superficie compacta, conexa y orientable que no posea dos curvas de Jordan intersecando en un solo punto es un abierto difeomorfo a un abierto del plano.*

Demostración: daremos las ideas principales para proceder a la prueba de este resultado, que serán otra vez parecidas a las que hemos utilizado en el teorema anterior, pero aquí actuaremos por inducción sobre el género de la superficie ya que tenemos el resultado establecido para el toro. Consideramos igual que en la demostración del teorema 5.3.1.5 dos casos, en el primero suponemos que existe en O una curva de Jordan no homotópicamente nula y la prueba transcurre por los mismos cauces que aquella. En el segundo caso consideramos que no existe una tal curva de Jordan y tomamos una arbitraria por la que cortamos la superficie, nos podemos encontrar ante dos posibilidades:

1. γ no interseca al abierto O , en cuyo caso se tiene que O vive en una superficie de género menor y por lo tanto por la hipótesis de inducción se tiene el resultado.
2. γ interseca al abierto O . Aquí se procede como en el caso análogo de la prueba del teorema anterior teniendo en cuenta la hipótesis de inducción.

\square

Igual que en el apartado anterior, enunciaremos la caracterización en términos de homeomorfismos:

Teorema 5.3.1.8. *Un abierto conexo O sobre una superficie compacta, conexa y orientable que no posea dos curvas de Jordan intersecando en un solo punto es un abierto homeomorfo a un abierto del plano.*

Una nota sobre los abiertos conexos por caminos fronterizos.

Habíamos dado el teorema de estructura topológica de ω -límites de órbitas no recurrentes introduciendo el concepto de abierto conexo por caminos fronterizos. A la luz de los resultados anteriores vamos a demostrar algunas de las propiedades de estos conjuntos, en particular damos respuesta a la pregunta que nos planteábamos sobre la infinitud de componentes en los conjuntos O_δ (es aconsejable tener presente la sección 5.2).

Proposición 5.3.1.4. *Dado un abierto O conexo por caminos fronterizos sobre una superficie orientable de género g se tiene que el número de componentes conexas de O_δ es a lo sumo $g + 1$ a partir de δ suficientemente pequeño.*

Demostración: cortemos todas las curvas de Jordan de O no homotópicamente nulas de manera que lo convirtamos en un abierto plano, lo cual es posible a la luz de los teoremas precedentes. Cada vez que cortamos una curva de Jordan y pegamos dos discos descende el género de la superficie con la que operamos en una unidad y el abierto inducido en la superficie reducida junto con los discos que pegamos va a tener a lo sumo una componente conexa más. Como mucho podemos cortar g curvas de Jordan de manera que el transformado de O se convierte en un abierto plano con a lo sumo $g + 1$ componentes conexas.

Por la condición de ser O conexo por caminos fronterizos se tiene que una de esas componentes \mathcal{O}_i cumple que $\text{Fr}\mathcal{O}_i \supset \text{Fr}O$. Sabemos además que cualquier \mathcal{O}_j es un abierto conexo simplemente conexo del plano y por lo tanto como cada una de las componentes de O_δ estará dentro de un \mathcal{O}_j se tiene que a lo sumo tendremos $g + 1$. \square

Hacemos notar que la cota anterior no se puede mejorar ya que en el toro si tomamos el abierto $O = \mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ donde γ denota un paralelo cualquiera, se tiene que para δ suficientemente pequeño O_δ tiene dos componentes conexas. Ejemplos similares se pueden dar en la esfera de n -asas.

A la vista del teorema anterior podemos redefinir la noción de abierto conexo por caminos fronterizos de manera que sea más fácil de entender, vamos a ello.

Es conveniente recordar primero la definición que dimos en la página 103, definición 5.2.2. Aquella definición va a ser equivalente a la siguiente según los razonamientos que hemos hecho al principio de este apartado.

Definición 5.3.1.6 (abierto conexo por caminos fronterizos). Dado un conjunto O , abierto y conexo de un espacio métrico X , diremos que es conexo por

camino frontera si existe para cada $\delta_n = \frac{1}{n}$ una componente conexa C_{δ_n} de O_{δ_n} tal que $\text{Fr}C_{\delta_n} \supset \text{Fr}O$.

5.3.2 ω -límites con interior no vacío en el toro.

Haremos primero un estudio en el toro para poder luego dar el paso a superficies de género mayor utilizando los resultados de los apartados anteriores. Vamos a probar en este apartado que un abierto conexo O junto con su clausura será un ω -límite si y sólo si se trata de un abierto en el que podamos definir dos curvas de Jordan no homotópicamente nulas que intersequen en un solo punto, es decir si y sólo si no es homeomorfo a un abierto del plano. Ésta también será una condición necesaria y suficiente en superficies compactas, conexas y orientables de género mayor.

En particular si tenemos un conjunto abierto O sobre el toro como en el párrafo anterior, se tiene que las componentes de $\mathbb{T}^2 \setminus \overline{O}$ son todas ellas contractibles. Sin embargo no será una condición necesaria en el resto de superficies. Para ello basta observar (utilizando los resultados del apartado 4.10) que en el toro doble o la superficie compacta de género 2 se tiene que el abierto O dibujado en la figura 5.3 posee complementario no contractible y sin embargo es transitivo.

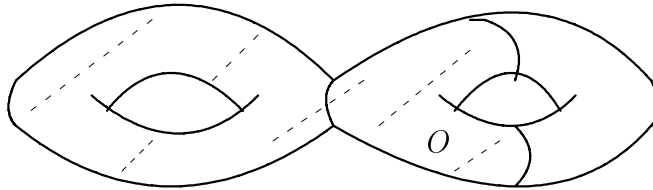


Figura 5.3: Abierto transitivo en la superficie orientable de género dos con complementario no contractible.

Es más, incluso en el toro la condición del complementario contractible no va a ser suficiente ya que si consideramos una banda enrollándose sobre el toro de manera que cada vez se haga más fina, el complementario de su clausura va a tener todas las componentes contractibles y sin embargo no existe un flujo con una órbita con ω -límite toda la banda.

Definición 5.3.2.1 (abierto transitivo). Dado un conjunto O de una superficie compacta y conexa, diremos que es transitivo si y sólo si podemos definir un flujo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ de manera que posea una órbita Γ tal que $\omega(\Gamma) = \overline{O}$.

Observación 5.3.2.1. Es fácil deducir de la definición que todo abierto transitivo es necesariamente conexo.

Vamos a probar el resultado anunciado sobre la caracterización de abiertos transitivos en base a las curvas de Jordan no homotópicamente nulas que podamos definir, pero observemos que si no nos preocupara que el flujo fuera diferenciable el resultado sería inmediato, ya que \mathbb{T}_O^2 es homeomorfo al toro (esto se puede ver cortando el toro por una curva no homotópicamente nula contenida en O y utilizando el resultado sobre las contracciones en la esfera que hemos presentado en un apartado anterior de esta sección). Desgraciadamente eso no es suficiente para poder inducir en O flujos diferenciables.

Teorema 5.3.2.1. *Un cerrado C sobre el toro con interior no vacío será transitivo si y sólo si $O = \text{Int}C$ es conexo y dentro de él se pueden definir dos curvas de Jordan no homotópicamente nulas en \mathbb{T}^2 de manera que intersequen transversalmente en un sólo punto.*

Observación 5.3.2.2. *Intuitivamente se podría decir que necesitamos dentro de O dos curvas de Jordan, una enrollándose sobre el eje del toro y la otra sobre el círculo medio.*

Demostración del teorema: supongamos en primer lugar que C es transitivo y veamos que en O se pueden definir las curvas del enunciado. Para ello hacemos notar que la curva Γ que genere a C como ω -límite debe estar siempre contenida en O , ya que si el flujo que hace O transitivo lo denotamos por la letra Ψ y la órbita recurrente por $\Gamma = \Psi(\mathbb{R}, x)$, se tiene que en algún instante t_0 $\Psi(t_0, x) = y \in O$. Si se tuviera que en un instante t' $\Psi(t', y) = z \notin O$, tomando un abierto $U_y \subset O$ entonces $\Psi_{t'}(U_y) = U_z \in \bar{O}$ por la invarianza del ω -límite. Y además por ser $\Psi_{t'}$ un difeomorfismo se tiene que U_z es un abierto y debe estar contenido en O , lo cual es una contradicción con el hecho de que $z \notin O$.

Una vez demostrado que la órbita Γ vive dentro de O mostramos primero que hay definida en O una curva de Jordan no homotópicamente nula, para ello tomamos un punto p de Γ que por lo tanto pertenecerá a O , un entorno $U_p \subset O$ y una sección transversal (ver la definición 3.2.3, página 65) dentro de U_p . Al ser Γ positivamente recurrente, la curva Γ cortará en un punto q de la sección transversal tan cerca de p como se desee. Tomemos la curva de Jordan formada por la restricción de Γ entre p y q unida con la sección transversal entre q y p . La curva Σ así construida es una curva de Jordan y además no es homotópicamente nula. Si lo fuera se tendría que Σ descompone el toro en dos componentes conexas, una de ellas homeomorfa al plano. Además la curva Γ quedaría siempre en una de las dos regiones y sería imposible que el ω -límite fuera todo C .

Una vez vista la existencia de la curva Σ no homotópicamente nula, veamos que existe otra curva Σ' no homotópicamente nula y que interseca con Σ en un solo punto. Para ello tomemos un punto q' en la sección local que antes hemos tomado de manera que p quede entre q' y q . La semiórbita positiva de Γ que parte de q debe cortar a la sección transversal en un punto q'' entre p y q' . Ahora, por el mismo

tipo de argumentos que antes, la curva que se obtiene uniendo Γ entre q y q'' con el trozo de sección transversal determinado por ambos puntos es una curva de Jordan no homotópicamente nula. Sólo hace falta modificar un poco Σ' en el entorno U_p para que no interseque con Σ más que en un punto y se acaba esta parte de la demostración. La figura 5.4 pretende aclarar geoméricamente la prueba.

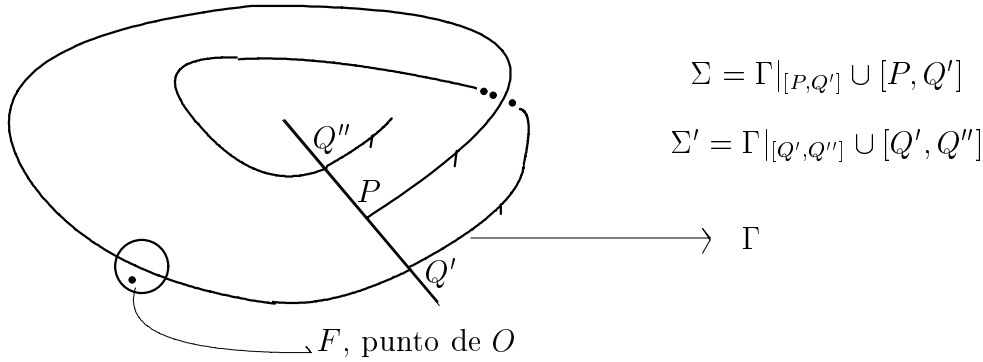


Figura 5.4: Si Σ ó Σ' son homotópicamente nulas, entonces $F \notin \omega(\Gamma)$.

Vamos a ver ahora que la condición es suficiente, para ello cortamos la superficie por una curva de Jordan contenida en el abierto O y pegamos sendos discos obteniendo la superficie \mathbb{T}_r^2 como ya se ha hecho en repetidas ocasiones encontrándonos en la esfera. Pasamos nuestro abierto O a la superficie \mathcal{N}^2 por el difeomorfismo $f_{\mathcal{N}}$ y de aquí a \mathbb{T}_r^2 añadiéndole a O_r los dos discos con los que completamos \mathcal{N}_r . Obsérvese que el abierto O_r junto con los dos discos es conexo por la hipótesis y por lo tanto si contraemos las componentes conexas del complementario de $O \cup \bigcup_{i=1}^2 D_i$ en \mathbb{T}_r^2 tenemos un espacio homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Ahora recortamos los discos D_i e identificamos su frontera obteniendo por lo tanto que \mathbb{T}_O es homeomorfo al toro y en consecuencia podemos definir sobre \mathbb{T}_0 el flujo Ψ irracional del toro haciéndolo nulo en los puntos determinados por la contracción de componentes. El flujo Ψ induce un flujo continuo Φ sobre \mathbb{T}^2 que se anula en cada una de las componentes de O^c y que sólo tiene conjuntos minimales triviales.

Utilizando ahora el teorema de Gutiérrez (ver teorema 4.8.1) se tiene que Φ es equivalente a un flujo de clase C^∞ , con lo cual introduciendo cartas convenientes sobre \mathbb{T}^2 el flujo Φ será de clase C^∞ . □

Este teorema se puede enunciar en otros términos teniendo en cuenta el estudio hecho sobre los abiertos conexos del toro. El enunciado es el siguiente:

Teorema 5.3.2.2. *Un cerrado C sobre el toro con interior no vacío será transitivo si y sólo si $O = \text{Int}C$ es conexo y no homeomorfo a un abierto del plano.*

5.3.3 ω -límites con interior no vacío en superficies de género superior.

De la caracterización de abiertos transitivos en general no tenemos conocimiento de que haya hecho ningún estudio, salvo los resultados que dimos en la sección 4.10. Lo que exponíamos allí era que cualquier superficie compacta conexa y orientable, salvo la esfera, era un ω -límite. Pero nuestro interés se centra en caracterizar cuáles de los abiertos serán transitivos y cuáles no.

Si nos fijamos en el toro hemos encontrado que un abierto era transitivo si poseía dos curvas de Jordan enrollándose una sobre el eje y la otra sobre el círculo medio. Esta estructura da la suficiente movilidad como para construir una órbita densa en el toro. Pues bien, la misma estructura dará la caracterización para superficies orientables de género superior. Nuestro propósito es el de probar este resultado.

A partir de ahora, en este apartado \mathcal{M}^2 denotará una superficie compacta, conexa y orientable de género n , siendo $n \geq 1$. Como ya vimos, cualquiera de estas superficies es difeomorfa a una esfera con n asas. Recordamos gráficamente lo que se entiende por círculos medios y ejes de las asas en la esfera de género n (ver la figura 5.5).

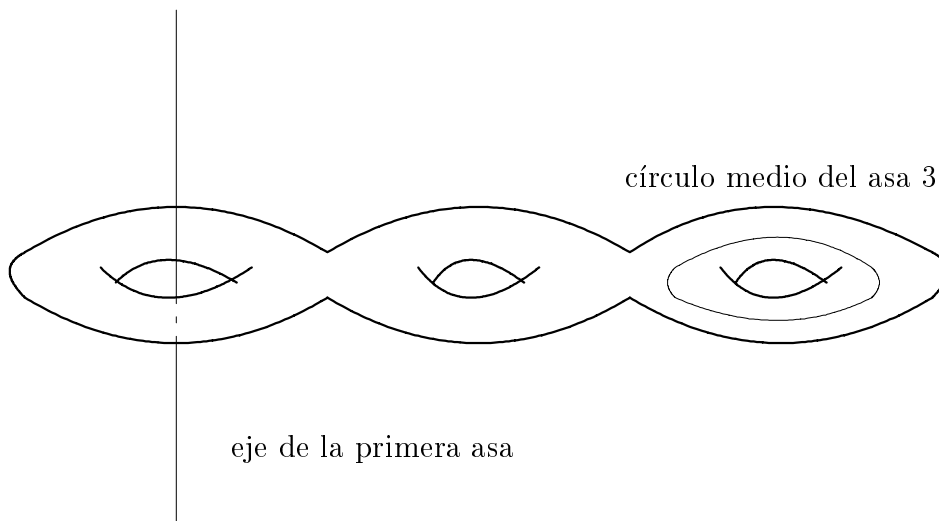


Figura 5.5: Círculos medios y ejes de la esfera de n asas.

Teorema 5.3.3.1. *Un conjunto cerrado C sobre \mathcal{M}^2 con interior no vacío será transitivo si y sólo si $O = \text{Int}C$ es conexo y dentro de él se pueden definir dos curvas de Jordan no homotópicamente nulas en \mathcal{M}^2 de manera que ambas intersequen en un solo punto.*

Observación 5.3.3.1. *Esta condición nos dice intuitivamente que dentro del abierto*

vamos a tener dos curvas no homotópicamente nulas, una de ellas enrollándose alrededor de uno o varios ejes y la otra alrededor de uno o varios círculos medios.

Demostración del teorema: procederemos por inducción sobre el género de la superficie. Para género 1 la condición es suficiente por el resultado ya probado en el teorema 5.3.2.1. Se trata, en el caso general, de introducir un subconjunto abierto y denso de O en una superficie de género menor.

Supongamos pues que hemos probado el resultado para superficies de género n y queremos demostrarlo para género $n + 1$. Así que tenemos una superficie \mathcal{M}^2 de género $n + 1$ y dentro de ella un abierto O con una estructura como se anuncia en el enunciado.

Suponemos que en O no existe otra estructura como la del enunciado sin intersectar a las dos curvas que suponemos existentes de partida. Si existieran, cortaríamos una (γ) como en la proposición 5.3.1.3, pegaríamos sendos discos y tendríamos una superficie de género menor con $f_{\mathcal{N}}(O \setminus \gamma)$ transitivo y por lo tanto también $O \setminus \gamma$ y O .

Distinguiremos ahora dos casos. En el primero suponemos que en O existe una curva de Jordan no homotópicamente nula que no corte a ninguna de las dos del enunciado. En el segundo caso supondremos que todas las curvas de Jordan simples de O que podamos definir no homotópicas al elemento neutro del grupo fundamental de \mathcal{M}^2 cortan a una de las dos del enunciado.

Situémonos en la primera de las posibilidades, tomando la curva de Jordan γ no homotópica al elemento neutro, cortemos la superficie por dicha curva y en el caso que dicha curva no divida a O en dos componentes conexas, peguemos sendos discos tal y como se hizo en proposición 5.3.1.3 obteniéndose así la superficie \mathcal{M}_r^2 de género n . Según se vio en aquella misma sección $O \setminus \gamma$ será difeomorfo a $f_{\mathcal{N}}(O \setminus \gamma)$, pero pudiera suceder que $O \setminus \gamma$ quede dividido en dos componentes conexas O_1 y O_2 y O_1 contiene a las dos curvas que se cortan en un sólo punto. Como estamos suponiendo que O_2 no tiene ningún par de curvas de Jordan que se corten en un sólo punto, se tiene que O_2 es difeomorfo a un abierto del plano.

Pegamos sendos discos igual que antes y en aquel que quede junto a O_1 pegamos una copia difeomorfa de O_2 que denotaremos por \tilde{O}_2 . Ahora, por la hipótesis de inducción $O_1 \cup \tilde{O}_2$ es un abierto conexo en las condiciones del teorema y por vivir en una superficie de género menor se tiene que es transitivo y por lo tanto O también lo será.

En cuanto a la segunda posibilidad, se trata de elegir una curva de Jordan γ no homotópica al elemento neutro, que no corte a ninguna de las anteriores del enunciado (por lo tanto no puede estar entera contenida en O). Denotaremos por O_1 a la componente de O que contiene las dos curvas del enunciado y por O_2 al resto. Como O_2 es un abierto del plano, podemos meterlo dentro de un disco, \tilde{O}_2 , que pegaremos como antes junto al abierto $f(O_1)$. En \mathcal{M}_r^2 , $f(O_1) \cup \tilde{O}_2$ será transitivo y por lo tanto O también. \square

Al igual que en el toro, por el estudio que hemos hecho sobre los abiertos conexos en superficies compacta, conexas y orientables, este teorema admite una reformulación como sigue:

Teorema 5.3.3.2. *Un conjunto cerrado C sobre \mathcal{M}^2 con interior no vacío será transitivo si y sólo si $O = \text{Int}C$ es conexo y no es homeomorfo a un abierto del plano.*

5.4 ω -límites recurrentes con interior vacío.

5.4.1 Introducción.

Vimos en el capítulo dedicado al contraejemplo de Denjoy la existencia de ω -límites con interior vacío generados por órbitas recurrentes sobre el toro. Se trataba de un caso aún más general pues el conjunto construido no era sólo un conjunto ω -límite sino que se trataba de un conjunto minimal. Estos ω -límites han permanecido hasta la década pasada muy poco estudiados y sólo antes Markley [Mar69a, Mar78, Mar66] y Mañer [Mai43] dedicaron estudios más o menos profundos a este tema. Sin embargo en sus artículos no se estudia la estructura de estos conjuntos sino que se trata más bien de contar el número de órbitas recurrentes que puede tener un flujo. Artículos de finales de los 80 [Oda89] tenían objetivos parecidos a los antiguos de Markley y Mañer.

Sí sabemos en cambio por el trabajo que se ha hecho hasta ahora qué superficies no pueden poseer órbitas recurrentes diferentes de órbitas periódicas. Por supuesto que por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado en la esfera no cabe hablar de este tipo de órbitas. En cuanto a las superficies de género uno, por un lado tenemos el toro donde sí existen estas órbitas y por otro se tiene el plano proyectivo que no puede tener órbitas recurrentes no periódicas por ser su recubridor orientable doble la esfera.

Si nos fijamos a las superficies de género mayor o igual a dos orientables es obvio que pueden tener órbitas recurrentes pues estas superficies no son más que sumas conexas de toros, los cuales pueden poseer tales órbitas. Por ejemplo, si quisiéramos construir una órbita recurrente, no periódica con el interior de su ω -límite vacío bastaría construir el flujo en el toro con una órbita tal y sumar conexamente este toro con otro constituido sólo de puntos críticos.

La superficie no orientable de género dos, en cambio, no puede tener una órbita recurrente definida sobre ella a menos que ésta sea una órbita periódica. Sin embargo para las superficies no orientables de género mayor sí se da la existencia de órbitas recurrentes con el interior de su ω -límite vacío. El procedimiento es el mismo que se ha definido para la superficie orientable de género mayor que uno pues las superficies no orientables de género mayor que dos se pueden obtener sumando conexamente el toro con bandas de Möbius.

Este tipo de recurrencia ha mantenido en vilo el interés por el estudio de las órbitas recurrentes en superficies durante toda la segunda mitad de siglo e incluso su desconocimiento profundo ha dado lugar a que teoremas como el de estabilidad estructural de Peixoto [Pei62] se fueran al traste, al menos en las superficies no orientables. El artículo [Gut78b] explica por qué y establece dicho teorema para la superficie no orientable de género tres, con lo cual el teorema de Peixoto es válido en todas las superficies orientables y las no orientables de género menor o igual que tres.

5.4.2 Limitando el número de ω -límites generados por órbitas recurrentes.

Vamos a plasmar los resultados que hemos ido exponiendo rápidamente durante toda la introducción en este apartado, pero antes introducimos el concepto de órbita recurrente no trivial sin interior.

Definición 5.4.2.1 (Órbita recurrente no trivial sin interior). Diremos que una órbita Γ sobre una superficie \mathcal{M}^2 será recurrente sin interior si se trata de una órbita que cumple:

- $\Gamma \subset \omega(\Gamma)$
- $\text{Int}\omega(\Gamma) = \emptyset$
- Γ es una órbita no periódica.
- Γ no es un punto crítico.

Con esta notación se tiene el siguiente resultado sobre las superficies que admiten órbitas recurrentes sin interior.

Proposición 5.4.2.1. • *Todas las superficies compactas, conexas y orientables salvo la esfera poseen un flujo con una órbita recurrente sin interior.*

- *Todas las superficies compactas, conexas y no orientables salvo la botella de Klein y el plano proyectivo poseen flujos con órbitas recurrentes sin interior.*

Hemos dicho en esta proposición vagamente que estas superficies poseen flujos sin especificar si pueden tener buenas propiedades de diferenciabilidad, por ello queremos hacer notar brevemente que estos flujos pueden ser de clase C^∞ ya que vamos a poder construirlos con el mismo orden de diferenciabilidad que aquél del que partimos en el toro. Si empezamos con el flujo C^∞ de Cherry [Che38] introducido en la sección 4.7.1 tendremos que los flujos construidos en las superficies de género superior son de clase C^∞ .

Otra observación que debemos hacer al enunciado de la anterior proposición es si el número de clausuras de órbitas recurrentes no triviales sin interior que tenemos definido sobre la superficie puede ser mayor que uno. En principio el teorema nos dice que existe una, pero no nos limita el número. El primero en limitar este número fue Mañer para las superficies orientables en [Mai43], posteriormente Markley hizo lo propio con las superficies no orientables en [Mar69a]. Pasamos a exponer el trabajo de ambos.

Proposición 5.4.2.2. *Si x e y son dos puntos que generan órbitas recurrentes sin interior en un flujo continuo sobre una superficie compacta y si $y \in \omega(\Gamma_x)$ entonces $\omega(\Gamma_x) = \omega(\Gamma_y)$*

Demostración: como $y \in \omega(\Gamma_x)$ y $\omega(\Gamma_x)$ es invariante se tiene que $\Gamma_y \subset \omega(\Gamma_x)$. La inclusión contraria es bastante más complicada y nos remitimos a [Mai43]. \square

Y ahora el prometido teorema que limita el número de ω -límites diferentes generados por órbitas recurrentes.

Teorema 5.4.2.1. *Un flujo continuo sobre una superficie compacta, conexa y orientable de género p tiene como mucho p ω -límites diferentes generados por órbitas recurrentes sin interior. Además este número es alcanzado por algún flujo.*

Demostración: se debe a Mañer y se encuentra en [Mai43]. No conocemos la prueba de Mañer, pero este resultado se puede establecer cortando una curva de Jordan no homotópicamente nula por cada uno de los ω -límites generados por órbitas recurrentes sin interior. La curva de Jordan por la que cortamos la superficie puede que no esté construida dentro del ω , pero basta con que no interseque a los demás conjuntos ω -límites que entran en juego. De nuevo, jugando con la reducción del género se obtiene el resultado deseado.

Cuando decimos cortar, se sobrentiende que hay que multiplicar todo el campo por una función escalar C^∞ que sea siempre positiva y se anule únicamente en los puntos de la curva cerrada considerada antes de quitarla.

En cuanto a ver que se alcanza con algún flujo la cantidad de p ω -límites diferentes se trata de utilizar que la superficie orientable de género p es la suma conexa de p toros y el flujo de Cherry introducido en el capítulo del contraejemplo de Denjoy. \square

Finalmente, Markley utilizó este resultado para las superficies no orientables, la técnica consiste en levantar el flujo de una superficie no orientable a una orientable por el recubridor de dos hojas, aprovechar el resultado anterior y traducirlo mediante el recubridor a la superficie no orientable de partida. En [Mar69a] se establece el siguiente enunciado:

Teorema 5.4.2.2. *Un flujo continuo sobre una superficie compacta no orientable de género p tiene como mucho $\lceil \frac{p-1}{2} \rceil$ ω -límites diferentes generados por órbitas recurrentes sin interior. Además este número siempre se alcanza por algún flujo.*

5.4.3 El teorema de estructura de Gutiérrez.

Como hemos dicho en la introducción de esta sección hasta la década pasada las recurrencias sin interior permanecieron sin estudiar en cuanto a su estructura, todos los estudios iban dirigidos a dar ejemplos de que estas órbitas existían y donde más lejos se llegó fue con los resultados que limitaban el número de ω -límites generados por estas órbitas. Fue Gutiérrez [Gut86] el primero en dar un teorema de estructura para flujos con órbitas recurrentes sin interior.

Vamos a reproducir en este apartado su estudio sobre el teorema de estructura. Antes de exponerlo diremos que efectivamente dicho teorema estudia las propiedades de los flujos que poseen recurrencias no triviales; sin embargo advertimos de la complejidad no sólo de la demostración sino del resultado en sí. Vamos a introducir las definiciones previas.

Definición 5.4.3.1 (pseudo-rotación del círculo). Diremos que una aplicación $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es una pseudo-rotación del círculo si se cumple:

1. E es inyectiva.
2. E es diferenciable.
3. E está definida en todo \mathbb{R}/\mathbb{Z} salvo, a lo sumo, en un conjunto finito.
4. $|E'(x)| = 1$ para todo x de $\text{Dom}(E)$.

Definición 5.4.3.2 (Cubrimiento de una pseudo-rotación). Sea $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ una pseudo-rotación y $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ una aplicación continua. Diremos que T cubre a E si:

1. T es inyectiva.
2. $\text{Dom}(T)$ es un abierto de \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
3. Existe una aplicación monótona y continua $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de grado 1 tal que:
 - $h(x) \in \text{Dom}(E)$.
 - $E \circ h(x) = h \circ T(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(T)$.

Definición 5.4.3.3 (Suspensión de una pseudo-rotación). Dadas aplicaciones continuas T y E definidas como antes, denotamos por N_E a la superficie cociente obtenida del conjunto

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1] \setminus \{(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \text{Dom}(E)) \times \{1\} \cup (\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \text{Dom}(E^{-1})) \times \{-1\}\}$$

identificando los puntos $(x, 1)$ y $(E(x), -1)$ para todo $x \in \text{Dom}(E)$.

Dado ahora un flujo Φ continuo sobre la superficie N_E diremos que el par (Φ, N_E) es una suspensión de (T, E) si se satisfacen las condiciones:

1. La curva $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ es transversal al flujo Φ y el conjunto de singularidades de Φ es o bien vacío o bien compacto.
2. La aplicación de Poincaré $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ inducida por el flujo Φ es $(x, 0) \rightarrow (T(x), 0)$.

Una vez introducida la notación anterior podemos ya dar el teorema de estructura de Gutiérrez. La demostración se encuentra en [Gut86] y no la haremos por su extensión y dificultad. Sin embargo quisiera hacer hincapié en que la prueba de este teorema tiene un marcado corte geométrico pero aparecen ya algunas técnicas analíticas a diferencia de los teoremas de las secciones anteriores de este capítulo que tienen casi exclusivamente carácter geométrico. En particular se construyen varios sistemas dinámicos discretos que luego se pasan a continuos en la prueba de Gutiérrez.

Teorema 5.4.3.1 (de estructura, Gutiérrez). *Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ un flujo continuo sobre una superficie de clase C^∞ entonces los conjuntos ω -límites generados por órbitas recurrentes no triviales son dos a dos disjuntos o coincidentes y los denotaremos por $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$. Para cada uno de ellos existe un abierto conexo $V_i \subset \mathcal{M}^2$ tal que las siguientes condiciones se verifican:*

1. Si $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Además V_i contiene todas las órbitas Γ del flujo φ tales que $\omega(\Gamma) = \Omega_i$.
2. Cada V_i es una región de recurrencia asociada a Ω_i , lo que quiere decir que:
 - (a) Existe un círculo $C_i \subset V_i$ transversal a φ intersecando a Ω_i y para el que la aplicación de Poincaré $T_i : C_i \rightarrow C_i$ cubre una pseudo-rotación $E_i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que tiene todas sus órbitas densas y que no se puede extender continuamente.
 - (b) El par $(\varphi|_{V_i}, V_i)$ es topológicamente equivalente a una suspensión de (T_i, E_i) .
 - (c) La frontera $\mathcal{F}(V_i)$ de V_i sólo contiene puntos fijos, trayectorias regulares conectando puntos fijos y una cantidad finita de segmentos transversales que conectan puntos fijos.
Además no existe ningún arco de órbita de φ en V_i conectando dos puntos de $\mathcal{F}(V_i)$.
3. Si V_i' es otra región de recurrencia asociada a Ω_i entonces V_i y V_i' son homeomorfos.

Si tenemos también que V_i posee un número finito de singularidades y cualquier otra región de recurrencia asociada al ω -límite Ω_i no tiene el mismo número de puntos, entonces los flujos $(\varphi|_{V_i}, V_i)$ y $(\varphi|_{V_i'}, V_i')$ son topológicamente equivalentes.

4. Por último el círculo C_i se puede tomar de manera que o bien $\Omega_i \cap C_i = C_i$ o bien $C_i \cap \Omega_i$ es un conjunto de Cantor.

Este teorema nos da más bien una idea de cómo es el diagrama de fases de un flujo que admita órbitas recurrentes no triviales cerca de esas órbitas. Sin embargo no sabemos si fijada una superficie de partida \mathcal{M}^2 sobre la que definimos una estructura similar a la anterior tendrá un flujo φ que satisfaga las propiedades del teorema de estructura, que es lo que pretendemos en nuestro estudio cara a la tesis. Sin embargo en [Gut86] aparece ya un recíproco parcial que vamos a enunciar.

Definición 5.4.3.4 (órbita recurrente no trivial en un S.D.D.). Dada una aplicación $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no necesariamente definida sobre todo \mathbb{R}/\mathbb{Z} y un punto $x \in \text{Dom}(f)$, diremos que la órbita

$$\theta(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

es recurrente no trivial si $\overline{\theta(x)} - \theta(x) \supset \theta(x)$

Definición 5.4.3.5 (conjunto minimal no trivial). Un conjunto no vacío y compacto $\Lambda \subset \text{Dom}(f)$ se dice minimal no trivial si para todo $x \in \Lambda$ $\theta(x)$ es no trivial recurrente y $\theta(x) = \Lambda$.

Teorema 5.4.3.2 (existencia). Sea $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ una pseudo-rotación que tiene todas sus órbitas densas y que no se puede extender. Sea $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ una aplicación monótona y continua de grado 1. Denotemos por $\mathcal{C}(E, h)$ el conjunto de aplicaciones continuas que cubren a E mediante h . Entonces:

1. Para todo $T \in \mathcal{C}(E, h)$ existe una suspensión de (T, E) .
2. Existe $\hat{T} \in \mathcal{C}(E, h)$ llamada maximal tal que $\text{Dom}(\hat{T}) = h^{-1}(\text{Dom}(E) \setminus \overline{\Delta(E, h)})$ donde

$$\Delta(E, h) = \{x \in \text{Dom}(E) : h^{-1}(x) \text{ y } h^{-1}(E(x)) \text{ están en biyección}\}$$

Además para todo $T \in \mathcal{C}(E, h)$ se verifica:

- (a) $\text{Dom}(T) \subset \text{Dom}(\hat{T})$
 - (b) T y \hat{T} coinciden sobre el conjunto de las órbitas no triviales recurrentes de T .
 - (c) La aplicación \hat{T} tiene órbitas recurrentes no triviales si y sólo si $\overline{\Delta(E, h)}$ tiene interior vacío.
3. Para $T \in \mathcal{C}(E, h)$ son equivalentes:
 - (a) La aplicación T y cualquiera de las suspensiones de (T, E) tiene órbitas no triviales recurrentes.

(b) $h(\text{Dom}(T))$ contiene un abierto denso de \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

4. Sea $T \in \mathcal{C}(E, h)$, entonces son equivalentes:

(a) La aplicación T y cualquiera de las suspensiones (T, E) tienen conjuntos minimales no triviales.

(b) La aplicación h no es un homeomorfismo, el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : h^{-1}(x) \text{ interseca a } \text{Dom}(T) \text{ y } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \text{Dom}(T)\}$$

es a lo sumo finito y $\text{Dom}(T) \supset \overline{h^{-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus S)}$. En particular $\Delta(E, h) = \emptyset$.

Sea $T \in \mathcal{C}(E, h)$ y sea (Φ, N_E) la suspensión de (T, E) . Existe un flujo $\varphi : \mathbb{R} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ de clase C^1 sobre una variedad \tilde{M} de clase C^∞ y sin frontera tal que para algún conjunto F vacío o finito de puntos críticos de φ el par $(\varphi|_{\tilde{M} \setminus F}, \tilde{M} \setminus F)$ es topológicamente equivalente al par (Φ, N_E) .

Además, salvo cuando T tiene conjuntos minimales no triviales, el flujo se puede tomar de clase C^∞ .

Estos teoremas poseen bastante información escondida por varios motivos, uno de ellos es que a pesar del amplio enunciado se pierde una gran riqueza de resultados geométricos que aparecen en las pruebas. Por otra parte en el resultado del teorema de estructura se construyen de manera detallada las aplicaciones de Poincaré $T_i : C_i \rightarrow C_i$ mediante un proceso que ayuda a hacerse una idea bastante clara de los flujos que estamos manejando. Lo que es sorprendente es que la estructura de estos flujos no difiere mucho a la que vimos en el contraejemplo de Denjoy y el ejemplo de Cherry que se construían sobre el toro; es más, estos ejemplos son una consecuencia trivial del teorema de existencia como se pone de manifiesto en [Gut86], sección 6, página 43.

Por otro lado creemos que estos teoremas junto con el teorema de Vinograd generalizado que hemos dado en la primera sección del capítulo suponen un filón para investigar la estructura topológica de los ω -límites.

Y es que por una parte, del teorema de estructura vamos a colegir algunos ω -límites de órbitas recurrentes no triviales sin interior pueden estar generado también por órbitas no recurrentes y por tanto, por el teorema de Vinograd generalizado tendremos que dicho ω -límite se trata de la frontera de un abierto conexo por caminos fronterizos.

El problema para terminar la caracterización de los ω -límites serán aquellos que están generados únicamente por órbitas no recurrentes. Introducimos una definición para denotar a este tipo de órbitas.

Definición 5.4.3.6 (órbita esencialmente recurrente). Diremos que una órbita Γ de un flujo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ es esencialmente recurrente si es recurrente y además no existe ninguna órbita Σ no recurrente de ningún flujo Φ (puede ser $\Phi = \Psi$) tal que $\omega_\Phi(\Sigma) = \omega_\Psi(\Gamma)$ o $\alpha_\Phi(\Sigma) = \omega_\Psi(\Gamma)$.

Fijemos de ahora en adelante un flujo $\Psi : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ que posea una órbita recurrente no trivial sin interior Γ , vamos a extraer la información que posee el teorema de estructura de Gutiérrez.

En primer lugar, por dicho teorema tenemos una curva de Jordan transversal C que interseca al ω -límite de la curva Γ y para el que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f=T} & C \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathcal{A}(C) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_C=E} & \mathcal{A}(C) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

se puede ver en [Gut86], página 22 y siguientes que f es la aplicación de Poincaré, $\mathcal{A}(C)$ es el espacio cociente obtenido de C definiendo una relación de equivalencia en la que cada componente conexa de $C \setminus \omega(\Gamma)$ forman una clase y h es la aplicación cociente.

Además se ve en la demostración del teorema de estructura que:

1. f_C es una pseudo-rotación y f es un cubrimiento de f_C .
2. El número de componentes conexas de $C \setminus \omega(\Gamma)$ es infinito.
3. f está definida en todas las componentes de $C \setminus \omega(\Gamma)$ salvo, a lo sumo, en un número finito de ellas.

Debido a que f es inyectiva y a que está definida para una infinidad de componentes de $C \setminus \omega(\Gamma)$ nos podemos encontrar ante dos posibilidades:

- existe alguna componente (A_i) para la que todos los términos de una de las sucesiones $(f^n(A_i))_{n>j}$ o la $(f^{-n}(A_i))_{n>j}$ (con j entero arbitrario) son abiertos. En este caso la órbita no puede ser esencialmente recurrente.
- Para cualquier componente (A_i) las sucesiones anteriores siempre tienen un término que no es abierto y que por tanto se reducirá a un punto. Por ello aquí el ω -límite no va a ser la frontera de un abierto conexo, sino la frontera de la unión de una cantidad numerable de abiertos homeomorfos a un disco cada uno de ellos.

Corolario 5.4.3.1. *Supongamos un flujo Ψ continuo sobre una variedad 2-dimensional compacta orientable y conexa. Supongamos que dicho flujo posee una órbita Γ recurrente no trivial y no esencialmente recurrente con $\text{Int}\omega(\Gamma) = \emptyset$. Entonces se tiene que existe un conjunto conexo por caminos fronterizos O tal que $\omega(\Gamma) = \text{Fr}O$.*

Si la órbita Γ es recurrente sin interior pero esencialmente recurrente, entonces $\omega(\Gamma)$ es la frontera un abierto no conexo formado por la unión de un conjunto numerable de discos.

Demostración: se deduce de las consideraciones anteriores y del teorema 5.2.1. \square

5.5 Estructura topológica de los ω -límites.

Esta sección sólo tiene por objetivo ensamblar todos los resultados que se han presentado sobre los ω -límites para tener una visión general de ellos, no será por tanto necesario demostrar nada ya que las pruebas se han ido haciendo en las secciones precedentes. Vamos ya a enunciar el teorema.

Teorema 5.5.1 (estructura topológica de los ω). *Sea \mathcal{M}^2 una superficie compacta, conexa y orientable sobre la que tenemos definido un flujo Ψ continuo. Sea Γ una órbita de Ψ , entonces ocurre una de las dos posibilidades siguientes:*

1. $\omega(\gamma)$ tiene interior vacío en cuyo caso existen dos alternativas:
 - (a) Existe un abierto conexo por caminos fronterizos O tal que $\omega(\Gamma) = \text{Fr}O$.
 - (b) Existe un abierto no conexo O unión de una cantidad numerable de discos sobre \mathcal{M}^2 tal que $\omega(\Gamma) = \text{Fr}O$.
2. $\omega(\gamma)$ tiene interior no vacío. En este caso existe un abierto conexo O no homeomorfo a ningún abierto del plano tal que $\omega(\Gamma) = \overline{O}$.

Recíprocamente, cualquier frontera de un abierto del tipo al enunciado en 1.a va a ser un ω -límite de un flujo definido sobre \mathcal{M}^2 . Y cualquier clausura de un abierto de los enunciados en 2 va a ser un ω -límite de un flujo de clase C^r donde r es el grado de diferenciabilidad de la superficie.

Este teorema da condiciones necesarias y suficientes sobre la estructura topológica de los ω -límites salvo en el caso de las órbitas esencialmente recurrentes. Por tanto, lo que nos queda pendiente para cerrar este problema es dar condiciones suficientes sobre un abierto no conexo unión de discos para que sea un ω -límite. Dejamos este problema para posteriores estudios.

5.6 Un caso particular: el plano proyectivo (P^2).

Vamos a estudiar en esta sección los ω -límites en el plano proyectivo intentando utilizar todo lo que se sabe para la esfera, es por ello por lo que dedicamos un apartado especial a esta superficie. Para llevar a cabo nuestro propósito será necesario levantar los flujos del plano proyectivo a su recubridor orientable doble: la esfera y estudiar allí las propiedades. Es conveniente también estar familiarizado con el plano proyectivo para los resultados que vamos a establecer.

La manera clásica de ver a P^2 es una esfera de radio 1 centrada en el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3 en la que se identifica cada punto con su antípoda, también lo podremos ver como un círculo en el plano identificando la frontera como se pone de manifiesto en la figura 5.6.

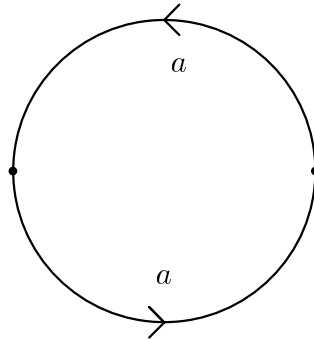


Figura 5.6: Representación plana del plano proyectivo.

Nuestro objetivo aquí es establecer un teorema del estilo de 1.6.6, pero antes de ir tan lejos vamos a establecer el teorema clásico de Poincaré-Bendixson para el plano proyectivo. Vimos ya en el capítulo dedicado al teorema de Schwartz, sección 2.5.1, que para flujos de clase al menos C^2 se tenía la generalización de Poincaré en los siguientes términos:

Teorema (Poincaré-Bendixson en superficies orientables). *Sea S un sistema dinámico de clase C^2 definido sobre una superficie \mathcal{M}^2 de clase C^2 compacta, conexa y orientable. Sea γ una órbita de S . Si $\omega(\gamma)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada ó $\omega(\gamma) = \mathcal{M}^2$ y $\mathcal{M}^2 = \mathbb{T}^2$.*

y

Teorema (Poincaré-Bendixson en superficies no orientables). *Sea S un sistema dinámico de clase C^2 definido sobre una superficie \mathcal{M}^2 de clase C^2 compacta, conexa y no orientable. Sea γ una órbita de S . Si $\omega(\gamma)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada ó $\omega(\gamma) = \mathcal{M}^2$ y $\mathcal{M}^2 = \mathbb{T}^2$.*

Nuestra primera meta va a ser debilitar la hipótesis C^2 y poder imponer únicamente la hipótesis de continuidad al igual que en el plano.

Teorema 5.6.1. *Supongamos que tenemos definido un sistema dinámico S de clase C^0 sobre el plano proyectivo con flujo asociado:*

$$\Psi : \mathbb{R} \times P^2 \rightarrow P^2$$

si Γ es una órbita que no posee en su ω -límite ningún punto crítico, entonces se tiene que $\omega(\Gamma)$ es una órbita periódica.

Demostración: será necesario para seguir esta demostración los resultados introducidos en la sección 2.3. Para empezar levantamos el flujo Ψ a la esfera según el

teorema 2.3.1 y obtenemos el flujo:

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

Tomamos $x \in \Gamma$ una de las antiimágenes \tilde{x} de x por la aplicación recubridora. La órbita $\Sigma_{\tilde{x}}$ cumple

$$p(\omega(\Sigma_{\tilde{x}})) = \omega(p(\Sigma_{\tilde{x}})) = \omega(\Gamma_x)$$

por lo tanto $\omega(\Sigma_{\tilde{x}})$ no tiene puntos críticos y por el teorema clásico de Poincaré-Bendixson debe ser una órbita periódica, con lo cual también lo será $\omega(\Gamma)$ como queríamos ver. \square

Queremos recordar la definición de conjunto k -realizable en el plano porque a partir de ahora será fruto de varias consideraciones. Por una parte sabemos que si un conjunto C es ω -límite el plano proyectivo entonces levantando el flujo del plano proyectivo a la esfera obtenemos un conjunto ω -límite \tilde{C} en la esfera tal que $p(\tilde{C}) = C$, siendo p la aplicación recubridora. Sabemos también que existe un abierto conexo, simplemente conexo \tilde{O} en la esfera tal que $\text{Fr}\tilde{O}=C$, por otro lado sería interesante ver que propiedades de conjunto k -realizable se conservan por la aplicación recubridora. Vamos ahora a investigar las propiedades de $p(\tilde{O})$ y su relación con C .

Definición 5.6.1. Sea $1 \leq k \leq +\infty$, sea $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_i$ una familia de pares de curvas disjuntas sobre la esfera parametrizadas por una aplicación φ_i de clase k junto con una orientación sobre la curva de manera que $o_i = [\varphi_i]$. Sea $S \subset \mathbb{R}_{\infty}^2$ un conjunto disjunto de los Γ_i y denotemos $\Omega = S \cup (\cup_i \Gamma_i)$. Diremos que (\mathcal{G}, S) es un conjunto realizable de clase k , si existe un abierto conexo, simplemente conexo O de \mathbb{R}_{∞}^2 , $\emptyset \neq O \neq \mathbb{R}_{\infty}^2$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\Omega = \text{Fr}O$.
2. Cada Γ_i es abierto en Ω y está incluido en $\text{Fr}(\mathbb{R}_{\infty}^2 \setminus (O \cup \Omega))$.
3. (\mathcal{G}, S) tiene una orientación compatible respecto a O . Esto quiere decir que si $x = \varphi_i(t) \in \Gamma_i$, $y = \varphi_j(t') \in \Gamma_j$ y ε es un real positivo arbitrario suficientemente pequeño, entonces o bien $x + \varepsilon N\varphi_i'(t)$, $y + \varepsilon N\varphi_j'(t')$ pertenecen los dos a O , o bien, $x - \varepsilon N\varphi_i'(t)$, $y - \varepsilon N\varphi_j'(t')$ están los dos en O .

Evidentemente la tercera condición de la definición anterior no tiene sentido en el plano proyectivo, sin embargo las dos primeras sí y nos proponemos demostrar que todo conjunto ω -límite en el plano proyectivo será la frontera de un abierto conexo O con complementario conexo. Además demostraremos que si el ω -límite posee órbitas que no sean puntos críticos entonces cada una de esas órbitas es un abierto en el ω .

Teorema 5.6.2. *Supongamos dado un sistema dinámico S de clase C^r sobre P^2 con flujo asociado $\Psi : \mathbb{R} \times P^2 \rightarrow P^2$. Sea Γ_x la órbita de S que pasa por x , entonces existe un abierto O conexo con complementario conexo de manera que:*

1. $\omega(\Gamma_x) = \text{Fr}O$
2. Cada órbita Γ_i de $\omega(\Gamma_x)$ es abierta en $\omega(\Gamma_i)$.

Demostración: levantamos el flujo Ψ a la esfera según el teorema 2.3.1 y obtenemos el flujo:

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

ahora tomamos \tilde{x} como una de las dos antiimágenes de x por la aplicación recubridora p y para la órbita $\Gamma_{\tilde{x}}$ se tiene que $p(\omega(\Gamma_{\tilde{x}})) = \omega(\Gamma_x)$.

Por otra parte, sabemos por el teorema 1.6.6 que existe \tilde{O} abierto en \mathbb{S}^2 conexo, simplemente conexo tal que $\omega(\Gamma_{\tilde{x}}) = \text{Fr}\tilde{O}$. Elegimos $O = p(\tilde{O})$, que con esta definición se tiene que es conexo por ser la imagen continua de un conexo, además habrá que ver que $P^2 \setminus O$ es conexo y que O es abierto.

Empecemos viendo que O es un abierto, para ello veamos que para cualquier punto y que elijamos de O se tiene que existe un abierto $V_y \subset O$, esto último es claro por la definición de aplicación recubridora. En cuanto a ver que $P^2 \setminus O$ es conexo se basa en dos consideraciones, la primera de ellas es que Γ_x se encuentra dentro del abierto O , ya que $\Gamma_{\tilde{x}}$ se encuentra en \tilde{O} , la segunda sería que O es el abierto que se considera en la prueba de 5.2.1 y por el mismo razonamiento que se hace allí $P^2 \setminus O$ también sería conexo.

La validez de la última afirmación queda supeditada todavía a que se dé la igualdad $\text{Fr}O = \omega(\Gamma_x)$. Por la elección hecha de O se tiene $\text{Fr}O = \text{Fr}(p(\tilde{O}))$, asumiendo que $\text{Fr}(p(\tilde{O})) = p(\text{Fr}\tilde{O})$ tenemos

$$\text{Fr}O = p(\text{Fr}\tilde{O}) = p(\omega(\Gamma_{\tilde{x}})) = \omega(\Gamma_x)$$

Probemos ahora que $\text{Fr}p(\tilde{O}) = p(\text{Fr}\tilde{O})$, la inclusión del segundo miembro en el primero es obvia, la otra inclusión es fácil teniendo en cuenta que cada elemento de O sólo tiene dos antiimágenes.

Sólo queda ya ver que cada órbita Γ_i que no sea un punto crítico es un abierto de $\omega(\Gamma_x)$, pero esto se deduce de la existencia de una órbita $\tilde{\Gamma}_i^1$ en $\omega(\Gamma_{\tilde{x}})$ tal que $p(\tilde{\Gamma}_i^1) = \Gamma_i$ y utilizando que $\tilde{\Gamma}_i^1$ es abierta en $\omega(\Gamma_{\tilde{x}})$. Hay que precisar esto un poco todavía porque pudiera suceder que existan $(\tilde{\Gamma}_j^2)_{j \in \mathbb{N}}$ tales que se acumulen en $\tilde{\Gamma}_i^1$ con lo cual $(p(\tilde{\Gamma}_j^2))_{j \in \mathbb{N}}$ se acumulan en Γ_i y no tendríamos el resultado.

Suponemos pues que $(\tilde{\Gamma}_j^2)_{j \in \mathbb{N}}$ se acumulan en $\tilde{\Gamma}_i^1$, con lo cual $\tilde{\Gamma}_i^1$ pertenecería al ω -límite de la órbita $\tilde{\Gamma}^2$ y llegamos a una contradicción ya que en el plano las órbitas no críticas son abiertos.

□

El siguiente objetivo sería remodelar la condición tercera de conjunto k -realizable de manera que tenga sentido en P^2 e intentar caracterizar los ω -límites en el plano proyectivo de una manera similar, se trata de un trabajo laborioso pues sería necesario realizar un estudio similar al que se hace en [BJ96]. Continuaremos en este trabajo cara a la preparación de la tesis junto con la caracterización de los ω -límites en las demás superficies donde se encuentran los problemas de la recurrencia. Sin embargo antes de acabar presentamos unos conjuntos que pueden ser ω -límites por la caracterización que dimos en la sección 5.2. En principio aquel teorema nos aseguraba que podían ser ω -límites pero no decía nada de las orientaciones, nosotros conjeturamos aquí que pueden ser ω -límites con las orientaciones marcadas.

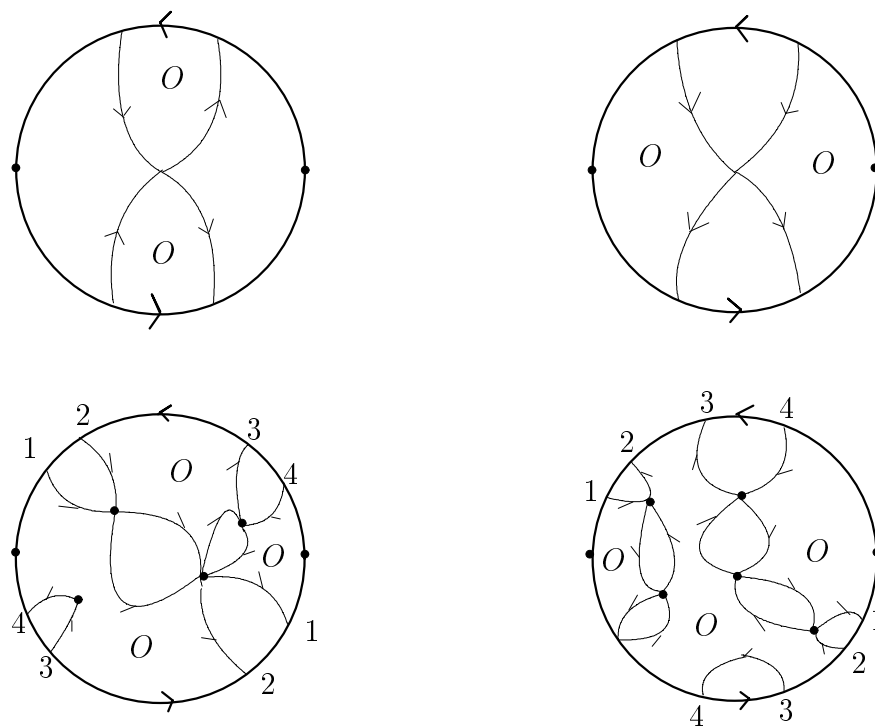


Figura 5.7: ω -límites en el plano proyectivo.

Capítulo 6

Abiertos transitivos de \mathbb{R}^n .

6.1 Introducción.

Hasta ahora hemos abarcado aspectos referentes a ω -límites y α -límites en el plano y en superficies compactas y conexas. Sólo hemos dado algunos resultados generales en el primer capítulo sobre estos conjuntos, cuales eran la compacidad, conexión y no trivialidad del ω -límite.

Vimos la existencia de conjuntos ω -límites con interior no vacío en las superficies cuando expusimos el trabajo de Denjoy y durante el capítulo 5. En \mathbb{R}^3 y en general para \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ existe una laguna de resultados sobre el estudio de los flujos para valores del tiempo infinitamente grandes. Si se intenta extender la prueba o utilizar las ideas que aparecen en [BJ96] varias dificultades aparecen.

Por un lado el teorema de la curva de Jordan que utilizamos en el primer capítulo no tiene validez más que en \mathbb{R}^2 . En segundo lugar el teorema de la aplicación de Riemann también se utiliza en [BJ96] de una manera insalvable. Consecuencia de los dos primeros escollos llega la tercera dificultad que será la que dé cuerpo a este capítulo.

Se afirmó en el corolario 1.5.1, página 19 que si una órbita corta a su ω -límite en sistemas dinámicos planos, ésta debe ser periódica o un punto crítico. Hemos visto que esto no era cierto en el toro y por lo tanto, usando el teorema de Whitney fácilmente podemos encontrar un flujo en \mathbb{R}^3 que tenga una órbita Γ no periódica y distinta de un punto crítico tal que $\Gamma \cap \omega(\Gamma) \neq \emptyset$. Este es el el tercer obstáculo que se encuentra en una posible generalización de [BJ96]. A raíz de todo esto se plantea de manera natural la existencia de ω -límites en \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) con interior no vacío.

Referencias útiles donde se hable de este tema son los artículos [Sid68], [Sid73], [ST88a] y [ST88b]. En particular, en [Sid68] encontramos el teorema siguiente:

Teorema 6.1.1 (Sidorov). *Para todo abierto conexo \mathcal{D} de \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) existe un flujo en \mathcal{D} topológicamente transitivo de clase C^∞ .*

Teorema que puede ser traducido al lenguaje de esta tesina como:

Teorema 6.1.2 (Sidorov*). *Para cualquier abierto conexo \mathcal{D} de \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) existe un flujo Ψ de clase C^∞ y una órbita Γ de Ψ tal que $\omega(\Gamma) = \mathcal{D}$.*

En todo este capítulo, a partir de ahora cada vez que no refiramos a \mathbb{R}^n sobrentenderemos que la dimensión es mayor o igual a 3.

6.2 Preliminares.

Vamos a introducir en esta sección algunas definiciones que serán básicas para la demostración del teorema antes enunciado e igualmente daremos la demostración de algunos lemas necesarios para el desarrollo del capítulo.

Supongamos que en el espacio \mathbb{R}^n tenemos dada una curva simple Γ de clase C^∞ parametrizada por la aplicación $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos a definir ahora la noción de entorno cilíndrico de Γ en \mathbb{R}^n .

Definición 6.2.1 (entorno cilíndrico de Γ). Llamaremos entorno cilíndrico de Γ de radio $\delta > 0$ (con δ suficientemente pequeño) y lo denotaremos por $\Omega(\Gamma, \delta)$ al subconjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen para un $s(x) \in [0, S]$ las condiciones:

- $|x - \gamma(s(x))| < \delta$
- $(x - \gamma(s(x)))\gamma'(s(x)) = 0$ (producto escalar).
- Para cada $x \in \Omega(\Gamma, \delta)$ la asignación $x \rightarrow s(x)$ es única y es una función de clase C^∞ .

Observación 6.2.1. *En principio la definición anterior puede no estar muy clara en lo referente a la elección de $s(x)$ y en el porqué realmente el entorno cilíndrico está bien definido. La razón de que todo ello funcione se basa en el teorema de la función implícita. En particular la función $f : \mathbb{R}^n \times [0, S] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - \gamma(y))\gamma'(y)$ determina implícitamente la función $s : \Omega(\Gamma, \delta) \rightarrow [0, S]$. La función f cumple además los requisitos (ver [Fer92], página 137 y siguientes) para que s sea de clase C^∞ .*

La noción de entorno cilíndrico extiende a dimensiones superiores la visión familiar que tenemos de un cilindro, siendo además el eje del cilindro la curva Γ no necesariamente una recta.

Utilizando la similitud con los cilindros habituales, definimos:

Definición 6.2.2 (base). Dado un entorno cilíndrico $\Omega(\gamma, \delta)$ llamaremos base de dicho entorno a cada una de las bolas $n-1$ dimensionales de radio δ y centros $s^{-1}(0)$ y $s^{-1}(S)$.

Definición 6.2.3 (superficie lateral). Dado el entorno cilíndrico $\Omega(\gamma, \delta)$ llamaremos superficie lateral de dicho entorno a la frontera de $\Omega(\gamma, \delta)$ quitando las bases del entorno.

Observación 6.2.2. Hacemos notar que un entorno cilíndrico es un abierto de \mathbb{R}^n .

A continuación, dado un abierto conexo \mathcal{D} de \mathbb{R}^n conteniendo a un entorno cilíndrico $\Omega(\gamma, \delta)$ y su frontera $\bar{\Omega}(\gamma, \delta)$ vamos a construir un flujo en \mathbb{R}^n de clase C^∞ que contenga a γ como una de sus trayectorias y puntos críticos fuera del entorno cilíndrico $\Omega(\gamma, \delta)$. Para este flujo, cada una de las trayectorias del interior de $\Omega(\gamma, \delta)$ tiene como α -límite un punto crítico de una de las base del entorno cilíndrico y como ω -límite un punto crítico de la otra base del entorno. Este resultado se utilizará en repetidas ocasiones en el resto del capítulo.

Primeramente definimos sobre $\Omega(\gamma, \delta)$ el campo de vectores $\tilde{X} : \Omega(\gamma, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\tilde{X}(x) = \frac{d\gamma}{ds}(s(x))h(x)$, donde h es una función de clase C^∞ sobre \mathbb{R}^n que satisface:

1. $h(x) > 0 \forall x \in \Omega(\gamma, \delta)$.
2. $h(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(\gamma, \delta)$.
3. Si denotamos por $h^{(i)}$ a cualquier derivada parcial i -ésima de h , se tiene que $h^{(i)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(\gamma, \delta)$ y para todo $i \in \mathbb{N}$.

Observación 6.2.3. Teniendo en cuenta que la función $g(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ se anula en 0 al igual que todas sus derivadas y que g, γ, s y el producto escalar son C^∞ , una posible definición para h sería:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(\gamma, \delta) \\ g[(\delta - \|x - \gamma(s(x))\|)]s(x)(S - s(x)) & \text{si } x \in \Omega(\gamma, \delta) \end{cases}$$

Extendemos el campo \tilde{X} a \mathbb{R}^n y a dicha extensión la denotamos por $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in \Omega(\gamma, \delta)$ definimos $X(x) = \tilde{X}(x)$ y para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(\gamma, \delta)$ $X(x) = 0$.

Consideramos la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dt}(p) = X(p) \tag{6.1}$$

y el flujo asociado a dicha ecuación según se vio en el ejemplo 1.2.2. Dicho flujo lo denotaremos por Φ y estará definido en un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Damos ahora un lema de topología que necesitaremos en la prueba del teorema de Sidorov.

Lema 6.2.1. *Sea \mathcal{D} un abierto conexo de \mathbb{R}^n . Supongamos que tenemos dentro de \mathcal{D} un número finito de entornos cilíndricos $\{\Omega(\gamma_i, \delta_i)\}_{i=1}^{i=k}$ de manera que el extremo inicial de cada $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ se encuentra dentro del extremo final de un $\Omega(\gamma_j, \delta_j)$ ($j < i$) para $i \in 2, 3, \dots, k$ cumpliéndose además que las superficies laterales de dos entornos cilíndricos distintos no intersecan.*

En estas condiciones se tiene que $\mathcal{D} \setminus (\bigcup_{i=1}^{i=k} \Omega(\gamma_i, \delta_i))$ es conexo.

Demostración: la prueba se basa en la constatación de dos hechos básicos. Por una parte \mathcal{D} es conexo por caminos por ser conexo y por ser \mathbb{R}^n localmente conexo por caminos. Por otra parte hay que observar que $\bigcup_{i=0}^k \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta_i) \setminus \bigcup_{i=0}^k \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ es conexo por caminos, lo cual es intuitivamente claro.

Con estos dos hechos constatados es fácil demostrar que $\mathcal{D} \setminus (\bigcup_{i=1}^{i=k} \Omega(\gamma_i, \delta_i))$ es conexo por caminos. Veámoslo.

Dados dos puntos x e y de $\mathcal{D} \setminus (\bigcup_{i=1}^{i=k} \Omega(\gamma_i, \delta_i))$ vamos a construir un camino conectándolos. Por ser \mathcal{D} conexo por caminos existe una curva en \mathcal{D} que une x e y , llamaremos a dicha curva α . Si α no corta a $\bigcup_{i=1}^{i=k} \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ habríamos acabado. En caso contrario denotamos por x' e y' al primer y último punto de corte de α con $\text{Fr}(\bigcup_{i=0}^k \Omega(\gamma_i, \delta_i))$.

Según hemos hecho notar anteriormente, podemos conectar x' con y' con una curva β sobre la frontera $\text{Fr}(\bigcup_{i=0}^k \Omega(\gamma_i, \delta_i))$. La curva que buscamos será la unión del trozo de α conectando x y x' con β y con el trozo de α que conecta y' con y . \square

Realmente no es este el resultado al que recurriremos en la prueba del teorema de Sidorov, necesitaremos que el conjunto conexo sea $\mathcal{D} \setminus (\bigcup_{i=0}^k \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta_i))$, lo cual también es cierto:

Lema 6.2.2. *En las mismas condiciones que el lema anterior se tiene que $\mathcal{D} \setminus (\bigcup_{i=1}^{i=k} \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta_i))$ es conexo.*

Demostración: se trata de hacer un razonamiento similar al anterior, usando en este caso, además del lema anterior, los siguientes hechos geométricos:

1. Existen $\delta'_i > \delta_i$ tales que los entornos cilíndricos $\Omega(\gamma_i, \delta'_i)$ satisfacen:

$$\Omega(\gamma, \delta) \subset \bar{\Omega}(\gamma, \delta') \subset \mathcal{D}$$

2. $\bigcup_{i=0}^k \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta'_i) \setminus \bigcup_{i=0}^k \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta_i)$ es conexo por caminos.
3. la unión de los entornos cilíndricos $\Omega(\gamma_i, \delta'_i)$ están en las mismas condiciones que en el enunciado del lema 6.2.1

\square

Definición 6.2.4 (conexo por caminos simples de clase C^∞). Un subconjunto \mathcal{A} de \mathbb{R}^n será conexo por caminos simples de clase C^∞ si cada dos puntos x e y de \mathcal{A} se pueden conectar con un camino simple de clase C^∞ , siendo la derivada de dicho camino no nula en todos sus puntos.

Necesitaremos también que el abierto del lema anterior sea no sólo conexo por caminos sino conexo por caminos simples de clase C^∞ .

Proposición 6.2.1. *Todo abierto \mathcal{A} conexo de \mathbb{R}^n es conexo por caminos simples de clase C^∞ .*

Demostración: la demostración de este hecho se hace de manera similar a la prueba de que todo abierto conexo en \mathbb{R}^n es conexo por caminos. Lo que permitía hacer esa demostración era la conexión local por caminos de \mathbb{R}^n (ver [Kur68], página 253, teorema 2). Pero la propiedad local de conexión por caminos simples de clase C^∞ también la satisface \mathbb{R}^n . Con lo cual procediendo de manera similar se obtendrá el resultado del enunciado.

Sólo hay que tener en cuenta para reproducir la prueba que no podemos unir caminos preocupándonos sólo de la continuidad porque aquí juega un papel importante la diferenciabilidad. Habrá que reparametrizar eventualmente los caminos para que en sus extremos no tengamos problemas con la derivabilidad y conservemos la clase C^∞ . \square

6.3 El teorema de Sidorov.

Esta sección está dedicada a la prueba del teorema de Sidorov, la fuente de la que se ha extraído es el artículo [Sid68].

Teorema 6.3.1 (Sidorov). *Para todo abierto conexo \mathcal{D} de \mathbb{R}^n existe un flujo Φ sobre \mathbb{R}^n que posee una órbita Γ tal que $\omega(\Gamma) = \overline{\mathcal{D}}$.*

Demostración: consiste en construir la curva Γ por etapas dando en cada una de las etapas un flujo parcial que contenga al trozo de Γ construido como órbita.

Introducimos una sucesión de bolas contenidas en \mathcal{D} $\{\sigma_k\}_{k=0}^\infty$ tales que la sucesión de sus radios $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ tiende hacia 0 y la sucesión de sus centros $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ sea densa en \mathcal{D} .

Si construimos un flujo de clase C^∞ con una trayectoria que interseque a todas las bolas σ_k tendremos el teorema demostrado. A partir de ahora, para probar esto procederemos por inducción sobre k :

Para $k = 1$ tomamos una curva γ_1 de clase C^∞ uniendo en \mathcal{D} los centros C_0 y C_1 con trozos de extremos rectilíneos. Esta construcción es posible ya que por el lema

6.2.1 \mathcal{D} es conexo por caminos simples de clase C^∞ . Sólo quedaría el problema de los extremos rectilíneos, lo cual se puede arreglar construyendo antes los extremos rectilíneos y luego conectando por una curva de clase C^∞ dichos segmentos.

Tomemos ahora $\delta_1 > 0$ suficiente pequeño de manera que:

1. $\delta_1 < \min\{r_0, r_1\}$
2. $\bar{\Omega}(\gamma_1, \delta_1) \subset \mathcal{D}$

Construimos para γ_1 y el entorno cilíndrico $\Omega(\gamma_1, \delta_1)$ un sistema diferencial definido de manera análoga a 6.1:

$$\frac{dz}{dt}(x) = X_1(x) \quad (6.2)$$

De entre todas las trayectorias del flujo asociado al sistema anterior 6.2 tomamos un subconjunto abierto M_1 de trayectorias que intersecan σ_0 y σ_1 y cuyos trozos iniciales y finales son rectilíneos, entre ellas debemos coger también a la trayectoria que coincide con la imagen de γ_1 . Hemos construido en este primer paso una órbita l_1 (la imagen de γ_1) que interseca a σ_0 y σ_1 y que es una órbita de un flujo sobre \mathbb{R}^n , lo cual concluye el primer paso de la inducción.

Supongamos ahora que después de m pasos hemos construido:

1. las curvas γ_i en \mathcal{D} para $i = 1, 2, \dots, m$ con trozos de extremos rectilíneos.
2. los entornos cilíndricos $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ con clausuras contenidas en \mathcal{D} y tales que $\mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=0}^m \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta_i)$ es un dominio conexo por caminos simples de clase C^∞ .
3. los flujos de clase C^∞ asociados a los entornos $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ de manera análoga a 6.2 definidos por:

$$\frac{dz}{dt}(x) = X_i(x) \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (6.3)$$

Cumpléndose además las propiedades:

1. Dos extremos cilíndricos no pueden intersecar nada más que en sus extremos, donde el flujo será rectilíneo. Además los radios δ_i forman una sucesión de reales positivos estrictamente decreciente.
2. El extremo rectilíneo final de $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ interseca con el extremo inicial de $\Omega(\gamma_{i+1}, \delta_{i+1})$ o de $\Omega(\gamma_1, \delta_1)$, siendo los flujos X_i y X_{i+1} o X_i y X_1 paralelos en dicha intersección.
3. Para $i \geq 2$ el extremo rectilíneo inicial de $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ interseca con el extremo final de $\Omega(\gamma_j, \delta_j)$ con $j < i$ y los flujos X_i y X_j son paralelos en dicha intersección.

4. Para el flujo

$$\frac{dz}{dt}(x) = \sum_{i=0}^m X_i(x) \quad (6.4)$$

la frontera de $\bigcup_{i=0}^m \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ se compone de puntos críticos, mientras que las trayectorias que pasan por puntos del interior de $\bigcup_{i=0}^m \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ son topológicamente uniones de un número finito de trayectorias de los flujos definidos en 6.3 con ω -límite un punto crítico de la base de un $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ y con α -límite un punto de la base de $\Omega(\gamma_1, \delta_1)$.

5. La trayectoria l_m del flujo 6.4 que comienza con γ_1 , contiene a las trayectorias γ_i e interseca a $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$
6. M_m es un conjunto abierto de órbitas del flujo 6.4 que contiene a l_m .

Nuestro objetivo es construir una trayectoria l_{m+1} que contenga a l_m e interseque a $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m+1}$. No sólo eso, sino que l_{m+1} debe estar construida de la misma manera que l_m a base de entornos cilíndricos que satisfagan las mismas condiciones que antes para $i = m + 1$.

Se plantean ahora dos posibilidades (eligiendo una reducción de la bola σ_{k+1} si fuera preciso):

- $\overline{\sigma_{m+1}} \cap (\bigcup_{i=0}^m \bar{\Omega}(\gamma_i, \delta_i)) = \emptyset$
- $\sigma_{m+1} \subset \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

La construcción de l_{m+1} es similar en ambos casos, con lo cual nos situamos en el segundo:

$$\sigma_{m+1} \subset \Omega(\gamma_i, \delta_i) \text{ para algún } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Ahora caben otra vez dos casos, el primero de ellos es que l_m interseque a σ_{m+1} . Ante tal eventualidad extraemos un subconjunto abierto $M_{m+1} \subset M_m$ de órbitas del flujo definido por 6.4 y que contenga a l_m . Elegimos $\gamma_{m+1} = \emptyset$, $X_{m+1} = 0$ y $l_{m+1} = l_m$.

En el segundo caso se tiene que $l_m \cap \sigma_{m+1} = \emptyset$. Elegimos un subconjunto abierto de órbitas de M_m conteniendo a l_m y que no pasen por la bola de centro C_{m+1} y radio $\frac{r_k}{2}$ y que denotaremos todavía por M_{m+1} . Tomamos también un subconjunto abierto de órbitas Π_{m+1} de 6.4 que contengan aquella que pasa por C_{m+1} , que no corte a M_{m+1} y que no contenga puntos comunes con las fronteras laterales de ningún $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$. A la órbita que pasa por C_{m+1} la denotamos por l'_{m+1} .

Construimos la curva γ_{m+1} en $\mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=0}^m \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ cuyo tramo rectilíneo inicial coincide con el tramo rectilíneo final de l_m y cuyo tramo rectilíneo final coincide con el tramo rectilíneo inicial de l'_{m+1} que está en la base de $\Omega(\gamma_1, \delta_1)$. Elegimos δ_{k+1} cumpliendo:

- $0 < \delta_{k+1} < \delta_k$.
- δ_{k+1} es suficientemente pequeño para definir el entorno $\Omega(\gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$.
- el tramo inicial de $\bar{\Omega}(\gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$ pertenece al tramo final de M_m .
- el tramo final de $\bar{\Omega}(\gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$ pertenece al tramo inicial de Π_{m+1} .
- $\bar{\Omega}(\gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$ no tiene puntos comunes con $\bigcup_{i=0}^m \Omega(\gamma_i, \delta_i)$ más que en los extremos de uno o dos entornos cilíndricos.

Construimos ahora el flujo $(m+1)$ -ésimo definido a partir del sistema diferencial:

$$\frac{dz}{dt}(x) = \sum_{i=0}^{m+1} X_i(x) \quad (6.5)$$

donde X_{m+1} es un campo de vectores definido similarmente a 6.2. Como trayectoria l_{m+1} tomamos la trayectoria de 6.5 que contiene a l_m y que será, según nuestra construcción, la unión $l_m \cup \gamma_{m+1} \cup l'_{m+1}$. Tomamos ahora un abierto M_{m+1} formado por órbitas soluciones de 6.5 conteniendo a l_{m+1} .

Estas definiciones justifican el paso inductivo del flujo m al flujo $m+1$, que está en las mismas condiciones que se satisfacían para m . Por lo tanto obtenemos un flujo sobre \mathbb{R}^n definido por:

$$\frac{dz}{dt}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(x) \quad (6.6)$$

El flujo 6.6 posee una órbita con soporte $\bigcup_{i=0}^{\infty} l_m$ que corta a todas las bolas σ_k , como queríamos demostrar.

Hacemos notar antes de terminar que la serie anterior está bien definida porque cada $x \in \mathbb{R}^n$ sólo puede pertenecer simultáneamente a dos entornos cilíndricos, lo cual justifica también que la suma sea de clase C^∞ . \square

6.4 Una caracterización de ω -límites generados por órbitas no recurrentes.

El objetivo de esta tesina es caracterizar los conjuntos ω -límites, o al menos, decir todo aquello que conocemos sobre estos conjuntos. Ya hemos hablado de las dificultades que entrañan dimensiones superiores a 2. Conscientes de la dificultad que conlleva un resultado general del estilo al de Vinograd y por otro lado animados a dar un resultado del mismo tipo vamos a limitar nuestro ámbito a órbitas no

recurrentes. Dejaremos el estudio de las recurrentes para la siguiente sección donde utilizaremos el resultado anteriormente demostrado de Sidorov.

Es necesario recordar la definición de abierto conexo por caminos fronterizos y de entorno de la frontera para dar el teorema de estructura:

Definición 6.4.1 (entorno de la frontera). Dado un abierto conexo O de un espacio métrico X , denotaremos por O_δ al conjunto:

$$\{x \in O : \text{distancia}(x, \text{Fr}O) < \delta\}$$

Y por C_δ denotaremos a una componente conexa de O_δ .

Definición 6.4.2 (abierto conexo por caminos fronterizos). Dado un abierto conexo O de un espacio métrico X , diremos que es conexo por caminos fronterizos si existe una sucesión de componentes conexas $(C_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset (O_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tales que:

1. La sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente.
2. $C_{\delta_j} \subset C_{\delta_i}$ si $j > i$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$.
4. $\text{Fr}C_{\delta_j} \supset \text{Fr}O$.

Observación 6.4.1. *Esta definición de abierto conexo por caminos fronterizos deja todavía un amplio campo de estudio sobre su caracterización, digamos al menos que cualquier bola de \mathbb{R}^n es un abierto conexo por caminos fronterizos.*

Teorema 6.4.1 (Vinograd generalizado). *Dado un sistema dinámico continuo sobre \mathbb{R}_∞^n definido por un sistema diferencial de clase C^k ($k \in \{0, 1, \dots, \infty\}$) y dada una órbita no recurrente Γ de dicho sistema, se tiene que $\omega(\Gamma)$ es la frontera de un abierto conexo por caminos fronterizos.*

Recíprocamente, dado un abierto conexo por caminos fronterizos \mathcal{O} podemos definir un sistema dinámico continuo derivado de un sistema diferencial de clase C^∞ en \mathbb{R}_∞^n con una órbita Γ tal que $\omega(\Gamma) = \text{Fr}\mathcal{O}$.

Observación 6.4.2. *Por un sistema diferencial de clase C^0 entenderemos aquel que esté definido por funciones continuas y localmente lipschitzianas.*

No tenemos ninguna referencia para este teorema, pero su prueba en lo referente a la implicación directa está inspirada en el teorema principal del artículo [BJ96]. En cuanto a la recíproca sigue argumentos similares al teorema de Sidorov.

Demostración: veamos la primera afirmación. Sabemos por las propiedades generales que vimos en el primer capítulo, que $\omega(\Gamma)$ es conexo, compacto y no vacío, por

lo tanto $\mathcal{A} = \mathbb{R}_\infty^n \setminus \omega(\Gamma)$ es abierto. Si lo descomponemos en componentes conexas se tiene:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

Por los resultados generales de topología, se tiene que \mathcal{O}_k son conjuntos abiertos de \mathbb{R}_∞^n . De entre ellos, habrá un \mathcal{O}_j que contenga a la órbita Γ ya que $\omega(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$. Dicha componente conexa será nuestro \mathcal{O} .

Comprobemos que efectivamente \mathcal{O} es un conexo por caminos fronterizos. Por la elección que hemos hecho ya es conexo, por otro lado tomando la sucesión numérica $\delta_n = \frac{1}{n}$ y asociándole a cada δ_i la componente conexa C_{δ_i} que contiene a Γ a partir de un cierto instante de tiempo, construimos la sucesión $(C_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ que buscábamos.

Vamos a demostrar ahora la segunda parte del teorema, para ello supongamos fijado el abierto conexo por caminos fronterizos \mathcal{O} . Según la proposición 6.2.1 tenemos que \mathcal{O} es conexo por caminos simples de clase C^∞ . Emulando las ideas de Sidorov y en parte las de [BJ96] tomamos un conjunto numerable de puntos en \mathcal{O} , que denotaremos por $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y un conjunto de bolas de centros P_i y radios r_i , que denotaremos por σ_i . Estos elementos deben satisfacer además:

- La sucesión $(\text{dist}(P_i, \text{Fr}\mathcal{O}))_{i \in \mathbb{N}}$ es monótona estrictamente decreciente y con límite 0.
- $\overline{\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}} = \text{Fr}\mathcal{O}$.
- $\sigma_i \subset \mathcal{O}$ para todo i .
- La sucesión de los radios de las bolas σ_i es estrictamente decreciente y tiende hacia 0.

Para la prueba del teorema bastará con construir un flujo que contenga una órbita intersectando a todas las bolas σ_i . Este proceso de construcción es similar al del teorema de Sidorov y se hace por inducción.

Para comenzar construimos una órbita γ_1 simple de clase C^∞ en \mathcal{O} uniendo los puntos P_0 y P_1 con extremos rectilíneos. A partir de ella construimos el entorno cilíndrico $\Omega(\gamma_1, \delta_1)$ de manera que $\delta_1 < r_1$ y el flujo asociado al sistema diferencial que se define igual que en 6.2.

Supongamos que después de m pasos hemos construido las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, sus entornos cilíndricos asociados $\Omega(\gamma_i, \delta_i)$ y los campos de vectores X_i tal y como se hizo en 6.2, siendo la intersección de dos cilindros vacía o como mucho los extremos rectilíneos. Además la sucesión finita de δ_i estrictamente decreciente y de manera que la unión $\bigcup_{i=0}^m \gamma_i$ sea una órbita del sistema dinámico definido por:

$$\frac{dz}{dt}(x) = \sum_{i=0}^m X_i(x)$$

La órbita $\bigcup_{i=0}^m \gamma_i$ interseca a las bolas $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$, su α -límite pertenece a la base de $\Omega(\gamma_1, \delta_1)$ y su ω -límite a la de $\Omega(\gamma_m, \delta_m)$.

Procedamos a la construcción de γ_{m+1} y del sistema dinámico que posea una órbita conteniendo a $\bigcup_{i=0}^m \gamma_i$ y γ_{m+1} , de manera que interseque además a σ_{m+1} . Para ello construimos una curva uniendo el extremo final de γ'_{m+1} con el punto P_{m+1} , de manera que el sus extremo final sea rectilíneo. Por otra parte exigimos que la curva γ_m unida a γ'_{m+1} sea una curva simple de clase C^∞ . Definimos ahora γ_{m+1} como la curva que se obtiene de unir el extremo rectilíneo final de γ_m con γ'_{m+1} .

Elegimos δ_{m+1} un real positivo menor que δ_m de manera que esté bien definido el entorno cilíndrico $\Omega(\gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$ y que esté contenido en \mathcal{O} . Definimos el campo de vectores X_{m+1} como en 6.2 y el flujo $(m+1)$ -ésimo dado por el sistema diferencial:

$$\frac{dz}{dt}(x) = \sum_{i=0}^{m+1} X_i(x)$$

el cual tendrá a $\bigcup_{i=0}^{m+1} \gamma_i$ como órbita. Hemos dado satisfactoriamente el paso m -ésimo de la inducción, con lo cual tiene sentido plantearse el sistema diferencial C^∞ :

$$\frac{dz}{dt}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(x)$$

que tendrá una órbita formada por la unión $\bigcup_{i=0}^{\infty} \gamma_i$ que concluye el teorema.

Hacemos notar que la condición de la cadena de la definición de abierto conexo por caminos fronterizos se ha usado implícitamente. Dicha condición es necesaria para que la órbita que vamos construyendo inductivamente no tenga puntos de acumulación fuera de $\text{Fr}\mathcal{O}$. \square

Un problema que sale de este teorema sería ver si los abiertos conexos por caminos fronterizos son abiertos conexos con complementario conexo. La intuición nos dice que la respuesta es afirmativa, pero todavía no hemos encontrado una prueba satisfactoria. En cambio en el plano sí que se da este resultado, pero allí es una consecuencia trivial del teorema de la aplicación de Riemann.

Recordamos que en el capítulo anterior apelábamos a esta demostración en la parte referente a la construcción del flujo y decíamos que se podía repetir exactamente en el contexto de las superficies. Esto es posible hacerlo ya que las superficies, al igual que \mathbb{R}^n son localmente conexas por caminos fronterizos.

Corolario 6.4.1. \mathbb{S}^1 es el ω -límite de una órbita solución de un sistema diferencial autónomo de clase C^∞ definido en \mathbb{R}^3 .

Demostración: es una consecuencia inmediata del teorema anterior y la observación 6.4.1. \square

Corolario 6.4.2. \mathbb{R}^2 es el ω -límite de una órbita solución de un sistema diferencial autónomo definido en \mathbb{R}^3 .

Demostración: tenemos la posibilidad de hacerla directamente repitiendo los mismos pasos que la demostración del teorema de Vinograd generalizado o utilizar la proyección estereográfica $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para pasar \mathbb{R}^2 a \mathbb{S}^3 , utilizar allí el teorema anterior y pasar el sistema a \mathbb{R}^3 mediante f . \square

6.5 Una caracterización de ω -límites generados por órbitas recurrentes.

En esta sección se trata de dar un teorema de estructura similar al teorema 6.4.1 sobre los conjuntos ω -límites generados por órbitas tales que $\Gamma \cap \omega(\Gamma) \neq \emptyset$. Desgraciadamente no podemos decir nada para el caso en el que el ω -límite sea de interior vacío y nuestro teorema sólo va a abarcar el caso de interior no vacío. Enunciémoslo ya:

Teorema 6.5.1 (estructura del ω -límite con interior no vacío). *Dado un sistema dinámico continuo sobre \mathbb{R}^n definido por un sistema diferencial de clase C^k ($k \in \{0, 1, \dots, \infty\}$) y dada una órbita recurrente Γ de dicho sistema que satisfaga $\text{Int}(\omega(\Gamma)) \neq \emptyset$, se tiene que $\omega(\Gamma)$ es la clausura de un abierto conexo.*

Recíprocamente, dado un abierto conexo \mathcal{O} podemos definir un sistema dinámico continuo derivado de un sistema diferencial de clase C^∞ en \mathbb{R}^n con una órbita Γ tal que $\omega(\Gamma) = \text{Cl}\mathcal{O}$.

Demostración: La segunda afirmación no es más que el teorema de Sidorov, que se probó anteriormente en la sección 6.3.

En cuanto a la primera, tomemos $\mathcal{O} = \text{Int}\omega(\Gamma)$. La curva Γ debe encontrarse forzosamente en \mathcal{O} y por ser $\omega(\Gamma)$ cerrado, se tendrá $\bar{\mathcal{O}} \subset \omega(\Gamma)$. Y por otro lado $\omega(\Gamma) = \bar{\Gamma} \subset \bar{\mathcal{O}}$. \square

Índice de Materias

- α -límite, 11
 - débil, 16
- $\chi(\mathcal{M}^2)$, 43
- ω -límite, 11
 - con interior no vacío, 146
 - débil, 16
 - de órbitas recurrentes, 146
 - de órbitas no recurrentes, 142
 - en superficies, 101
 - estructura topológica, 129
- n -sima diferencia
 - función, 78
- n -simo consecutivo
 - de un punto, 79
 - función, 78
- Abierto
 - transitivo, 116
- Abierto conexo por caminos
 - fronterizos, 103, 116, 143
- Abiertos transitivos de \mathbb{R}^n , 135
- Admisible, superficie, 97
- Atlas, 30
- Banda de Möbius, 60
- Botella de Klein, 72
- Característica de Euler-Poincaré, 43, 62
- Cartas, 30
- Cherry, 93
- Conexión
 - por caminos simples de clase C^∞ , 139
- Conexo
 - por caminos fronterizos, 103, 116, 143
- Conjunto
 - perfecto, 49
 - realizable, 25
 - derivado, 83
 - invariante, 83
- Conjunto minimal, 44
 - no trivial, 126
 - trivial, 44
- Contiguo, 81
- Cubrimiento de una pseudo-rotación, 125
- Curva
 - cerrada, 67
 - propiedades, 67
 - simple, 67
 - de control, 68
- Denjoy, contraejemplo de, 75, 135
- Desigualdad fundamental, 52
- Entorno
 - de la frontera, 103
- Entorno cilíndrico, 136
 - conexión, 138
 - base, 137
 - superficie lateral, 137
- Equivalencia topológica, 96
- Esfera de n asas, 60
- Espacio
 - recubridor, 39
- Espacio de fases, 8
- Euler-Poincaré característica, 62
- Euler-Poincaré, característica, 43
- Flujo, 8, 35
 - con órbita densa, 96

- de Cherry, 75, 93
- levantamiento de un, 41
- propiedades en superficies, 35
- sobre el toro, 67, 85, 89
- tubular, teorema, 45
- Función
 - n -sima diferencia, 78
 - n -simo consecuente, 78
- Género, 62
- Índice de una singularidad, 47
- Klein, botella, 63
- Levantamiento, 39
 - de un flujo, 41
 - universal, 67
- Número de Möbius, 62
- Número de rotación, 79
 - irracional, 81
 - racional, 80
- Orbita, 10, 68, 83
 - recurrente
 - no trivial, 124
 - sobre el toro, 75
 - esencialmente recurrente, 128
 - recurrente, 69, 126
 - en \mathbb{T}^2 , 92
 - sin interior, 122
- Orbita periódica, 15
- Orientación, 25
- Parametrización, 11
- Plano proyectivo, 130
- Pseudo-rotación del círculo, 124
- Punto
 - admisible, 10
 - de primera especie, 83
 - de segunda especie, 83
- Recta racional, 64
- Recubridor
 - característica, 43
- Recubrimiento, 40
 - orientable doble, 42
- Recurrencia, 69
 - negativa, 69
 - positiva, 69
- S.D.C., 8
- S.D.D., 8
- Sección local, 17, 45
- Sección transversal, 64
- Segmento, 17
 - abierto, 65
 - cerrado, 65
- Semiórbita
 - negativa, 68, 83
 - positiva, 68, 83
- Sistema diferencial
 - órbita, 34
 - de clase C^0 sobre \mathbb{T}^2 , 85
 - de clase C^1 sobre \mathbb{T}^2 , 89
 - solución, 33
 - única, 34
 - maximal, 34
- Sistema dinámico, 8
 - continuo
 - ejemplo, 10
 - continuo, 8
 - asociado a una aplicación, 9
 - con órbita densa, 96
 - discreto, 8
- Suma conexa, 59
- Superficie, 30
 - admisible, 97
 - compacta
 - propiedades, 61
 - teorema de clasificación, 61
 - no orientable, modelos, 60
 - orientable, modelos, 60
 - reducida, 110
 - abierta, 110
- Suspensión, 125
- Teorema
 - flujo tubular, 45

- Teorema de
 estructura, 125
 estructura de los ω -límites, 129
 existencia, 127
 Gutiérrez, 125
 Poincaré-Bendixson, 21
 Schwartz, 75
 Weil, 65
 clasificación de superficies, 61
 Gutiérrez, 96
 Knesser, 73
 Knesser-Markley, 63
 Poincaré-Bendixson, 22
 Poincaré-Hopf, 47
 Schwartz, 29, 44, 45
 Sidorov, 136, 139
 Solncev, 23
 Vinograd, 23, 24
 generalización, 103, 143
 Whitney, 37
- Toro, 63
 conjunto minimal, 44
 flujos sobre, 67
 recubridor, 43
- Trayectoria, 10
- Witner
 lema de, 77

Bibliografía

- [AL73] A. Andronov and E. Leontovich. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. John Wiley And Sons, New York, 1973.
- [Ama90] H. Amann. *Ordinary differential equations. An introduction to nonlinear analysis*. De Gruyter studies in mathematics 13, De Gruyter, Berlin, 1990.
- [Ben01] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math.*, **24**:1–88, 1901.
- [Bir27] G. Birkhoff. *Dynamical systems*. *A.M.S Publications*, 1927. Providence, Rhode Island.
- [BJ96] Francisco Balibrea and Víctor Jiménez. A characterization of the ω -limit sets of planar continuous dynamical systems. *J. Differential Equations*, **145**:469–488, 1996.
- [BM97] J.C. Beniere and G. Meigniez. Flows without minimal set. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **19**:21–33, 1997.
- [Bur79] R. B. Burckel. *An introduction to classical complex analysis*, volume I. Birkhäuser, Basel, 1979.
- [Car76] Manfredo P. Do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, Madrid, 1976.
- [Che38] T. M. Cherry. Analytic quasy-periodic curves of discontinuous type on a torus. *Proc. London Math. Soc.*, **44**:175–215, 1938.
- [Den32] Arnaud Denjoy. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures Appl.*, **11**:333–375, 1932.
- [Fer92] José A. Fernández. *Análisis matemático II*. Tecnos, Madrid, 1992.
- [Ful95] William Fulton. *Algebraic topology, a first course*. Springer-Verlag, New York, 1995.

- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [Gre96] J. Barrow Green. *Poincaré and the three body problem*, volume II. Amer. Math. Soc., London Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1996.
- [Gri90] R. Grimshaw. *Nonlinear ordinary differential equations*. Blackwell Scientific Publications, Applied Mathematics And Engineering Science Texts **2**, Oxford, 1990.
- [Gut78a] Carlos Gutiérrez. Smooth nonorientable nontrivial recurrence on two-manifolds. *J. Differential Equations*, **29**:388–395, 1978.
- [Gut78b] Carlos Gutiérrez. Structural stability for flows on the torus with a cross-cap. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **241**:311–320, 1978.
- [Gut79] Carlos Gutiérrez. Smoothing continuous flows and the converse of Denjoy-Schwartz theorem. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, **51**:581–589, 1979.
- [Gut86] Carlos Gutiérrez. Smoothing continuous flows on two manifolds and recurrences. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6**:17–44, 1986.
- [Haa53] Felix Haas. On the global behavior of differential equations on two-dimensional manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:630–636, 1953.
- [Haa54] Felix Haas. Poincaré-Bendixson type theorems for two dimensional manifolds different from the torus. *Ann. of Math.*, **59**:292–299, 1954.
- [Hal81] Glen Richard Hall. A C^∞ Denjoy counterexample. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1**:261–272, 1981.
- [Har82] Philip Hartman. *Ordinary differential equations*. Birkhäuser, Boston, 1982.
- [Hir88] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [HS83] M. W. Hirsch and S. Smale. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Editorial, Madrid, 1983.
- [Kin93] L. Christine Kinsey. *Topology of surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Kur68] K. Kuratowski. *Topology*, volume II. Academic Press, New York, 1968.
- [LT95] D. A. Laurence and E. S. Thomas. A note on transitive flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15**:333–339, 1995.
- [Mai43] A.G. Maier. Trajectories on the closed orientable surfaces. *Mat. Sb.*, **12**:71–84, 1943. En Ruso.

- [Mar66] Nelson G. Markley. The structure of flows on two-dimensional manifolds. Dissertation. *Yale University*, 1966.
- [Mar69a] Nelson G. Markley. On the number of recurrent orbit closures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**:413–416, 1969.
- [Mar69b] Nelson G. Markley. The Poincaré-Bendixson theorem for the klein bottle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135**:159–165, 1969.
- [Mar78] Nelson G. Markley. Invariant simple closed curves on the torus. *Michigan Math. J.*, **25**:45–52, 1978.
- [Moi77] Edwin E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [MS93] Wellington De Melo and Sebastian Van Strien. *One dimensional dynamics*. Springer-Verlag, Michigan, 1993.
- [Mun75] James R. Munkres. *Topology, a first course*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [NOR95] Novo, Obaya, and Rojo. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. Mc. Graw Hill, Madrid, 1995.
- [NS60] V. Nemytskii and V. Stepanov. *Qualitative theory of differential equations*. Princeton University Press, Princeton, 1960. (Russian original, Moscow, 1949).
- [Oda89] Kenzi Odani. Nontrivial recurrent orbits of flows on surfaces. *Japan J. Math.*, **15**:205–211, 1989.
- [Pei62] M.M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, **1**:101–120, 1962.
- [Per91] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Texts In Applied Mathematics 7. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [PM82] Jacob Palis and Wellington De Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New-York, 1982.
- [Poi85] H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *J. Math. Pures Appl.*, **1**:167–244, 1885.
- [Sch63] Arthur J. Schwartz. A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *Amer. J. Math.*, **85**:453–458, 1963.
- [Sid68] Ye. A. Sidorov. Smooth topologically transitive dynamical systems. *Mat. Zametki*, **4**:751–759, 1968. En Ruso.

- [Sid73] Ye. A. Sidorov. Topologically transitive cylindrical cascades. *Mat. Zametki*, **14**:441–452, 1973. En ruso.
- [Sim93] G. F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas (segunda edición)*. Mc. Graw Hill, Madrid, 1993.
- [Sol45] Iu. K. Solncev. On the asymptotic behavior of integral curves of a system of differential equations. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **9**:233–240, 1945. En Ruso.
- [Sot79] Jorge Sotomayor. *Lições De Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto De Matemática Pura E Aplicada., Río De Janeiro, 1979.
- [ST88a] Russel A. Smith and S. Thomas. Some examples of transitive smooth flows on differentiable manifolds. *J. London Math. Soc.*, **37**:552–568, 1988.
- [ST88b] Russel A. Smith and S. Thomas. Transitive flows on two-dimensional manifolds. *J. London Math. Soc.*, **37**:569–576, 1988.
- [Ste70] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [Tho79] J. A. Thorpe. *Elementary topics in differential geometry*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [Ver90] F. Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Vin52] R. E. Vinograd. On the limiting behavior of an unbounded integral curve. *Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. 155, Mat.*, **5**:94–136, 1952. En Ruso.
- [Wal68] Andrew Wallace. *Differential topology first steps*. The Benjamin Cummings Publishing Company, Philadelphia, 1968.
- [Whi34] H. Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**:63–89, 1934.