

Caracterización topológica de conjuntos ω -límite
sobre variedades

Gabriel Soler López

20 de abril de 2005

Índice general

Introducción	1
Sistemas dinámicos continuos	1
Teoría de Poincaré-Bendixson	5
Extensiones del teorema de Poincaré-Bendixson	7
Caracterizaciones topológicas y dinámicas de los conjuntos ω -límite	8
Nuestra contribución a la teoría de Poincaré-Bendixson	12
1. Definiciones básicas y resultados técnicos	21
1.1. Variedades topológicas y diferenciables. Espacio tangente	21
1.1.1. Variedades	21
1.1.2. Variedades con frontera combinatoria	24
1.1.3. Espacio tangente	26
1.1.4. Aplicación diferencial. Inmersiones, submersiones y embebi- mientos	28
1.2. Ecuaciones diferenciales autónomas sobre variedades. Flujos, flujos locales y semiflujos	31
1.3. Flujos. Relación entre flujos y flujos locales	34
1.3.1. Relación entre flujos y flujos locales definidos sobre variedades	35
1.4. Conjuntos ω -límite	37
1.4.1. Conjuntos y variedades minimales	42
1.4.2. Conjuntos y variedades transitivas	44
1.5. Variedades de dimensión dos y tres	46

1.5.1.	Suavizando variedades topológicas de dimensiones dos y tres	46
1.5.2.	Notación y definiciones relacionadas con la noción de superficie	47
1.5.3.	Modelos de superficies. Pseudosuperficies	50
1.5.4.	Propiedades de los modelos de superficies	53
1.5.5.	Clasificación de superficies	53
2.	Órbitas no recurrentes en superficies	55
2.1.	Introducción	55
2.1.1.	Primera descripción del conjunto ω -límite: aproximación de Poincaré y Bendixson	56
2.1.2.	Caracterizaciones topológicas del conjunto ω -límite. Un resumen de resultados	58
2.2.	Lemas técnicos	61
2.3.	Teorema de caracterización de conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes sobre superficies compactas y conexas	67
2.3.1.	Prueba de la caracterización de los conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes. Primera parte	68
2.3.2.	Prueba de la caracterización del conjunto ω -límite de órbitas no recurrentes. Segunda parte	69
2.4.	El plano proyectivo	69
2.4.1.	Prueba de la caracterización de los conjuntos ω -límite sobre el plano proyectivo. Primera parte	71
2.4.2.	Prueba de la caracterización del conjunto ω -límite en el plano proyectivo. Segunda parte	71
2.4.3.	El caso de la botella de Klein	73
2.5.	Caracterización para superficies en general	78
3.	Órbitas recurrentes sobre superficies generando conjuntos ω-límite con interior vacío	79
3.1.	Introducción	79
3.2.	El flujo de Denjoy	80

3.2.1.	Suspensión de un homeomorfismo del círculo	81
3.2.2.	El homeomorfismo de Denjoy	82
3.2.3.	Suspensión del homeomorfismo de Denjoy	83
3.2.4.	Modificaciones del ejemplo de Denjoy	84
3.3.	Número de ω -límites generados por órbitas recurrentes	87
3.4.	Enunciado del teorema de estructura de los conjuntos ω -límites con interior vacío generados por órbitas recurrentes no triviales	88
3.5.	Prueba de la primera parte del teorema 3.4.A	93
3.6.	Prueba de la segunda parte del teorema 3.4.A	98
3.6.1.	Regularización de las fronteras de las superficies R_n	99
3.6.2.	Construcción del flujo	109
3.6.3.	Final de la prueba	109
3.7.	Todas hipótesis del teorema son necesarias	111
3.7.1.	Familias que satisfacen las condiciones (ii) y (iii) de la definición 3.4.5	112
3.7.2.	Familias que satisfacen las condiciones (i) y (iii) de la definición 3.4.5	115
3.7.3.	Familias que satisfacen las condiciones (i) y (ii) de la definición 3.4.5	118
4.	Órbitas recurrentes sobre superficies. Transitividad	121
4.1.	Introducción	121
4.2.	Prueba de la caracterización de superficies transitivas (teoremas 4.1.A y 4.1.B)	126
4.2.1.	Simplificaciones previas	126
4.2.2.	Implicaciones (i) \Rightarrow (ii) y (ii) \Rightarrow (iii)	127
4.2.3.	Demostración de la implicación (iii) \Rightarrow (iv)	127
4.2.4.	Demostración de la implicación (iv) \Rightarrow (i)	129
5.	Variedades de dimensión n, $n \geq 3$	133
5.1.	Introducción	133

5.2. Notación y resultados técnicos	135
5.2.1. Prueba del teorema 5.2.A en el caso continuo	139
5.2.2. Prueba del teorema 5.2.A en el caso suave	143
5.3. Estudio de órbitas no recurrentes sobre variedades compactas: el teo- rema de Vinograd en \mathbb{S}^n con $n \geq 3$	147
5.3.1. Introducción	147
5.3.2. Caracterización de conjuntos ω -límites de órbitas no recurrentes	149
5.3.3. Resultados topológicos sobre \mathbb{S}^n	156
5.3.4. El teorema de Vinograd generalizado para órbitas no recurrentes	160
5.4. Transitividad en variedades de dimensión n para valores $n \geq 3$	160
Índice de materias	162
Bibliografía	166

Introducción

Sistemas dinámicos continuos

La forma de abordar la teoría de *ecuaciones diferenciales ordinarias* sufrió una revolución a finales del siglo XIX como consecuencia del artículo “*Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle*” publicado por Henri Poincaré entre 1881 y 1886, [Poi81, Poi82, Poi85, Poi86]. Esta revolución ha influido decisivamente a la hora de abordar problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales y ha dado lugar al nacimiento de los *sistemas dinámicos*.

Cuando Poincaré empieza a interesarse por el estudio de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales, la tendencia que se seguía era la de construir funciones soluciones de una ecuación diferencial por desarrollos en serie en entornos de los puntos singulares de la ecuación diferencial. Esta forma de abordar el problema introducida por Cauchy tenía sentido una vez que se habían demostrado los teoremas de existencia y unicidad de Peano, Picard y el propio Cauchy. A este acercamiento a las ecuaciones diferenciales sumaron sus esfuerzos matemáticos como Briot, Bouquet e incluso Wierstrass y Jordan que probaron por separado nuevos teoremas de existencia de soluciones cuando ya había aparecido el trabajo de Poincaré, incluso el trabajo de Jordan se hizo más de veinte años después de la aparición del de Poincaré.

Las nuevas ideas de Poincaré fueron revolucionarias, aunque no supusieron el abandono tajante de otro tipo de ideas, incluso el mismo Poincaré se ocupó al principio de mejorar los resultados sobre desarrollo en serie de soluciones de Briot y Bouquet.

En cuanto a las ideas renovadoras que aparecen en [Poi81, Poi82, Poi85, Poi86] se pueden resumir en tres direcciones:

- Se decide estudiar las soluciones de forma global y no en torno sólo de los

puntos singulares. Es decir, hay un interés por conocer todo lo posible sobre el *diagrama de fases* de una ecuación diferencial.

- ▶ Hay un abandono de las soluciones que son funciones de variable compleja y un interés por aquellas que son funciones reales de variable real.
- ▶ Aparece una geometrización del problema.

El propio Poincaré considera utópico el describir el carácter asintótico de todas las soluciones de una ecuación. No obstante considera que la utilización de la geometría del espacio de fases es suficiente para estudiar ciertos aspectos cualitativos relevantes de las soluciones de un problema. Más de un siglo después de la calificación de utopía de Poincaré y después de cientos de artículos sobre el tema no podemos más que darle la razón: son muchos los aspectos que conocemos del diagrama de fases de un sistema, pero no su descripción global. En ese sentido, la presente memoria intenta desvelar la estructura asintótica de soluciones individuales de una ecuación diferencial y lo consigue para variedades compactas y conexas de dimensión dos y para variedades de dimensión mayor sólo cuando las *órbitas* son *no recurrentes* o algún tipo concreto de *recurrencias*.

A pesar de ser considerado Poincaré el pionero del estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales, es conveniente hacer notar que ya en 1836 J. C. F. Sturm publicó un artículo sobre las ecuaciones lineales de segundo orden haciendo argumentos de tipo cualitativo. En 1833 dejó constancia en su memoria de la importancia del estudio cualitativo de ecuaciones:

Sólo sabemos integrar ecuaciones diferenciales lineales en un pequeño número de casos particulares, fuera de los cuales no somos capaces ni de calcular una integral primera; e incluso cuando conocemos una función que verifica tales ecuaciones, sea una expresión analítica, desarrollo en serie o en forma de integrales definidas o indefinidas, lo más normal es que es que en esta expresión sea difícil de evaluar o conocer sus propiedades características. Así, por ejemplo, no podemos ver si en un intervalo dado se anula o tiende hacia infinito, si cambia de signo, o si tiene máximos y mínimos. Sin embargo, el conocimiento de estas propiedades contienen la información más importante que pueden presentar los numerosos fenómenos físicos y dinámicos a los que se refieren éstas. Si importa poder determinar el valor de la función desconocida para un valor aislado

cualquiera, no es menos necesario conocer las características de ésta¹, o en otros términos, examinar la forma o las sinuosidades de la curva definida por la función. Sin embargo se puede llegar a este fin por la sola consideración de las ecuaciones diferenciales en si mismas, sin que haya necesidad de su integración.

De todas formas, debido a la novedad, variedad de herramientas, conceptos y nuevos métodos introducidos por Poincaré, así como la trascendencia de su obra, se considera unánimemente a éste como el punto de partida de los *sistemas dinámicos* cuyo estudio articuló en torno a cuatro aspectos principales:

- ▶ La *teoría cualitativa* de ecuaciones diferenciales.
- ▶ La *estabilidad global* de conjuntos de órbitas.
- ▶ Las *bifurcaciones* y las *ecuaciones diferenciales dependientes de parámetros*.
- ▶ La introducción de *conceptos probabilísticos* en la dinámica.

En cuanto a los objetos geométricos que Poincaré introduce se encuentran los *arcos o ciclos sin contacto* (curvas que no son tangentes a ninguna trayectoria solución de la ecuación diferencial en estudio) y ciertos conjuntos de curvas con propiedades especiales, formados por la unión de trayectorias y donde la dinámica es “sencilla”. Entre estos conjuntos destacan *las trayectorias de tipo centro, los ciclos límite y las variedades estables e inestables de puntos singulares*. No obstante la definición precisa y rigurosa de estos conceptos, así como las condiciones exactas para que el espacio de fases quede perfectamente determinado por ellos se deben a Markus y Newman, ver [Mar54, Neu75].

Uno de los resultados fundamentales² de Poincaré estudia la estructura asintótica de algunas órbitas de una ecuación diferencial y se puede enunciar, sin utilizar definiciones que se introducen más tarde, como sigue:

Teorema (Poincaré, [Poi85]). *Las órbitas acotadas de una ecuación diferencial analítica sobre el plano que no acaban en un punto singular se dividen en dos tipos:*

- *órbitas periódicas y*

¹**Nota por eliminar:** buscar la traducción de *marche* del francés

²En el artículo histórico [AD02] se considera como la aportación fundamental del trabajo de Poincaré en el campo de ecuaciones diferenciales

- *órbitas que tienden asintóticamente hacia una órbita periódica.*

Este teorema fue generalizado 15 años más tarde por Ivar Bendixson en [Ben01]. El resultado probado por éste es el mismo que el de Poincaré, pero sólo pidiendo a la ecuación diferencial que sea de clase C^1 :

Teorema (Poincaré-Bendixson, [Poi85, Ben01]). *Las órbitas acotadas de una ecuación diferencial de clase C^1 sobre el plano que no acaban en un punto singular se dividen en dos tipos:*

- *órbitas periódicas y*
- *órbitas que tienden asintóticamente hacia una órbita periódica.*

Éste resultado es el célebre teorema de Poincaré-Bendixson y ha dado lugar a una rama importante de investigación en sistemas dinámicos, *la teoría de Poincaré-Bendixson*, que intenta desvelar la estructura asintótica de cada una de las órbitas de un sistema. Por supuesto que la formulación del teorema anterior no es la que ahora utilizamos, antes de dar una expresión más moderna preferimos hacer algunos comentarios sobre la aparición de la notación que ahora utilizamos, las definiciones precisas y finalmente la reformulación con la nueva notación.

La definición abstracta de *sistema dinámico* no aparece hasta los años treinta cuando la introdujeron independientemente Andrei Andreievich Markov (1903-1979) y Hassler Whitney (1907-1989), ver [Mar31, Whi32a, Whi32b] y [Cie01, sección 7]. Esta definición abstracta generaliza los sistemas que se estaban considerando, que eran básicamente los que provenían de ecuaciones diferenciales y la podemos enunciar de la siguiente manera.

Definición (sistema dinámico continuo). Dado un espacio métrico X , un *un sistema dinámico continuo sobre X* es una terna (X, \mathbb{R}, Φ) , donde $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ es una aplicación continua que verifica:

1. $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$.
2. $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.

Llamaremos *flujo* a la aplicación Φ , *espacio de fases* al espacio métrico X y para cada $x \in X$ la curva $\Phi(\mathbb{R} \times \{x\})$ (y a veces también su parametrización $\gamma_x(t) = \Phi(t, x)$)

será la *órbita de x* . Cuando la órbita de un punto x está formada sólo por dicho punto se dice que x es *singular* y cuando existe un número real $T > 0$ tal que $\Phi(T, x) = x$ y $x \notin \Phi((0, T) \times \{x\})$ se dice que la órbita de x es *periódica*.

Todavía se necesita introducir otra noción para dar el enunciado usual del teorema de Poincaré-Bendixson, ésta es la de *conjunto ω -límite*. Aunque la idea del conjunto ω -límite ya está en los trabajos de Poincaré y en los de Bendixson, la definición de este concepto, y también el de α -límite, se debe a George David Birkhoff (1884-1944) que la introdujo en [Bir27, capítulo 7, sección 6], ver también [Cie01, sección 4]. Por lo tanto la definición de estos conjuntos es anterior a la definición abstracta de sistema dinámico. Esto es así porque Birkhoff, que es considerado en algunos libros como el creador de la teoría de sistemas dinámicos [BS70, introducción, página 2], sólo trabajaba con este tipo de sistemas ligados a ecuaciones diferenciales.

Definición (conjuntos α -límite y ω -límite). Dado un espacio métrico X , un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ y un punto $x \in X$, se define el conjunto ω -límite del punto x como:

$$\omega_{\Phi}(x) = \{y \in X : \text{existe } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty \text{ tal que } (\Phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y\}$$

y el conjunto α -límite de x :

$$\alpha_{\Phi}(x) = \{y \in X : \text{existe } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty \text{ tal que } (\Phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y\}.$$

Teoría de Poincaré-Bendixson

Con la notación introducida el teorema de Poincaré-Bendixson admite una formulación a la que estamos más acostumbrados en la literatura actual:

Teorema (Poincaré-Bendixson). *Dado un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ de clase C^2 y un punto $x \in \mathbb{S}^2$. Entonces si $\omega_{\Phi}(x)$ no contiene puntos singulares es una órbita periódica.*

Así que el teorema da una descripción precisa de los ω -límite que no contienen puntos singulares en la esfera, desde los puntos de vista topológico y dinámico:

- (i) desde el punto de vista topológico nos dice que este conjunto es un círculo³

³Un círculo es cualquier espacio homeomorfo a $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(ii) y desde el dinámico nos dice que es una órbita periódica.

A partir de este teorema es natural plantearse varios problemas cuya resolución han ido conformando la *teoría de Poincaré-Bendixson*. Entre otros nos parecen de interés citar los que siguen, cuya respuesta a veces se ha articulado a través de otra serie de problemas, algunos de ellos todavía sin resolver.

1. Extensiones del teorema de Poincaré-Bendixson:
 - a) en la esfera para flujos continuos y de clase C^1 ,
 - b) en superficies⁴,
 - c) en variedades de dimensión mayor o igual a 3.

2. Caracterizaciones topológicas de los conjuntos ω -límite sin restricción sobre el número de puntos singulares existentes en el dicho conjunto:
 - a) en la esfera,
 - b) en superficies,
 - c) en variedades de dimensión mayor o igual a 3.

3. Caracterizaciones dinámicas de los conjuntos ω -límite.

Antes de seguir avanzando sobre el estado de los problemas anteriores en cuanto a su resolución y autor o autores de la misma y sobre todo para fijar ideas, conviene indicar que la aportación de esta memoria se centra en el segundo problema de los tres anteriores. Esta aportación será descrita en la tercera parte de esta introducción. También es pertinente decir que los tres problemas anteriores no son independientes, siendo la relación entre ellos estrecha.

⁴ El cambio de la esfera por otros espacios de fases hace que la dinámica se pueda complicar, en concreto pueden aparecer flujos $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ con *puntos recurrentes no triviales*, aquellos puntos x tales que $x \in \omega_\Phi(x)$ y además no son ni puntos singulares ni pertenecen a órbitas periódicas. Separamos el estudio de variedades de dimensión mayor que dos del de superficies puesto que en las primeras siempre existen puntos recurrentes no triviales mientras que en las segundas no siempre es así.

Extensiones del teorema de Poincaré-Bendixson

Este problema ha ocupado a un gran número de matemáticos del siglo XX puesto que restringe bastante el comportamiento de un sistema dinámico. Sin embargo su validez en espacios distintos de la esfera es muy limitada. En cuanto a las vías para generalizar el resultado se han seguido dos caminos dependiendo de si estamos ante flujos derivados de ecuaciones diferenciales autónomas o flujos generales.

Para flujos derivados de ecuaciones diferenciales en 1932 Arnold Denjoy, ver [Den32], puso de manifiesto la existencia de flujos de clase C^1 sobre el toro sin puntos fijos ni órbitas periódicas, lo que implica que dicho teorema no es válido en el toro. La validez del teorema para flujos de clase C^2 sobre superficies compactas y conexas quedó pendiente de resolución hasta su consecución en 1963 por A. Schwartz en [Sch63]. Conviene decir que hasta la prueba de Schwartz el problema no quedó olvidado sino que hubo intentos fallidos para probar el teorema, como los de Felix Haas [Haa53, Haa54]⁵.

Por otro lado la generalización del teorema o la consecución de un contraejemplo para la esfera n -dimensional es un problema que también estuvo abierto durante bastante tiempo. En concreto, H. Seifert conjeturó en [Sei50] que cualquier flujo de clase C^1 sobre \mathbb{S}^3 debe tener órbitas periódicas o puntos singulares. Un contraejemplo a la conjetura de Seifert supondría que la extensión de Poincaré-Bendixson no es posible para la esfera de dimensión 3, este contraejemplo se consiguió 24 años después de que Seifert lanzara su conjetura. En concreto P. A. Schweitzer consiguió contraejemplos a la conjetura de clase C^1 en cualquier variedad de dimensión 3 en [Sch74], también es conveniente destacar que se han conseguido contraejemplos analíticos en cualquier variedad de dimensión mayor que 2 por G. Kuperberg y K. Kuperberg en [KK96].

La otra vía de extensión del resultado de Poincaré y Bendixson consistiría en rebajar la hipótesis de la clase de diferenciabilidad y plantearse si el teorema se satisface para flujos continuos que no derivan de la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta extensión ha sido posible mediante la demostración de resultados para flujos generales que estaban en el germen de la demostración del teorema para flujos derivados de ecuaciones diferenciales. Por supuesto que las pruebas de estos resultados se han tenido que hacer específicamente para flujos generales. Conviene citar

⁵M. M. Peixoto encontró una errata en la demostración propuesta por F. Hass según puso de manifiesto en [Pei62].

aquí los siguientes progresos parciales que han permitido la extensión del teorema de Poincaré-Bendixson:

- H. Whitney y M. Bebutov definieron y probaron la existencia de *secciones transversales* (generalización del concepto de ciclos sin contacto de Poincaré) para flujos definidos sobre espacios métricos [Whi33, Beb39].
- H. Bohr y W. Fenchel demostraron en 1936 que en el plano no existen puntos recurrentes no triviales para flujos continuos [BF52].
- O. Hajek desveló la estructura topológica de las secciones transversales de flujos continuos sobre superficies [Haj65a].

El mismo O. Hajek consiguió finalmente la generalización del teorema de Poincaré-Bendixson para flujos continuos en [Haj68].

Para acabar este apartado conviene decir que todo el trabajo anterior hubiera sido papel mojado para esta generalización si hubiésemos dispuesto del artículo de C. Gutierrez[Gut86]; en él se prueba que todo flujo continuo sobre una superficie compacta es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^1 y si la superficie es la esfera S^2 , el plano proyectivo \mathbb{P}^2 o la botella de Klein \mathbb{B}^2 el flujo se puede obtener de clase C^∞ . Por lo tanto, aplicando simultáneamente el resultado de Gutierrez y el de Schwartz, el teorema de Poincaré-Bendixson tiene validez para flujos continuos en estas tres últimas superficies. Además para el resto de superficies, en el teorema de Schwartz no se puede debilitar la clase de diferenciabilidad del flujo, pues es posible modificar el flujo de Denjoy para obtener ejemplos de flujos de clase C^1 y puntos para los que el ω -límite no es una órbita periódica y tampoco contiene puntos singulares.

Caracterizaciones topológicas y dinámicas de los conjuntos ω -límite

Como hemos comentado antes el teorema de Poincaré-Bendixson da la estructura del conjunto ω -límite sólo cuando este no tiene puntos singulares, además Bendixson dio también algunas caracterizaciones para conjuntos ω -límites que contienen sólo un número finito de puntos singulares que se pueden seguir en [ABZ96, capítulo 2, sección 3].

El trabajo de Bendixson influyó decisivamente en los de J. K. Solntzev y R. E. Vinograd, que dieron descripciones sobre los conjuntos ω -límites sin restricciones sobre el número de puntos singulares. En concreto sus resultados se pueden reformular, usando el teorema de Gutierrez, como sigue:

Teorema (Solntzev [Sol45] y Vinograd [Vin52]). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un flujo continuo, $x \in \mathbb{S}^2$ y S el conjunto de puntos singulares contenidos en $\Omega = \omega_\Phi(x)$.*

- (a) *Si $S = \emptyset$ entonces Ω es una órbita periódica.*
- (b) *Si $S \neq \emptyset$ y definimos la relación de equivalencia $u \sim v$ si y sólo si existe una componente conexa de S que contiene tanto a u como a v , entonces existe una aplicación continua sobreyectiva $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Omega / \sim$ tal que $g|_{g^{-1}(\Omega \setminus S)}$ es un homeomorfismo.*

En concreto Ω contiene un cantidad numerable de órbitas regulares (no singulares), además si u es un punto regular (no singular) de $\omega_\Phi(x)$ entonces $\omega_\Phi(u)$, y también $\alpha_\Phi(u)$, es un punto de S .

Por otro lado Vinograd dio una primera caracterización topológica global de los conjuntos ω -límite sobre la esfera.

Teorema (Vinograd, [Vin52]). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un flujo continuo y sea $u \in \mathbb{S}^2$. Entonces $\omega_\Phi(u)$ es la frontera de una región simplemente conexa O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$.*

Recíprocamente, si Ω es la frontera de una región simplemente conexa, $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$, entonces existe un flujo suave $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y un punto $u \in \mathbb{S}^2$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.

Estos dos teoremas abren vías de investigación, en concreto la generalización del primero nos llevaría a dar respuestas al tercer problema antes planteado, mientras que la extensión del segundo teorema supondría resolver las cuestiones agrupadas en el segundo problema.

El problema tercero, al menos en el caso de la esfera, se resolvió satisfactoriamente en [BJ98]. Presentamos una reformulación del resultado de F. Balibrea Gallego y V. Jiménez López, para ello fijamos un flujo continuo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, un punto $u \in \mathbb{S}^2$, el conjunto de puntos singulares S de $\omega_\Phi(u)$, una región simplemente conexa $O \subset \mathbb{S}^2$ tal que $\text{Bd} O = \omega_\Phi(u)$ (usando el teorema de Vinograd) y la componente conexa U de $\mathbb{S}^2 \setminus S$ que contiene a O . Ahora definimos la relación de equivalencia $u \approx v$ si y

sólo si $u = v$ o una misma componente conexa de $\mathbb{S}^2 \setminus U$ contiene simultáneamente a u y a v . Podemos enunciar ya la caracterización.

Teorema (Balibrea Gallego-Jiménez López). \mathbb{S}^2 / \approx es homeomorfo a \mathbb{S}^2 . Además el conjunto formado por las clases de equivalencia de $\omega_{\Phi}(u)$ es la frontera de la unión de una dendrita⁶ D y una cantidad numerable de discos cerrados $\{D_n\}_n$ tales que:

- (i) $D \cap D_n$ es un arco para cada n ;
- (ii) $D_n \cap D_m$ es a lo sumo un punto para cada $n \neq m$;
- (iii) los diámetros de los discos D_n tienden a 0 si el conjunto $\{D_n\}_n$ es infinito;
- (iv) $\bigcup_n D_n$ es denso en D .

En cuanto al segundo problema cabe decir que hasta el año 2000 no han aparecido nuevas caracterizaciones topológicas del conjunto ω -límite en espacios de fases diferentes de \mathbb{S}^2 . Incluso D. V. Anosov en [Ano95] hizo notar que la caracterización topológica de Vinograd en \mathbb{S}^2 no servía para describir a los conjuntos ω -límite en \mathbb{P}^2 , en el citado artículo se propone estudiar caracterizaciones topológicas para estos conjuntos en \mathbb{P}^2 . El hecho de sugerir el estudio concretamente en \mathbb{P}^2 es consecuencia de que en este espacio de fases no existen órbitas recurrentes no triviales⁷, siendo en principio más fácil encontrar las caracterizaciones.

En este trabajo de investigación hemos buscado respuestas al problema de Anosov, pero no sólo nos hemos limitado a dar caracterizaciones en el plano proyectivo sino que hemos obtenido una caracterización global de los ω -límites en superficies compactas y conexas. Por supuesto que la tarea en estas superficies es mucho más sencilla que en variedades compactas y conexas de dimensión arbitraria, pues en estas últimas no existe un teorema de clasificación mientras que en las primeras sí. Además se han estudiado algunos tipos de conjuntos ω -límites (aquellos cuyo interior es no vacío) en variedades arbitrarias no necesariamente compactas. En la

⁶Una dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene círculos.

⁷Las superficies compactas que no admiten órbitas recurrentes no triviales son \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 . La prueba de esta afirmación se debe a Bendixson [Ben01] para el caso de la esfera, a Kneser [Kne23] para flujos sobre \mathbb{B}^2 sin puntos singulares y a Markley y Aranson [Mar69b, Ara69] para flujos sobre \mathbb{B}^2 con puntos singulares. El resultado en \mathbb{P}^2 es una simple consecuencia del de la esfera por ser ésta el recubridor orientable doble del plano proyectivo.

siguiente sección de esta introducción resumimos los resultados que demostramos en esta memoria.

Antes de acabar este apartado nos gustaría dejar claro, que aunque no se haya avanzado mucho en cuanto a la caracterización de conjuntos ω -límites en superficies en general hasta hace poco, el problema del estudio de algunas propiedades de estos conjuntos no ha estado olvidado. En concreto el estudio de órbitas recurrentes sobre superficies captó la atención de, entre otros, T. M. Cherry, S. Kh. Aranson, A. G. Maier y N. G. Markley. Recopilamos a continuación los resultados más relevantes, en todos ellos S será una superficie compacta y conexa y $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo definido sobre ella. Empezamos por un teorema de Cherry que demuestra la existencia de órbitas recurrentes en ambos sentidos del tiempo en el ω -límite de puntos recurrentes no triviales:

Teorema (Cherry, [Che37]). *Si $u \in S$ es un punto recurrente no trivial para el flujo Φ entonces $\Omega = \omega_\Phi(u)$ contiene a un subconjunto compacto y conexo R tal que si $v \in R$ entonces:*

$$\Omega = \omega_\Phi(v) = \alpha_\Phi(v).$$

El siguiente enunciado nos da un criterio de existencia de órbitas recurrentes para el flujo Φ .

Teorema (Maier, [Mai39]). *Sea $u \in S$ un punto que no pertenece a una órbita periódica y tal que:*

(i.) $\omega_\Phi(u)$ contiene puntos regulares;

(ii.) $u \in \omega_\Phi(v)$ para algún $v \in S$;

entonces u es un punto recurrente.

Es importante observar que el recíproco del teorema anterior es también cierto según se deduce del teorema previo de Cherry. Acabamos este apartado con un teorema que limita el número máximo de ω -límites diferentes, de puntos recurrentes no triviales, que puede tener el flujo Φ .

Teorema (Aranson-Maier-Markley). (i.) *Si u y v son puntos recurrentes para Φ tales que $v \in \omega_\Phi(u)$, entonces $\omega_\Phi(u) = \omega_\Phi(v)$, [Mai43].*

- (ii.) Si S es una superficie orientable de género g entonces el número máximo de conjuntos ω -límites diferentes de órbitas recurrentes no triviales para Φ es g . Además esta cota superior se alcanza para algún flujo definido sobre S , [Mai43].
- (ii.) Si S es una superficie no orientable de género g entonces el número máximo de conjuntos ω -límites diferentes de órbitas recurrentes no triviales para Φ es $\lceil \frac{g-1}{2} \rceil$. Además esta cota superior se alcanza para algún flujo definido sobre S , [Ara69, Mar69a].

Nuestra contribución a la teoría de Poincaré-Bendixson

Esta sección resume nuestra aportación al estudio de los conjuntos ω -límite, la exposición que aquí hacemos sigue la presentación hecha en [JS04b].

Notación

Para una exposición precisa de los resultados que hemos obtenido fijaremos la notación y definiciones necesarias para enunciarlos:

- M denotará una *variedad conexa de dimensión n* , topológica o de clase C^∞ (suave) y que puede tener frontera combinatoria denotada por ∂M .
- Cuando $n = 2$ entonces M recibe el nombre de *superficie* y se suele denotar por S .
- dist denotará una *distancia* fija sobre M y dist_H será la *distancia de Hausdorff* correspondiente.
- Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo a $[0, 1]$.
- Un *anillo* es un espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Cuando la frontera de un anillo tiene dos componentes conexas diremos que estamos ante un *anillo regular*.
- Cuando digamos que $[x; y]$ es un arco, querremos decir que es un arco que tiene a x y a y como puntos finales.

- Una *curva* es o bien un círculo o bien la imagen de una aplicación continua e inyectiva cuyo dominio es \mathbb{R} .
- $\text{Int } A$, $\text{Cl } A$, $\text{Bd } A$ y $\text{diam } A$ denotan respectivamente el *interior*, la *clausura*, la *frontera topológica* y el *diámetro* del conjunto A .

La estructura topológica del conjunto ω -límite depende mucho de la naturaleza dinámica del punto que estemos considerando: no recurrente, recurrente trivial, recurrente no trivial con conjunto ω -límite con interior vacío o recurrente no trivial con conjunto ω -límite con interior no vacío. A la hora de estudiar la estructura asintótica de las órbitas hemos tenido que hacer distinciones en cuanto a su naturaleza dinámica. En este resumen también las haremos.

Órbitas no recurrentes

Este ha sido el caso más sencillo de estudiar, para él hemos obtenido cinco caracterizaciones distintas: una general para cualquier tipo de superficie compacta y conexa, dos para los casos de flujos definidos en \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 (puesto que en estos casos no existen órbitas recurrentes no triviales y el ω -límite de las recurrentes triviales tiene el mismo comportamiento que el de órbitas no recurrentes), una para variedades compactas y conexas de dimensión arbitraria y finalmente una para el caso concreto de la esfera de dimensión n , \mathbb{S}^n . El capítulo 2 de esta memoria está dedicado a los tres primeros casos, mientras que el capítulo 5 se ocupa, entre otras cosas, de los dos últimos.

Empezamos enunciando el teorema general que caracteriza los ω -límites de puntos no recurrentes sobre cualquier superficie compacta y conexa.

Teorema ([JS04a] o capítulo 2). *Sea S una superficie compacta y conexa, $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo y $u \in S$. Supongamos que u es un punto no recurrente o que $\text{Int } \omega_\Phi(u) = \emptyset$ y $S \setminus \omega_\Phi(u)$ tiene un número finito de componentes. Entonces $\omega_\Phi(u)$ es una componente de la frontera de un anillo regular de S .*

Recíprocamente, si Ω es una componente de la frontera de un anillo regular de S entonces existe un flujo suave, $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$, y un punto $u \in S$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.

Para superficies compactas y conexas que no admiten flujos con recurrencias no triviales, es decir \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 , el teorema enunciado da una caracterización global de los conjuntos ω -límites. No obstante, en el caso de la esfera hemos visto que éstos

fueron descritos en una forma más sencilla por Vinograd (como fronteras de regiones simplemente conexas). Para el caso de \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 , probamos con anterioridad al teorema precedente otras caracterizaciones dadas en [JS01] y [Sol03a]. Introducimos ahora esos resultados

Teorema ([Vin52, JS01, Sol03a] o capítulo 2). *Sean $S = \mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2$ o \mathbb{B}^2 y $\Omega \subset S$. Entonces Ω es el conjunto ω -límite para algún flujo continuo (o, equivalentemente, para algún flujo suave) si y sólo si es la frontera de una región $\emptyset \subsetneq O \subsetneq S$ tal que:*

- (a) *O es simplemente conexo (en el caso $S = \mathbb{S}^2$);*
- (b) *$S \setminus O$ es conexo (en el caso $S = \mathbb{P}^2$);*
- (c) *$S \setminus O$ es conexo y o O es simplemente conexo o existe un círculo no homotópicamente nulo $C \subset O$ tal que Ω está contenido en la frontera de una de las componentes de $O \setminus C$ (en el caso $S = \mathbb{B}^2$).*

Puesto que en \mathbb{S}^2 las regiones simplemente conexas son aquellas que tienen complementario conexo, entonces el apartado (a) se puede reescribir como el (b). Sin embargo esto no es cierto en \mathbb{P}^2 ya que el plano proyectivo menos un punto es una región conexa con complementario conexo y que sin embargo no es simplemente conexa.

La caracterización de los conjuntos ω -límites para variedades de dimensiones arbitrarias es más complicada y sobre todo en el caso de órbitas recurrentes. Sin embargo es importante reseñar que en la esfera de dimensión n , si nos limitamos a conjuntos ω -límites de órbitas no recurrentes su caracterización es análoga a la del plano proyectivo:

Teorema ([JS03, Sol05] o sección 5.3). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ un flujo continuo sobre \mathbb{S}^n y sea $x \in \mathbb{S}^n$ un punto no recurrente del flujo. Entonces $\omega_\Phi(x)$ es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^n$, cuyo complementario es conexo.*

Recíprocamente, si Ω es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^n$, con complementario conexo, entonces existe un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ sobre \mathbb{S}^n y un punto no recurrente $x \in \mathbb{S}^n$ para el flujo Φ tal que $\Omega = \omega_\Phi(x)$.

Hacemos notar que el flujo suave de la parte recíproca del teorema se refiere a cualquier estructura diferencial sobre \mathbb{S}^n aunque la prueba que hicimos en [JS03] se refiere sólo a la estructura diferencial usual. La generalización para cualquier

estructura se obtuvo en [Sol05] como un corolario del teorema principal del artículo que caracterizaba los conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes sobre variedades compactas y conexas. Exponemos esta caracterización.

Definición (conjunto ω -conexo). Dada una variedad compacta y conexa y dado un conjunto conexo y abierto O de una variedad compacta y conexa de dimensión n se dice ω -conexo si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una región $O_\epsilon \subset \{x \in O : d(x, \text{Bd } O) < \epsilon\}$ tal que $\text{Bd } O \subset \text{Bd } O_\epsilon$

Teorema ([JS03, Sol05] o sección 5.3). *Sea M una variedad topológica (respectivamente suave) compacta, conexa, sin frontera combinatoria y de dimensión m , entonces se verifican los siguientes resultados.*

1. *Dado un flujo continuo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ y un punto no recurrente $u \in M$, entonces $\omega_\Phi(u)$ es la frontera de un conjunto ω -conexo O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$.*
2. *Recíprocamente, si Ω es la frontera de un conjunto ω -conexo O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$, entonces existe un un flujo continuo (respectivamente suave) $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ y un punto no recurrente $u \in M$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.*

Órbitas recurrentes generando ω -límites con interior no vacío

Dentro de las órbitas recurrentes existen dos grandes tipos: aquellas que generan ω -límites con interior vacío y las que los generan con interior vacío. En esta sección damos las caracterizaciones obtenidas para las segundas. El estudio de éstas está estrechamente ligado a la noción de *transitividad*.

Una variedad (resp. variedad de clase C^∞) es *transitiva* (resp. *transitiva de clase C^∞*) si admite un flujo continuo (resp. de clase C^∞) con una órbita densa. Se verá que la conexión entre transitividad y el estudio de conjuntos ω -límite es la siguiente: un conjunto $\Omega \subset M$ con interior no vacío es un conjunto ω -límite para un flujo continuo (resp. de clase C^∞) sobre M si y sólo si es la clausura de una subvariedad transitiva (resp. subvariedad transitiva de clase C^∞) de M .

Es importante señalar que el estudio de superficies y variedades transitivas ha tenido una larga tradición. En superficies compactas y conexas se sabe que \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 no son transitivas por no admitir flujos con puntos recurrentes no triviales, mientras que el resto de superficies compactas y conexas sí son transitivas de clase C^∞ , ver por ejemplo [ST88b]. Además en este artículo se propone el problema de estudiar

qué superficies, no necesariamente compactas, son transitivas. Aquí damos respuesta al problema planteado por Smith y Thomas, pero para superficies orientables fue resuelto anteriormente y de forma independiente en los trabajos [Ben98, Sol01b].

En cuanto a variedades de dimensión $n \geq 3$ existen trabajos ya en 1941, de Oxtoby y Ulam, donde se prueba que cualquier poliedro compacto y conexo es transitivo para flujos continuos, [OU41]. En [Sid68] se demuestra que cualquier región de \mathbb{R}^n es transitiva para un flujo de clase C^∞ para la estructura diferencial estándar de \mathbb{R}^n . Más tarde Anosov [Ano74] demuestra que cualquier variedad compacta y conexa de dimensión n es transitiva de clase C^∞ , en realidad admite flujos ergódicos suaves. Finalmente podemos decir que en [ST88a] se simplificó la demostración de Anosov, pero dejaron pendiente dar una clasificación de qué variedades son transitivas.

En los capítulos 4 y 5 del presente trabajo se caracterizan respectivamente las superficies y variedades transitivas. En particular se responden con estas caracterizaciones a las cuestiones aludidas en los dos párrafos precedentes. Cuando $n \geq 3$ la clasificación de variedades transitivas es muy sencilla:

Teorema ([JS04d] o capítulo 4 y sección 5.4). *Sea M una variedad conexa de dimensión n (respectivamente una variedad conexa de dimensión n y suave), $n \geq 3$. Entonces M es transitiva (respectivamente transitiva de clase C^∞).*

En contraste con las variedades, la situación en superficies no es tan fácil de describir. Necesitamos para ello dar una nueva noción.

Definición. Sean $C, D \subset S$ círculos orientables. Diremos que C y D se *cruzan* si se verifican:

1. C y D intersecan exactamente en un punto p .
2. Si A y B son arcos suficientemente pequeños en C y D que contienen a p , pero no lo tienen como un punto de sus extremos, entonces las dos componentes de $B \setminus \{p\}$ (resp. $A \setminus \{p\}$) están incluidas en lados opuestos de C (resp. D).

Teorema ([JS04d] o capítulo 4). *Sea S una superficie (resp. una superficie orientable). Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (i) S es transitiva de clase C^∞ ;
- (ii) S es transitiva;

(iii) S no es homeomorfa a \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 , ni a ninguna subsuperficie de \mathbb{B}^2 (resp. no es homeomorfa a ninguna subsuperficie de \mathbb{S}^2);

(iv) S tiene dos círculos que se cruzan.

Para acabar este apartado resaltamos que los resultados técnicos conducentes a probar el teorema de clasificación de variedades transitivas nos han permitido dar respuesta al problema planteado por P. Nykos en la “Spring Topology Conference” de 1998. En concreto, éste planteó la siguiente cuestión ¿Contiene toda variedad conexa de dimensión n un subconjunto denso homeomorfo a \mathbb{R}^n ?

En 2003 A. Shibakov respondió afirmativamente a esta pregunta en el artículo [Shi03]. Usando la proposición 5.2.A es fácil responder también afirmativamente a la cuestión de Nykos, nuestra forma de abordar este problema es alternativa y anterior a la de Shibakov, [JS04d].

Órbitas recurrentes generando ω -límites con interior vacío

Completamos la descripción de los conjuntos ω -límite en superficies compactas sin frontera combinatoria. Para ello es necesario dar una caracterización de los conjuntos de este tipo con interior vacío y generados por órbitas recurrentes, pero que no pueden ser generados por órbitas no recurrentes. El enunciado del resultado obtenido requiere de varias definiciones previas, la demostración se hará en el capítulo 3.

Definición (familia de curvas regular en el sentido de Whitney). Sea \mathcal{B} una familia de curvas en S , $p \in B \in \mathcal{B}$ y O un entorno de p . Diremos que O es un *entorno regular de Whitney* del punto p si para cada $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que:

- (a) si $[p'; q'] \subset O \cap B'$ para algún $B' \in \mathcal{B}$ y $\text{dist}(p', q') < \delta$, entonces $\text{diam}([p'; q']) < \epsilon$;
- (b) si $[p; q] \subset O \cap B$, $p' \in O \cap B'$ para algún $B' \in \mathcal{B}$ y $\text{dist}(p, p') < \delta$, entonces hay algún $[p'; q'] \subset O \cap B'$ tal que $d_H([p; q], [p'; q']) < \epsilon$.

Diremos que \mathcal{B} es *regular en el sentido de Whitney* si todos los puntos de todas las curvas $B \in \mathcal{B}$ tienen un entorno regular de Whitney.

Definición (superficies de giro). Sea $R \subset S$ una superficie y $C \subset S$ un círculo orientable no homotópicamente nulo. Diremos que R *gira alrededor de C* si existe un embebimiento $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$ tal que:

- (i) $\phi((0, 1) \times (0, 1)) \subset R \setminus (\partial R \cup C)$;
- (ii) $\phi([0, 1] \times \{0, 1\}) \subset \partial R$;
- (iii) $\phi(\{0, 1\} \times [0, 1]) \subset C$;
- (iv) si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño entonces $\phi((0, \epsilon] \times [0, 1])$ y $\phi([1 - \epsilon, 1] \times [0, 1])$ están en lados opuestos de C .

El conjunto $\phi([0, 1] \times [0, 1])$ recibe el nombre de *sección de giro* de R y el conjunto $\phi([0, 1] \times \{0, 1\})$ es su *frontera de giro*. También denotaremos al conjunto unión de todas las secciones de giro de R por $\Upsilon(R)$ y a la unión de todas las fronteras de giro por $\Upsilon(\partial R)$.

Las definiciones previas dependen del círculo C , así que siempre deberá estar claro a qué círculo nos estamos refiriendo para que no haya confusión.

Definición (familia realizable). Sea $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de superficies simplemente conexas sobre S disjuntas dos a dos. Sea $C \subset S$ un círculo orientable no homotópicamente nulo. Diremos que $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *familia realizable respecto a C* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) todas las superficies R_n giran alrededor del círculo C y para cada índice m , el conjunto $R_m \cup \text{Cl}(\bigcup_n \Upsilon(R_n))$ es un entorno de ∂R_m ;
- (ii) la familia de las componentes de todas las fronteras combinatorias ∂R_n es regular en el sentido de Whitney;
- (iii) para cada $u, v \in \bigcup_n \text{Bd } R_n$ y $\epsilon > 0$ existe un arco A en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial R_n$ que satisface $\text{dist}(u, A) < \epsilon$, $\text{dist}(v, A) < \epsilon$.

Enunciamos ya el teorema que caracteriza los conjuntos ω -límites con interior vacío de puntos recurrentes no triviales.

Teorema ([JS04c] o capítulo 3). *Sea S una superficie compacta y conexa y $\Omega \subset S$ tal que $\text{Int } \Omega = \emptyset$.*

- (i) *Supongamos que Ω es el conjunto ω -límite de un punto recurrente de algún flujo definido sobre S pero no es el ω -límite de ningún punto no recurrente de ningún flujo definido sobre S . Entonces existe una familia realizable $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ para alguna curva C tal que $\Omega = \text{Bd } \bigcup_n R_n$.*

- (ii) *Asumamos que existe una familia realizable $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ para alguna curva C con $\Omega = \text{Bd} \bigcup_n R_n$. Entonces existe un flujo definido sobre S (topológicamente equivalente a un flujo suave definido sobre S) que tiene a Ω como el conjunto ω -límite de uno de sus puntos recurrentes. Sin embargo, no existe ningún flujo definido sobre S que tiene a Ω como el conjunto ω -límite de alguno de sus puntos no recurrentes.*

Para acabar esta introducción podemos dar un corolario que caracteriza completamente los conjuntos ω -límites sobre superficies compactas sin frontera combinatoria. Este resultado recoge todos los enunciados anteriormente sobre superficies compactas sin frontera combinatoria.

Corolario ([JS04b]). *Sea S una superficie compacta sin frontera combinatoria y sea $\Omega \subset S$. Entonces Ω es un ω -límite para algún flujo continuo sobre S si y sólo si ocurre una de las siguientes alternativas:*

- (i) Ω es una de las componentes de la frontera de un anillo regular;
- (ii) Ω es la clausura de una región que contiene a dos círculos que se cruzan
- (iii) Ω es la frontera de la unión de los conjuntos de una familia realizable.

Capítulo 1

Definiciones básicas y resultados técnicos

1.1. Variedades topológicas y diferenciables. Espacio tangente

Esta sección está dedicada a presentar y estudiar los espacios sobre los que vamos a trabajar, así como las aplicaciones que se pueden definir entre dichos espacios, para más detalles sobre estos conceptos se puede seguir el primer capítulo de [Hir88].

1.1.1. Variedades

Definición 1.1.1 (variedad topológica de dimensión n). Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico M , segundo axioma de numerabilidad¹, Hausdorff y que además es localmente homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n (*localmente euclídeo*). Es decir, para cada punto $x \in M$ existe un conjunto abierto conteniendo a x , $U_x \subset M$, un conjunto abierto $V_x \subset \mathbb{R}^n$, y un homeomorfismo $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$.

¹Un espacio X es *segundo axioma de numerabilidad* cuando posee una base numerable, esto es, un conjunto numerable de abiertos $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que cualquier abierto de X se puede expresar como una unión de conjuntos de $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

La *dimensión* de la variedad M se denota normalmente por $\dim M$ y es igual a n .

Algunos autores no piden en la definición de variedad que ésta sea segundo axioma de numerabilidad o Hausdorff. Queremos dejar claro que estas definiciones alternativas no son equivalentes a nuestra definición. Existen varios ejemplos que constatan esto. En [Con93, página 1] se pueden encontrar espacios localmente euclídeos y segundo axioma de numerabilidad que no son Hausdorff. También existen ejemplos de espacios localmente euclídeos y Hausdorff que no son segundo axioma de numerabilidad como se puede ver en [Spi79, apéndice A]. No obstante, cuando un espacio es compacto, ambas definiciones son equivalentes². Por otro lado, al exigirle a una variedad que sea localmente euclídea y Hausdorff se tiene que debe ser regular³, ver [Con93, sección 1.1, ejercicio 5] y usando el teorema de Urysohn y que la variedad tenga una base numerable obtenemos que es metrizable, ver [Kur66, capítulo 2, sección 22.II]. Denotaremos por

$$\begin{aligned} \text{dist} : M \times M &\longrightarrow [0, +\infty[\\ (x, y) &\longrightarrow \text{dist}(x, y) \end{aligned}$$

a una distancia definida sobre la variedad y compatible con la topología de ésta.

Definición 1.1.2 (atlas, carta). Dada una variedad de dimensión n , M , se sigue de la anterior definición la existencia de un cubrimiento abierto de M , $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, de manera que para cada $i \in I$ existe un homeomorfismo ϕ_i entre U_i y un conjunto abierto V_i de \mathbb{R}^n .

Para cada $i \in I$, el par (ϕ_i, U_i) se llama *carta* o *sistema de coordenadas*. El conjunto de todas las cartas $\Phi = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ recibe el nombre de *atlas*.

Entre variedades topológicas sólo se pueden definir funciones continuas. Si queremos introducir la noción de aplicación diferenciable debemos introducir previamente una estructura diferenciable en las variedades. Esto se consigue pidiéndole propiedades adicionales a los atlas anteriormente introducidos.

Definición 1.1.3 (atlas de clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$). Un atlas $\Phi = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ sobre una variedad M se dice que es de *clase C^r* si para cada par de cartas (U_i, ϕ_i) ,

²**Nota por eliminar:** dar una referencia precisa sobre esta afirmación, si es que es cierta

³ Un *espacio regular* es aquél en el que para cada punto p y cada cerrado C existen abiertos, $U_p \ni p$ y $V_C \supset C$, tales que $U_p \cap V_C = \emptyset$. Recordamos también que un espacio regular y T_1 (cada punto es un conjunto cerrado) es por definición un espacio T_3 .

(U_j, ϕ_j) tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ se tiene que

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \tag{1.1.1}$$

es una aplicación de clase C^r .

Cualquier atlas de clase C^r , Φ , se puede extender a un atlas maximal, Ψ , de una única forma. Este atlas se puede construir añadiendo a las cartas de Φ todas las cartas posibles que verifican la condición (1.1.1).

Definición 1.1.4 (variedad diferenciable de clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$). Una variedad M se dice que es una *variedad diferenciable de clase C^r* si admite un atlas de clase C^r . En este caso cada atlas maximal define una *estructura diferenciable* sobre M .

Escribiremos (M, Φ) para referirnos a la variedad diferenciable M provista de la estructura diferenciable definida por Φ . Cuando $r = 0$ M es simplemente una *variedad topológica* como en la definición 1.1.1 y no usaremos el término ‘diferenciable’.

Definición 1.1.5 (variedad suave). Llamaremos *variedad suave* a cualquier variedad diferenciable de clase C^∞ .

Ejemplo 1.1.1. Cualquier conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad suave con el atlas $\Phi = \{(U, \text{Id} : U \rightarrow U) : U \text{ es un conjunto abierto de } \mathbb{R}^n\}$, donde $\text{Id}(u) = u$ para cada $u \in U$. Por tanto \mathbb{R}^n es una variedad suave.

Ejemplo 1.1.2 (esfera de dimensión n). Para todo $n \in \mathbb{N}$, la esfera de dimensión n , \mathbb{S}^n , admite un atlas de clase C^∞ .

Empezamos dando la definición topológica de \mathbb{S}^n . Usamos en \mathbb{R}^{n+1} la norma $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. Entonces $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y definimos para cada $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ los siguientes conjuntos abiertos (*hemisferios*):

$$U_{2j-1} = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j > 0\}$$

$$U_{2j} = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j < 0\}.$$

Seguidamente introducimos las cartas sobre \mathbb{S}^n . \mathbb{O}^n denotará el disco unidad en \mathbb{R}^n , es decir, $\mathbb{O}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ denota el vector de \mathbb{R}^n que se obtiene quitando la componente i -ésima de (x_1, \dots, x_{n+1}) . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ definimos:

$$\begin{aligned} \phi_j : U_j &\longrightarrow \mathbb{O}_n \\ x &\longrightarrow (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{aligned} \quad , \text{ si } j = 2i \text{ o } j = 2i - 1 \text{ y } 1 \leq i \leq n + 1.$$

Es fácil mostrar que $\Phi = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{2n+2}$ es un atlas de clase C^∞ que induce una estructura diferenciable suave sobre \mathbb{S}^n , la estructura diferencial estándar.

Para acabar introducimos las condiciones para que un subconjunto N de una variedad de dimensión m y clase C^r , (M, Φ) , reciba el nombre de *subvariedad de dimensión n* , $n < m$. Estas subvariedades también serán variedades.

Definición 1.1.6 (subvariedad). Sea (M, Φ) una variedad de dimensión m y clase C^r . Diremos que un subconjunto N es una *subvariedad de dimensión n y clase C^r de (M, Φ)* (o simplemente una *subvariedad de M* cuando no haya ambigüedad posible) si para cada punto $x \in N$ existe una carta $(\phi_x, U_x) \in \Phi$ tal que:

1. $U_x \cap N = \phi_x^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}_{m-n}\})$ ($\mathbf{0}_{m-n}$ denota el vector nulo de \mathbb{R}^{m-n}).
2. $\{(\phi_x|_{U_x \cap N} : U_x \cap N \rightarrow \mathbb{R}^n, U_x)\}_{x \in N}$ es un atlas de clase C^r de N .

Ahora se puede ver que \mathbb{S}^n con la estructura diferencial estándar dada en el ejemplo 1.1.2 es una subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} considerando en este espacio la estructura diferencial usual (introducida en el ejemplo 1.1.1).

1.1.2. Variedades con frontera combinatoria

La definición de variedad dada excluye muchos espacios que tienen interés en geometría y para nuestro trabajo. Es por eso por lo que se puede extender la definición para tener una cantidad mayor de objetos de estudio. Hagamos la extensión de la definición de variedad.

Definición 1.1.7 (semiespacio). Llamaremos *semiespacio* de \mathbb{R}^n al subconjunto de \mathbb{R}^n definido por :

$$H = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$$

Ahora definimos la noción de *carta generalizada de clase C^r* que servirá para extender sistemáticamente las definiciones de atlas de clase C^r a *atlas generalizado de clase C^r* , de estructura diferencial de clase C^r a *estructura diferencial de clase*

C^r generalizada y de variedad de clase C^r a *variedad con frontera (combinatoria) de clase C^r* tal y como las introdujimos anteriormente con la noción de carta. Es necesario precisar que en todas estas extensiones se habla de funciones de clase C^r definidas en conjuntos de \mathbb{R}^n que no son abiertos, mientras que la noción habitual de diferenciabilidad está ligada a funciones definidas sobre abiertos. Por ello es conveniente decir que las funciones definidas sobre conjuntos no abiertos de \mathbb{R}^n serán de *clase C^r* cuando sean la restricción de una función de clase C^r definida sobre un abierto, ver [Con93, definición 3.5.7].

Definición 1.1.8 (extensión del concepto de carta). Una *carta generalizada* sobre el espacio M es una aplicación $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal manera que envía $U \subset M$ homeomórficamente sobre:

1. o un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n ,
2. o H .

Definición 1.1.9 (atlas generalizado). Un conjunto de cartas generalizadas $\Phi = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ recibe el nombre de *atlas generalizado* si existe algún $i \in I$ que envía homeomórficamente U_i sobre H .

Cuando digamos que M es una variedad siempre estaremos suponiendo que es una variedad que sólo tiene cartas como las de la definición 1.1.2. Para enfatizarlo podremos decir que estamos ante una *variedad sin frontera combinatoria* o *variedad sin ∂ -frontera*.

A partir de ahora si C es un subconjunto de M , $\text{Bd}C$ denotará a la frontera topológica del conjunto C .

Definición 1.1.10 (frontera de una variedad). Sea (M, Φ) una variedad diferenciable de clase C^r y supongamos que $(\phi, U) \in \Phi$ y $\phi(U) = H$. Entonces, si $x \in \phi^{-1}(\text{Bd}H)$ diremos que x es un punto de la *frontera combinatoria* de M . La frontera combinatoria de la variedad M se denota por ∂M .

Observación 1.1.1. Obsérvese que la definición de punto de la frontera de una variedad M no depende de la carta gracias al teorema de invarianza de dominio que asegura que cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n es abierto si es homeomorfo a un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , véase [HW48].

Para distinguir las fronteras topológicas y combinatoria (cuando $M \subset \mathbb{R}^m$), usaremos para la primera la notación $\text{Bd}M$ y para la segunda ∂M . Es fácil demostrar

que ∂M es una variedad de dimensión $(n - 1)$, ver por ejemplo [Hir88, capítulo 1, sección 4].

Observación 1.1.2. Por supuesto la frontera combinatoria de una variedad no siempre coincide con la frontera topológica. Por ejemplo, si tomamos la variedad $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ entonces $\partial M = \emptyset \neq \mathbb{S}^1 = \text{Bd } M$.

1.1.3. Espacio tangente

Vamos a introducir la noción de espacio tangente, la cual nos permitirá definir aplicaciones diferenciables entre variedades. Para ello también necesitaremos la noción clásica de diferencial de una aplicación $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un punto $a \in \mathbb{R}^m$, se puede recordar esta noción y sus propiedades por ejemplo en [Fer92, capítulo 4].

A partir de ahora denotaremos a la *aplicación diferencial de f en el punto a* por $df_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para introducir el concepto de espacio tangente fijamos una variedad diferenciable de clase C^{r+1} ($0 \leq r \leq \infty$) y dimensión n , M . La aritmética para r es la definida por la aritmética de los números naturales añadiendo la fórmula $\infty + 1 = \infty$. Fijamos un atlas de clase C^{r+1} , $\Phi = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$, y definimos sobre $M \times I \times \mathbb{R}^n$ la relación:

$$(x, i, a) \sim (y, j, b) \quad \text{si y sólo si}$$

$$x = y \quad \text{y} \quad d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})_{\phi_i(x)}(a) = b.$$

Usando las reglas básicas de la diferencial se puede demostrar que la relación introducida es de hecho una relación de equivalencia.

Definición 1.1.11 (vector tangente, espacio tangente). Cada uno de los elementos de $M \times I \times \mathbb{R}^n / \sim$ recibe el nombre de *vector tangente de la variedad M* .

El conjunto $M \times I \times \mathbb{R}^n / \sim$ es el *espacio tangente de M* y se denota normalmente por TM .

Notación 1.1.12. Dada la aplicación:

$$p : \quad TM \quad \longrightarrow \quad M$$

$$[x, i, a] \quad \longrightarrow \quad x,$$

para cada subconjunto $A \subset M$ denotamos por $T_A M$ al conjunto $p^{-1}(A)$ y para cada punto $x \in M$ definimos $TM_x := p^{-1}(x)$.

Observación 1.1.3. Para cada conjunto abierto $U \subset M$, si restringimos las cartas de Φ a los conjuntos abiertos $U_i \cap U$ tenemos un atlas Φ_U que induce una estructura diferencial sobre U . En este caso haremos la identificación $TU = T_U M$.

Merece la pena destacar que si M es una variedad diferencial de clase C^{r+1} entonces el espacio TM tiene estructura de variedad diferenciable de clase C^r . Los detalles de este hecho se pueden seguir en [Hir88, capítulo 1, sección 2, página 17]. Conviene por lo menos notar que un atlas de clase C^r de dicha variedad se obtiene fijando primero un atlas de M : $\Phi = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ (U_i y V_i son abiertos de M y \mathbb{R}^n respectivamente). Con esta notación definimos el conjunto de aplicaciones $T\Phi = \{T\phi_i : TU_i \rightarrow \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$, donde:

$$\begin{aligned} T\phi_i : \quad TU_i &\longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ [x, i, a] &\longrightarrow (\phi_i(x), a). \end{aligned}$$

Se puede ver ahora que el conjunto $T\Phi$ es un atlas de la variedad de dimensión $2n$ TM .

Aunque la definición de espacio tangente es un poco abstracta, veremos que para nuestro propósito será posible ver los espacios tangentes y las variedades como subespacios de \mathbb{R}^k para un k suficientemente grande, incluso los espacios tangentes serán subespacios afines de \mathbb{R}^k . Antes de ver esto necesitamos la noción de aplicación diferencial. No obstante vemos ya que el espacio tangente a una subvariedad N de \mathbb{R}^m se puede considerar como un subconjunto de \mathbb{R}^{m+1} .

Ejemplo 1.1.3 (espacio tangente a subvariedades de \mathbb{R}^m). Sea N una subvariedad de clase C^r y de dimensión n de \mathbb{R}^m y sea $x \in N$.

Debido a la definición de subvariedad existirá un abierto U_x que contiene a x y un difeomorfismo $\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $U_x \cap N = \phi_x^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}_{m-n}\})$. Definamos ahora el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_x : \quad U_x \cap N &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\longrightarrow (y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

donde (y_1, \dots, y_n) viene definido por la igualdad $(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots, 0) = \phi_x(y)$.

Recordemos que $TM = \bigcup_{x \in M} TM_x$, donde los elementos de TM_x podemos tomarlos representados por las clases $[x, \psi_x, a]$ con $a \in \mathbb{R}^n$, y definamos el espacio de dimensión n $E_x = \{x\} \times \text{Im } d\psi_x^{-1}$. Nuestro objetivo es ver que podemos identificar TM_x y E_x , con lo cual el espacio tangente a N en cada punto se puede considerar como un subconjunto de dimensión n de \mathbb{R}^{2m} (el espacio tangente de \mathbb{R}^m).

La identificación de TM_x y E_x es fácil de hacer cuando cogemos un elemento del primer conjunto representado por una clase $[x, \psi_x, a]$, basta con ponerlo en correspondencia con $(x, d\psi_x^{-1}(a))$. Por último conviene notar que la definición del espacio afín E_x no depende de la carta ϕ_x elegida, que el conjunto $E = \bigcup_{x \in M} E_x$ es una subvariedad de dimensión $2n$ de \mathbb{R}^{2m} y que la aplicación antes definida para cada $x \in M$ se extiende de manera natural a una aplicación entre TM y E , aplicación que resultará ser un difeomorfismo de clase C^r entre variedades.

1.1.4. Aplicación diferencial. Inmersiones, submersiones y embimbimientos

En esta sección vamos a introducir el concepto de diferenciabilidad para aplicaciones definidas entre variedades diferenciables. Fijemos para este fin dos variedades diferenciables de clase C^r , (M, Φ) y (N, Ψ) , y una aplicación entre ellos $f : M \rightarrow N$.

Definición 1.1.13 (cartas adaptadas, representación local de f). Un par de cartas $(U_i, \phi_i) \in \Phi$ y $(W_j, \psi_j) \in \Psi$ se dice que están *adaptadas* a f si y sólo si $f(U_i) \subset W_j$. En este caso la aplicación $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \rightarrow \psi_j(W_j)$ está bien definida y recibe el nombre de *representación local de f* en las cartas dadas $(U_i, \phi_i) \in \Phi$ y $(W_j, \psi_j) \in \Psi$.

Definición 1.1.14 (aplicación diferenciable y aplicación de clase C^r). Dado r , $1 \leq r \leq \infty$, la aplicación $f : M \rightarrow N$ es *diferenciable* (respectivamente es una *aplicación de clase C^r*) si todas sus representaciones locales son aplicaciones diferenciables (respectivamente aplicaciones de clase C^r). Cuando una aplicación es de clase C^∞ también se suele decir que es una *aplicación suave*.

Definición 1.1.15 (aplicación diferenciable). Dada la aplicación de clase C^r $f : M \rightarrow N$ ($1 \leq r \leq \infty$) y las cartas adaptadas a f , (U_i, ϕ_i) y (W_j, ψ_j) , definimos la *aplicación diferencial de f en el punto x* como la aplicación:

$$\begin{aligned} df_x : \quad TM_x &\longrightarrow TN_{f(x)} \\ df_x([x, i, a]) &\longrightarrow [f(x), j, d(\psi_j f \phi_i^{-1})_{\phi_i(x)}(a)]. \end{aligned}$$

Es importante dejar claro que la aplicación diferencial no depende de las cartas adaptadas elegidas. Además, los conjuntos TM_x y $TN_{f(x)}$ son espacios vectoriales de dimensiones $\dim M$ y $\dim N$ respectivamente y la aplicación df_x es lineal. Para más detalles nos remitimos a [Hir88, capítulo 1, sección 2] y [Con93, capítulo 2].

Para acabar esta sección introducimos la noción de derivada de una curva en un punto. Dados dos números reales $a < b$ (se permite que sean también $-\infty$ y $+\infty$), $M = (a, b)$, una variedad N y una aplicación $f : M \rightarrow N$ vamos a definir la *derivada de la curva f* en el punto $x \in (a, b)$.

Definición 1.1.16 (derivada de f en x). Dada una carta $\psi_j : U_j \rightarrow V_j$ tal que $f(x) \in U_j$, la *derivada de la curva f en el punto $x \in (a, b)$* es el vector de $N_{f(x)}$ definido por

$$\frac{df}{dt}(x) = f'(x) = [f(x), j, \frac{d\psi_j f}{dx}(x)]$$

o equivalentemente

$$f'(x) = df_x([x, \text{Id}, 1]).$$

Seguidamente introducimos algunas definiciones sobre los diferentes tipos de aplicaciones diferenciales que existen, así como resultados básicos de ellas.

Definición 1.1.17 (difeomorfismo). La aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice que es un *difeomorfismo de clase C^r* si es un homeomorfismo y tanto f como f^{-1} , son aplicaciones de clase C^r .

Una cuestión que parece interesante es saber si una variedad diferenciable de clase C^r ($0 \leq r < \infty$) admite una estructura diferenciable de clase C^s con $s > r$. En concreto, cuando $r = 0$ esto se reduce a la cuestión de si una variedad topológica admite o no estructuras diferenciables. En este caso se puede responder inmediatamente que existen variedades topológicas que no son diferenciables, incluso existen ejemplos de variedades compactas como se puede constatar en [Ker60, Sma61]. Sin embargo, si la variedad admite una estructura diferenciable de clase C^r con $r \geq 1$, entonces admite estructuras de clase C^s para todo $s > r$, en particular soporta estructuras diferenciables de clase C^∞ . Además la estructura diferenciable de clase C^s se puede elegir de manera que ambas estructuras son difeomorfas de clase C^r , ver por ejemplo [Hir88, teorema 2.9].

Definición 1.1.18 (inmersión, submersión, embebimiento). Una aplicación diferencial $f : M \rightarrow N$ se dice que es una *inmersión* si para todo punto $x \in M$ la aplicación lineal $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ es inyectiva. Diremos que f es una *submersión* si para cada x , la aplicación $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ es suprayectiva. Por último f se dice que es un embebimiento si y sólo si f es una inmersión tal que $f : M \rightarrow f(M)$ es un homeomorfismo.

Ahora podemos enunciar el Teorema del embebimiento de Whitney.

Teorema 1.1.19 (del embebimiento de Whitney). *Cualquier variedad de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$) y dimensión n , M , se puede embeber en \mathbb{R}^{2n+1} . El embebimiento $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ se puede elegir de clase C^r y tal que $f(M)$ es una subvariedad cerrada de \mathbb{R}^{2n+1} .*

Demostración. Ver [Hir88, página 55, teorema 2.14]. □

El teorema anterior admite generalizaciones importantes en dos sentidos, por un lado se puede rebajar la clase de diferenciabilidad de la variedad y por otro se puede conseguir que el embebimiento vaya a una dimensión menor.

En efecto, el enunciado que hemos dado del teorema de Whitney es el que viene en el libro de M. W. Hirsch [Hir88], donde se definen las variedades sin exigir la condición de segundo axioma de numerabilidad y Hausdorff. Nosotros sí que hemos exigido dicha condición que nos ha permitido ver que las variedades son metrizable (página 22) y por lo tanto también *paracompactas*⁴, ver [Kur66, teorema de A. H. Stone, capítulo 3, sección 29.XVI]. Siguiendo otra vez [Hir88, página 27], M se puede embeber entonces en \mathbb{R}^{2n} [Hir88, página 27]. Por otro lado si la variedad es sólo topológica el teorema sigue siendo válido, ver los comentarios de [Hir88, página 27].

Finalmente enunciamos la generalización del teorema de Whitney comentada en el párrafo precedente, que simplificará la demostración de algunos resultados de nuestro trabajo.

Teorema 1.1.20 (del embebimiento de Whitney generalizado). *Cualquier variedad de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$) y dimensión n , M , se puede embeber en \mathbb{R}^{2n} . El embebimiento $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ se puede elegir de clase C^r y tal que $f(M)$ es una subvariedad cerrada⁵ de \mathbb{R}^{2n+1} .*

⁴Un espacio es *paracompacto* si de cada cubrimiento abierto se puede extraer un refinamiento que es localmente finito

⁵**Nota por eliminar:** cerrada?

1.2. Ecuaciones diferenciales autónomas sobre variedades. Flujos, flujos locales y semiflujos

Recordamos en esta sección algunos hechos básicos sobre ecuaciones diferenciales autónomas sobre \mathbb{R}^n y fijamos algunas definiciones importantes que serán importantes en lo que sigue.

Definición 1.2.1 (flujo y flujo local). Un *flujo local* sobre una variedad M es una aplicación continua $\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que satisface las siguientes propiedades:

- (i) Λ es abierto en $\mathbb{R} \times M$; además, para cada $x \in M$ el conjunto de números t para los que $\Phi(t, x)$ está definido es un intervalo abierto I_x que contiene al 0.
- (ii) $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in M$.
- (iii) Si $\Phi(t, x) = y$ entonces $I_y = \{s - t : s \in I_x\}$. Además, $\Phi(r, y) = \Phi(r, \Phi(t, x)) = \Phi(r + t, x)$ para todo $r \in I_y$.

Si estamos en el caso particular $\Lambda = \mathbb{R} \times M$ entonces Φ recibe el nombre de *flujo*. Además, llamaremos *flujo local de clase C^r* a aquel para el que la aplicación Φ es de clase C^r .

A la variedad M se le suele llamar *espacio de fases* y al conjunto de los números reales se le llama *espacio de tiempos*.

Muchos autores utilizan la noción de *sistema dinámico continuo* para referirse a una terna (M, Φ, \mathbb{R}) como la de la anterior definición, es decir, para referirse a un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ definido sobre la variedad M . Otras nociones relacionadas estrechamente con ésta son las de sistema dinámico discreto y semiflujo.

Definición 1.2.2 (sistema dinámico discreto). Recordamos que un *sistema dinámico discreto* es una terna (M, Φ, T) donde el conjunto de tiempos T es, o bien el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} , o bien el conjunto de los números naturales \mathbb{N} y $\Phi : T \times M \rightarrow M$ es una aplicación continua que satisface:

1. $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in M$.
2. $\Phi(n + m, x) = \Phi(n, \Phi(m, x))$ para cualesquiera $n, m \in T$ y $x \in M$.

Como en la definición de sistema dinámico continuo, la variedad M se llama espacio de fases.

Es importante destacar que la definición de sistema dinámico, discreto o continuo, se puede dar sobre espacios más generales. Sin embargo para el propósito de este trabajo no es necesario introducir la noción en espacios más amplios que variedades.

Es pertinente aquí comentar la procedencia de los sistemas dinámicos discretos. En concreto, conviene dejar claro que cualquier aplicación continua de una variedad M sobre ella misma, $f : M \rightarrow M$, define un sistema dinámico discreto como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{N} \times M &\longrightarrow M \\ (n, x) &\longrightarrow f^n(x), \end{aligned}$$

de hecho éstos son los únicos sistemas dinámicos discretos cuando el conjunto de tiempos es \mathbb{N} . Cuando la aplicación f es además un homeomorfismo, el sistema dinámico discreto se puede elegir además para el conjunto de tiempos $T = \mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z} \times M &\longrightarrow M \\ (n, x) &\longrightarrow f^n(x). \end{aligned}$$

En lo que sigue veremos también que las ecuaciones diferenciales autónomas definidas por campos de vectores de clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$, generan flujos locales o flujos. No obstante, cuando los campos de vectores no son localmente Lipschitz, las soluciones de la ecuación diferencial pueden no ser únicas y puede que no sea posible definir flujos pero, a veces, sí una estructura similar llamada *semiflujo*.

Definición 1.2.3 (semiflujo). ⁶ Un *semiflujo sobre una variedad* M es una aplicación continua $\Phi : [0, +\infty[\times M \rightarrow M$ que satisface las propiedades siguientes.

1. $\Phi(0, u) = u$ para todo $u \in M$.
2. $\Phi(t + s, u) = \Phi(t, \Phi(s, u))$ para todo $u \in M$ y $t, s \in [0, +\infty[$.

En este trabajo no nos vamos a ocupar del estudio de semiflujos, introducimos aquí su definición ya que es muy cercana a la de flujos y supone una posible vía de extensión de los resultados que obtengamos aquí para flujos. Conviene comentar que la noción de semiflujo fue introducida por primera vez en 1965 por O. Hajek en [Haj65b] y una teoría sobre ellos fue desarrollada poco después en el libro del mismo autor y N. P. Bhatia [BH70].

⁶**Nota por eliminar:** Cuidado con la definición

Definición 1.2.4 (campo de vectores). Un *campo de vectores de clase C^r* sobre una variedad de clase C^s ($s \geq r$) y dimensión n es una aplicación de clase C^r como sigue

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow TM \\ x &\longrightarrow f(x) \in TM_x. \end{aligned}$$

Definición 1.2.5 (ecuación diferencial autónoma). Una *ecuación diferencial autónoma de clase C^r* , $1 \leq r \leq \infty$, sobre una variedad M sin frontera combinatoria es una expresión del tipo

$$y' = f(y), \quad (1.2.1)$$

donde f es un campo de vectores de clase C^r , $f : M \rightarrow TM$.

Definición 1.2.6 (solución de una ecuación diferencial). Un flujo local $\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ se dice que es la *solución* de (1.2.1) si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cada $(0, x) \in \Lambda$ se verifica

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = f(x).$$

2. La aplicación $\Phi_x : I_x \rightarrow M$, tal que $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$, no se puede extender a un subintervalo más grande J de manera que $\Phi'_x(t) = f(x)$ para cada $t \in J$.

Un hecho importante de los flujos locales es la relación que existe entre ellos y las ecuaciones diferenciales autónomas, esta relación la vamos a poner de manifiesto en lo que sigue.

Teorema 1.2.7. *Para cada ecuación diferencial autónoma de clase C^r $y' = f(y)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe un flujo local de clase C^r*

$$\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

de manera que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = f(x).$$

Demostración. Remitimos al lector a [Jim00, sección 26] y [Sot79, páginas 33-43].

□

Recíprocamente es sencillo mostrar que cualquier flujo local de clase C^r , $\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, con $1 \leq r \leq \infty$, tiene asociada una ecuación diferencial de clase C^{r-1} cuya solución es el flujo local Φ . Esta ecuación diferencial está definida por $y' = f(y)$ con

$$f(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, y).$$

Este teorema también se puede extender a variedades, [PM82, capítulo 1, proposición 1.1]. Enunciamos la extensión:

Teorema 1.2.8. *Para cada ecuación diferencial autónoma de clase C^r $y' = f(y)$ sobre una variedad M sin frontera de clase C^s ($s \geq r$), $f : M \rightarrow TM$, existe un flujo local de clase C^r*

$$\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = f(x).$$

1.3. Flujos. Relación entre flujos y flujos locales

Hemos visto en la sección anterior que dado un flujo de clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$, sobre una variedad M de dimensión n , $\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, podemos asociarle una ecuación diferencial autónoma de clase C^{r-1} : $y' = f(y)$, donde f es una aplicación entre M y su espacio tangente, TM , definida por $f(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, y)$.

El recíproco no es cierto en general porque las soluciones de una ecuación diferencial pueden no estar definidas sobre toda la recta real. Por ejemplo, si tomamos la ecuación diferencial autónoma $(x', y') = (1, 1 + \tan^2(x))$, sus soluciones están definidas para cada condición inicial (x_0, y_0) en un intervalo de amplitud π . Entonces no podemos asociarle a dicha ecuación diferencial un flujo. Sin embargo, si la variedad es compacta, el recíproco sí que es cierto (véase [AL73, sección 1.9, teorema 4] y [PM82, capítulo 1, proposición 1.3]). En cambio, hemos visto que cualquier campo de vectores de clase C^r tiene un flujo local asociado. En esta sección mostraremos cuándo un flujo local es topológicamente equivalente a un flujo en el sentido de la siguiente definición.

Definición 1.3.1 (flujos locales equivalentes). Dados dos flujos locales de clase C^r , $r \geq 0$, $\Psi : \Sigma \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ y $\Phi : \Lambda \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ sobre una variedad M de

dimensión n , decimos que son *equivalentes de clase C^r* si existe un difeomorfismo de clase C^r , $h : M \rightarrow M$, tal que:

1. h conserva las órbitas de Φ . Es decir, los subconjuntos $h(\Phi_p(I_p))$ y $\Psi_{h(p)}(I_{h(p)})$ de M son iguales para todo $p \in M$.
2. Además, las orientaciones de las curvas $\Psi_{h(p)}(t)$ y $h \circ \Phi_p(t)$ coinciden para cada $p \in M$, es decir, existe una aplicación creciente $i_p : I_p \rightarrow I_{h(p)}$ para la que $h \circ \Phi_p(t) = \Psi_{h(p)}(i_p(t))$.

Una cuestión interesante para simplificar la notación de la tesis es ver que para cualquier conjunto abierto O en una variedad M y para cualquier flujo local de clase C^r , $\Psi : \Sigma \subset \mathbb{R} \times O \rightarrow O$, existe un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que Ψ y $\Phi|_{\mathbb{R} \times O}$ son equivalentes. Esta cuestión fue resuelta por Vinograd [NS60, pp. 19-21] cuando la variedad considerada es $M = \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.3.2 (Vinograd). *Sea O un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $\Phi : \Sigma \subset \mathbb{R} \times O \rightarrow O$ un flujo local de clase C^r ($r \geq 0$). Entonces existe un flujo de clase C^r , $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que:*

1. Φ y $\Psi|_{\mathbb{R} \times O}$ son flujos locales equivalentes de clase C^r ,
2. $\Psi(t, x) = x$ para cada $x \notin O$ y $t \in \mathbb{R}$.

Además el difeomorfismo que da la equivalencia es la aplicación identidad.

En esta sección vamos a extender este teorema de Vinograd a variedades.

1.3.1. Relación entre flujos y flujos locales definidos sobre variedades

Enunciamos ya el teorema que extiende el resultado de Vinograd (teorema 1.3.2). La prueba puede encontrarse en [Sol01a] y [JS04d, Lemma 1.5].

Teorema 1.3.A (Jiménez López-Soler López). *Sea O un conjunto abierto de la variedad de dimensión n , M , y sea $\Phi : \Sigma \subset \mathbb{R} \times O \rightarrow O$ un flujo local de clase C^r ($r \geq 0$). Entonces existe un flujo de clase C^r , $\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, tal que*

1. Φ y $\Psi|_{\mathbb{R} \times O}$ son equivalentes de clase C^r ,

2. $\Psi(t, x) = x$ para cada $x \notin O$ y $t \in \mathbb{R}$, es decir, los puntos que están fuera de O son singulares.

Además el difeomorfismo que da la equivalencia es la identidad.

Prueba de la versión continua

La prueba reproduce la que hicimos en el Lema 1.5 de [JS04d]. Obsérvese que no es restrictivo suponer que la variedad M es conexa (ya que si N es una componente conexa de M entonces el subconjunto abierto de N , $O \cap N$, es la unión de órbitas de Φ , es decir, la restricción de Φ a $\Sigma \cap (\mathbb{R} \times (O \cap N))$ es un flujo local sobre $O \cap N$). Además, puesto que M es localmente compacto y Hausdorff entonces podemos aplicar el teorema de Alexandrov [Kur68, capítulo 4, sección 41.X, teorema 5] y considerar la compactificación de M por un punto, que denotaremos por M_∞ .

Según el teorema de Alexandrov M_∞ es metrizable por serlo M . Fijemos una distancia $\text{dist}_\infty : M_\infty \times M_\infty \rightarrow [0, \infty[$ para la que haya algún punto $y \in O$ tal que $\text{dist}_\infty(y, \text{Bd } O) > 1$ (aquí se entiende que $\text{Bd } O$ es la frontera del conjunto O en la compactificación M_∞) y elijamos números positivos t_n , $n = 1, 2, \dots$, suficientemente pequeños tales que si $\text{dist}_\infty(x, \text{Bd } O) \geq 1/n$ entonces $\text{dist}_\infty(\Phi(t, x), \text{Bd } O) \geq 1/(n+1)$ para cualquier $|t| \leq t_n$. Fijemos una aplicación continua $\Theta : O \rightarrow (0, \infty)$ satisfaciendo $\Theta(x) \geq 1/t_n$ para cada x con $\text{dist}_\infty(x, \text{Bd } O) \geq 1/(n+1)$.

Ahora para cada $\theta \in \mathbb{R}$ y $x \in O$ existe exactamente un número $t(\theta, x) := t \in I_x$ tal que $\theta = \int_0^t \Theta(\Phi(s, x)) ds$. Es fácil verificar que $t(\theta, x)$ es continua y que $\Psi(\theta, x) = \Phi(t(\theta, x), x)$ es un flujo sobre O que se puede extender de forma continua a todo el espacio M_∞ (en concreto a M) tomando $\Psi(\theta, x) = x$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y $x \in M_\infty \setminus O$.

Observación 1.3.1. La prueba dada también funciona para flujos locales definidos sobre espacios metrizable localmente compactos. Además el lema 1.5 de [JS04d] está probado en este contexto.

Prueba de la versión diferenciable

⁷Usando el teorema de Whitney⁸, podemos ver a M como una subvariedad de dimensión n de \mathbb{R}^{2n} . Podemos suponer que M está acotada en \mathbb{R}^{2n} y por lo tanto que

⁷**Nota por eliminar:** Revisar la demostración

⁸Ver teorema 1.1.20, página 30.

$K = (\text{Cl } M) \setminus O$ es compacto. Fijemos una colección $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de entornos abiertos y acotados de K en \mathbb{R}^{2n} tales que $\text{Cl } U_{i+1} \subset U_i$ para cada i y $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = K$.

Ahora se toman aplicaciones de clase C^∞ , $\lambda_i : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$, que verifican:

1. $\lambda_i \equiv 1$ en $\mathbb{R}^{2n} \setminus U_i$,
2. $\lambda_i \equiv 0$ en $\text{Cl } U_{i+1}$,

y se definen los campos de vectores de clase C^∞ , $F_i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, dados por:

$$F_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x)F(x) & \text{si } x \in O, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

siendo $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ el campo de vectores suave asociado al flujo local de partida Φ .

Fijemos un atlas numerable sobre la variedad M , $\{\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W_i \subset M\}_{i=1}^{\infty}$. Ahora tomamos números positivos suficientemente pequeños, $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, para que los campos de vectores $G_i(x) = \epsilon_i F_i(x)$ verifiquen que para cada j , las composiciones $G_j \circ \varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, j$, tienen todas sus derivadas parciales hasta el orden j uniformemente acotadas por $1/2^j$.

Entonces $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$ es un campo de vectores suave sobre M que se anula en $M \setminus O$ y cuyo flujo local asociado, Ψ , tiene las mismas órbitas y con las mismas orientaciones que Φ . Además, podemos suponer que los números ϵ_i elegidos garantizan que $\|G(x)\| < d(\mathbb{R}^{2n} \setminus U_i, \text{Cl } U_{i+1})$ (siendo $d(\cdot, \cdot)$ la distancia euclídea) para todo $x \in O \cap (U_i \setminus U_{i+1})$.

Ahora es claro que Ψ es de hecho un flujo, lo que concluye la prueba.

1.4. Conjuntos ω -límite

El objetivo de esta tesis es estudiar el comportamiento asintótico de las trayectorias de un flujo definido sobre una variedad. La resolución de este problema ayudará a entender el comportamiento final de las trayectorias de ecuaciones diferenciales debido a la estrecha relación existente entre ecuaciones diferenciales autónomas y flujos.

En esta sección nos ocupamos de definir el conjunto que contiene la información del comportamiento asintótico de las órbitas de un flujo. Este conjunto recibe el

nombre de *conjunto ω -límite*. Pasamos a dar su definición precisando previamente la definición exacta de *órbita*.

Definición 1.4.1 (órbita de x). Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo sobre una variedad M y sea $x \in M$. Denotamos por $\text{Orb}_\Phi(x)$ a la *órbita de x* , que viene definida por la igualdad $\text{Orb}_\Phi(x) = \Phi(\mathbb{R} \times \{x\})$.

Para cada punto de x podemos estudiar el conjunto de puntos en el que acumula la semiórbita $\Phi((0, +\infty) \times \{x\})$, cuando consideramos sucesiones de puntos de ella eligiendo tiempos que tienden a $+\infty$. Este conjunto es el conjunto ω -límite. Por el contrario el conjunto de puntos de acumulación de $\Phi((-\infty, 0) \times \{x\})$, eligiendo sucesiones de puntos de ella con tiempo tendiendo a $-\infty$, se llama conjunto α -límite.

Definición 1.4.2 (conjunto ω -límite y conjunto α -límite). Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo continuo sobre la variedad M y sea $x \in M$. Entonces el *conjunto ω -límite de x* , también llamado *conjunto ω -límite de $\text{Orb}_\Phi(x)$* (resp. *conjunto α -límite de x* también llamado *conjunto α -límite de $\text{Orb}_\Phi(x)$*) se denota por $\omega_\Phi(x)$ (resp. $\alpha_\Phi(x)$) y está definido por la igualdad:

$$\omega_\Phi(x) = \{y \in M : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty \text{ tal que } (\Phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y\},$$

$$\text{(resp. } \alpha_\Phi(x) = \{y \in M : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty \text{ tal que } (\Phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y\}.$$

Obviamente ambos conjuntos, conjunto α -límite y conjunto ω -límite, tienen las mismas propiedades topológicas. El teorema siguiente recoge las propiedades topológicas básicas de los conjuntos ω -límites (y por tanto también las de los conjuntos α -límite).

Teorema 1.4.3 (propiedades básicas de los ω -límite). Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo continuo definido sobre una variedad M y sea $x \in M$. Entonces:

($\omega 1$) $\omega_\Phi(x)$ es invariante por el flujo Φ , es decir $\Phi(\mathbb{R} \times \omega_\Phi(x)) = \omega_\Phi(x)$.

($\omega 2$) $\omega_\Phi(x)$ es cerrado.

Además, si M es compacta se verifican las propiedades:

($\omega 3$) $\omega_\Phi(x) \neq \emptyset$.

($\omega 4$) $\omega_\Phi(x)$ es compacto.

($\omega 5$) $\omega_\Phi(x)$ es conexo.

Demostración de la propiedad ($\omega 1$)

Probaremos en este caso que el conjunto ω -límite es la unión de órbitas completas del flujo Φ . Dado $y \in \omega_\Phi(x)$, veremos que $\text{Orb}_\Phi(y) \subset \omega_\Phi(x)$. Para ello tomamos $z \in \text{Orb}_\Phi(y)$, es decir, $z = \Phi(s, y)$ para cierto $s \in \mathbb{R}$ y vemos que z pertenece a $\omega_\Phi(x)$.

Para ver esto tomemos un entorno U_z del punto z y $t \in \mathbb{R}$ y veamos que existe $\tau > t$ tal que $\Phi(\tau, x) \in U_z$. Como $y \in \omega_\Phi(x)$ existirá un $t' > t - s$ tal que $\Phi(t', x) \in \Phi(\{-s\} \times U_z)$ (abierto que contiene al punto y por ser Φ un flujo). De aquí tenemos que $\Phi(s, \Phi(t', x)) = \Phi(t' + s, x) \in \Phi(\{s\} \times (\Phi(\{-s\} \times U_z))) = U_z$.

Así que $\Phi(s + t', x) \in U_z$ y por lo tanto, haciendo $\tau = t' + s > t$ tenemos $\Phi(\tau, x) \in U_z$, por lo que $z \in \omega_\Phi(x)$ y $\text{Orb}_\Phi(y) \subset \omega_\Phi(x)$.

Demostración de la propiedad ($\omega 2$)

Para probar esta propiedad vamos a ver que el conjunto $M \setminus \omega_\Phi(x)$ es abierto. Tomemos $z \notin \omega_\Phi(x)$, un conjunto abierto $U_z \subset M$ y $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ tales que $\Phi(s, x) \notin U_z$ para todo $s > \tilde{t}$. Así que $U_z \subset M \setminus \omega_\Phi(x)$.

De lo que se deduce que $M \setminus \omega_\Phi(x)$ es abierto y entonces $\omega_\Phi(x)$ es cerrado.

Demostración de la propiedad ($\omega 3$)

Debido a que M es compacta, podemos extraer una subsucesión convergente de la sucesión $(\Phi(n, x))_{n \in \mathbb{N}}$. Supongamos que esta subsucesión converge hacia $c \in M$. Por lo tanto $c \in \omega_\Phi(x)$ y $\omega_\Phi(x) \neq \emptyset$.

Demostración de la propiedad ($\omega 4$)

Puesto que el conjunto $\omega_\Phi(x)$ es cerrado y está contenido dentro de un conjunto compacto M se tiene que $\omega_\Phi(x)$ es compacto.

Demostración de la propiedad ($\omega 5$)

Supongamos que $\omega_\Phi(x)$ no fuera conexo, es decir $\omega_\Phi(x) = A \cup B$ para ciertos conjuntos cerrados y disjuntos A y B .

Denotemos por δ a la distancia de A a B . Entonces $\delta > 0$ por ser A y B cerrados y disjuntos. Debido a que A y B están dentro del conjunto $\omega_\Phi(x)$ podemos encontrar dos sucesiones, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $d(\Phi(t_n, x), A) > \delta/2$, $d(\Phi(s_n, x), A) < \delta/2$ y $s_n < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Puesto que la función $t \rightarrow d(\Phi(t, x), A)$ es continua, existirá otra sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n < v_n < s_n$ de manera que $d(\Phi(v_n, x), A) = \delta/2$. Debido a que $d(A, B) = \delta$, tenemos que $d(\Phi(v_n, x), B) \geq \delta/2$.

Ahora, de la sucesión $(\Phi(v_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ se puede extraer una subsucesión convergente hacia un punto c , que pertenecerá a $\omega_\Phi(x)$. Por la continuidad de la función distancia tendremos $d(c, A) = \delta/2$ y $d(c, B) \geq \delta/2$, lo cual contradice la hipótesis de no conexión de $\omega_\Phi(x)$.

Estas propiedades son necesarias. Sin embargo es fácil ver, incluso si M es compacta, que dichas propiedades no son suficientes para que un conjunto sea un ω -límite.

Ejemplo 1.4.1. Cualquier conjunto ω -límite en \mathbb{R} es o bien vacío o bien un conjunto formado por un solo punto. Por lo tanto cualquier intervalo cerrado no puede ser un conjunto ω -límite y sin embargo satisface **($\omega 2$)**, **($\omega 3$)**, **($\omega 4$)** y **($\omega 5$)**.

El objetivo de este trabajo será encontrar propiedades topológicas necesarias y suficientes para caracterizar a los conjuntos ω -límite. Naturalmente estas propiedades variarán dependiendo de la variedad con la que estemos trabajando. En efecto, las diferencias topológicas entre variedades dan lugar a que podamos definir sobre ellas flujos con comportamientos dinámicos diferentes. Una diferencia importante entre las órbitas de una variedad es la ausencia o presencia de puntos recurrentes no triviales. Éstos no están presentes en todas las variedades, su existencia depende de la geometría de la variedad.

Definición 1.4.4 (punto recurrente). Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo definido sobre una variedad M y sea $x \in M$. Diremos que x es recurrente para el flujo Φ o que $\text{Orb}_\Phi(x)$ es recurrente para el flujo Φ si $x \in \omega_\Phi(x)$. Cuando no haya posibilidad de confusión, eliminaremos la alusión al flujo y diremos simplemente que x o $\text{Orb}_\Phi(x)$ son recurrentes.

Ejemplos triviales de órbitas recurrentes son los puntos singulares y las órbitas cerradas. Damos su definición precisa.

Definición 1.4.5 (puntos singulares, regulares y órbitas cerradas). Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo sobre la variedad M y $x \in M$. Decimos que x (también $\text{Orb}_\Phi(x)$) es un *punto singular* o que x (también $\text{Orb}_\Phi(x)$) es un *punto singular* si $\text{Orb}_\Phi(x) = \{x\}$. El conjunto de puntos singulares de M se denota por $\text{Sing}(\Phi)$ y los puntos de $M \setminus \text{Sing}(\Phi)$ se llaman *puntos regulares* del flujo Φ .

Una órbita $\text{Orb}_\Phi(x)$ se dice que es una *órbita cerrada* o una *órbita periódica* si y sólo si $\text{Orb}_\Phi(x)$ es un círculo, es decir, si existe un homeomorfismo entre $\text{Orb}_\Phi(x)$ y \mathbb{S}^1 , esto es equivalente a que exista un $t > 0$ minimal tal que $\Phi(t, x) = x$.

Los puntos singulares y las órbitas cerradas reciben el nombre de *órbitas recurrentes triviales*, las órbitas recurrentes que no son puntos singulares ni órbitas cerradas se llaman *órbitas recurrentes no triviales*. Naturalmente, esta última clase de órbitas existe y un ejemplo de ellas son todas las órbitas del flujo irracional sobre el toro \mathbb{T}^2 , todas estas órbitas tienen como conjunto ω -límite a toda la superficie \mathbb{T}^2 . Otra clase de órbitas recurrentes no triviales son aquellas que generan conjuntos ω -límites con interior vacío diferentes de curvas de Jordan; en el capítulo 3 las estudiaremos en detalle sobre superficies.

La existencia de esta amplia variedad de órbitas complica la caracterización topológica de los conjuntos ω -límites. Sin embargo, existen algunas variedades que no admiten flujos con órbitas recurrentes no triviales, por ejemplo la esfera \mathbb{S}^2 , el plano proyectivo \mathbb{P}^2 y la botella de Klein \mathbb{B}^2 . Por lo tanto una caracterización topológica global de los conjuntos ω -límite en estas superficies será más fácil de obtener: lo veremos en el siguiente capítulo.

Teorema 1.4.6. *Denotemos por S a \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 o \mathbb{B}^2 y sea $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo. Si $x \in S$, o bien es no recurrente o recurrente trivial, es decir x es un punto no recurrente, un punto singular o pertenece a una órbita periódica.*

Demostración. ⁹La prueba de este teorema para $S = \mathbb{R}^2$ la obtuvieron en 1936 H. Bohr y W. Fenchel, [BF52]. De dicha prueba se deduce el resultado para \mathbb{S}^2 , ya que la esfera menos un punto es homeomorfa a \mathbb{R}^2 . El resultado para \mathbb{P}^2 es consecuencia del resultado para la esfera ya que ésta es el recubridor orientable doble del plano proyectivo, se pueden ver los detalles en [ST88b]. Por último, la prueba del resultado para la botella de Klein se debe a N. G. Markley que la obtuvo en 1969 en [Mar69a] y a S. Kh. Aranson [Ara69] que obtuvo el mismo resultado independientemente. \square

⁹**Nota por eliminar:** Revisar estas referencias

Para acabar hacemos notar que la no existencia de órbitas recurrentes no triviales en \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 implica que los conjuntos ω -límites en dichas superficies tienen interior vacío, cosa que no ocurre por ejemplo en el toro. En efecto, como hemos comentado antes, cualquier órbita del flujo irracional sobre el toro tiene a toda la superficie como conjunto ω -límite.

Proposición 1.4.7. *Denotemos por S a \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 o \mathbb{B}^2 y sea $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo. Entonces para cualquier $x \in S$ se tiene que $\text{Int } \omega_\Phi(x) = \emptyset$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo y adoptemos la notación $O = \text{Int } \omega_\Phi(x) \neq \emptyset$. Tomemos $p \in \omega_\Phi(x) \subset O$ y $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(\tau, x) \in O$. Por lo tanto $\Phi(\tau, x) \in O \subset \omega_\Phi(x)$ y en virtud de la propiedad ($\omega 1$) $x \in \omega_\Phi(x)$. Esto nos dice que x es un punto recurrente no trivial (puesto que Orb_x no es un punto singular ni una órbita periódica ya que su ω -límite tiene interior no vacío), pero S no admite flujos con puntos recurrentes no triviales. Llegamos pues a una contradicción y por lo tanto el teorema queda probado. \square

1.4.1. Conjuntos y variedades minimales

El desarrollo del estudio de los conjuntos ω -límites de un flujo necesita a veces la noción de conjuntos minimales. Éstos son casos particulares de los conjuntos ω -límites puesto que cualquier conjunto minimal es también un conjunto ω -límite. Sin embargo el recíproco no es cierto. Introducimos con precisión esta noción.

Recordamos de antemano que fijada una variedad M y un flujo sobre ella, $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, se dice que un subconjunto N de M es *invariante por Φ* (o simplemente *invariante* si no hay posible confusión con otros flujos) cuando $\Phi(\mathbb{R} \times N) = N$. Esta noción ya ha sido usada antes al probar que los conjuntos ω -límites de un flujo son invariantes por dicho flujo. Otro tipo de conjuntos invariantes serán los conjuntos minimales.

Definición 1.4.8 (Conjunto minimal). Dado un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, un conjunto no vacío $N \subset M$ se dice *minimal para el flujo Φ* (o simplemente *minimal* si no hay confusión) si verifica las propiedades:

1. N es invariante.
2. N es un conjunto cerrado.

3. Ningún subconjunto propio de él verifica simultáneamente las dos propiedades anteriores.

Al igual que las órbitas recurrentes las dividíamos en recurrentes triviales (puntos singulares y órbitas cerradas) y no triviales (las demás), los conjuntos minimales sobre superficies se clasifican también en triviales y no triviales.

Definición 1.4.9 (Conjuntos minimales triviales y no triviales). Un conjunto minimal N para un flujo sobre la superficie S , $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$, se dice *trivial* si es un punto singular, una curva de Jordan o si es igual a S y en este caso $S = \mathbb{T}^2$. En caso contrario se dice que el conjunto minimal es *no trivial*.

Lema 1.4.10 (Existencia de conjuntos minimales). *Sea M una variedad compacta y $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo continuo. Entonces M contiene al menos un conjunto minimal N .*

Demostración. En la prueba de este resultado usaremos el lema de Zorn. Consideraremos el conjunto no vacío $\mathcal{H} = \{T \subset M : T \text{ es invariante, compacto y no vacío}\}$.

Dentro de este conjunto vamos a considerar el orden $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ si y sólo si $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$. Veamos que \mathcal{H} con este orden es un conjunto inductivo.

El conjunto \mathcal{H} es no vacío, ya que M es un elemento de él. Por otra parte si $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ es una cadena en \mathcal{H} , el conjunto¹⁰ $\mathcal{C} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$ es un elemento maximal que está en \mathcal{H} .

En efecto, el conjunto \mathcal{C} es no vacío por ser intersección de una sucesión de compactos contenidos cada uno en el anterior, compacto por ser intersección de compactos e invariante por ser intersección de invariantes.

Puesto que hemos probado que toda cadena posee un mayorante, debe existir en \mathcal{H} un elemento maximal, que por definición del conjunto \mathcal{H} y del orden será un conjunto minimal para Φ . \square

Lema 1.4.11. *Todo conjunto ω -límite en una variedad compacta contiene un conjunto minimal.*

Demostración. Los ω -límites en variedades compactas son conexos, compactos e invariantes. Aplicando el mismo razonamiento que en lema precedente se obtiene el resultado enunciado. \square

¹⁰**Nota por eliminar:** Esta no es la definición de cadena, hay que revisar la prueba

Hemos visto que cualquier flujo definido sobre una variedad compacta posee un conjunto minimal. Sin embargo, esta propiedad deja de ser cierta si el flujo no está definido sobre una variedad compacta. En este sentido J. C. Benièrre y G. Meigniez por un lado y T. Inaba por otro dieron en [BM99] y [Ina99] ejemplos de flujos definidos sobre superficies no compactas sin conjuntos minimales.

Por otro lado conviene resaltar aquí que el estudio de superficies minimales ocupó recientemente la atención de J. C. Benièrre y G. Hector. Recordamos seguidamente la noción de variedad minimal y el teorema de estos autores sobre superficies minimales contenido en la tesis doctoral del primero de ellos, [Ben98].

Definición 1.4.12 (variedad minimal). Una variedad M se dice minimal si existe un flujo continuo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ para el que M es un conjunto minimal.

Por un teorema de C. Gutièrrez, ver [Gut86], cualquier flujo continuo sobre una superficie compacta y conexa es topológicamente equivalente a un flujo derivado de una ecuación diferencial autónoma definida por un campo de vectores. Por lo tanto, gracias al teorema de Poincaré-Hopf (ver por ejemplo [Tho79, capítulo 21], [dC76b, página 283] o [Sol01b, sección 2.4]), a menos que la superficie sea el toro o la botella de Klein, ha de tener puntos singulares. La existencia de los puntos singulares impide la minimalidad de la superficie. Por otro lado, sabemos que la botella de Klein no admite recurrencias, por lo que no puede ser minimal. Finalmente sí se sabe que \mathbb{T}^2 es minimal, por ejemplo tomando el flujo irracional. Resumiendo podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.4.13 (superficies compactas y conexas minimales). *Sea S una superficie compacta y conexa. Entonces se tiene que S es minimal si y sólo si S es homeomorfa al toro.*

Este teorema se complementa con el estudio desarrollado por J. C. Benièrre y G. Hector, recogido en el siguiente teorema (ver [Ben98]).

Teorema 1.4.14. *Cualquier superficie orientable no compacta y de género no cero (no se puede embeber en el plano) admite un flujo minimal.*

1.4.2. Conjuntos y variedades transitivas

La noción de transitividad está íntimamente ligada al estudio e los conjuntos ω -límites como dejaremos claro en un capítulo posterior. Introducimos ya esta nueva noción utilizando la notación $\text{Cl}O$ para denotar la clausura del conjunto O .

Definición 1.4.15 (conjunto transitivo). Dada una variedad M , un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ y un subconjunto $O \subset M$, se dice que *el conjunto O es transitivo para el flujo Φ* (o simplemente *transitivo* si no existe confusión con otros flujos) si y sólo si existe $x \in O$ tal que $\text{Cl } O = \omega_\Phi(x)$.

Es claro que los conjuntos minimales son transitivos, la minimalidad es una transitividad fuerte ya que en un conjunto minimal se tiene que todos los puntos tienen como ω -límite al conjunto minimal. Como es de suponer ambas nociones no son equivalentes. Tras la definición que sigue lo pondremos de manifiesto.

Definición 1.4.16 (variedad transitiva). Una variedad M se dice *transitiva* si se puede definir un flujo sobre ella, $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, de forma que existe un punto $x \in M$ tal que $\omega_\Phi(x) = M$.

Si además el flujo Φ es suave entonces diremos que *M es transitiva de clase C^∞ o transitiva suave.*

Hemos enunciado en la sección anterior, en el teorema 1.4.13, que la única superficie compacta y conexa minimal es el toro. Sin embargo cualquier superficie compacta y conexa diferente de \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 es transitiva. Una demostración de este hecho se puede seguir en el artículo de R. A. Smith y S. Thomas [ST88b], en esta publicación y en [ST88a] se propone estudiar qué variedades en general son transitivas y cuáles no.

Es necesario resolver el problema de clasificar variedades transitivas cuando se pretende dar una clasificación topológica de los conjuntos ω -límites con interior no vacío. En [JS04d] hemos clasificado las variedades transitivas; expondremos los resultados en los capítulos 4 y 5. Sin embargo podemos avanzar ya que cualquier variedad conexa (suave) de dimensión mayor o igual a 3 es transitiva (suave). En concreto el espacio \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, es transitivo de clase C^∞ .

La transitividad de \mathbb{R}^n para dimensiones mayores de dos se conocía ya desde 1968. La prueba de este hecho se debe a Y. A. Sidorov y se puede seguir en [Sid68]. En cambio \mathbb{R}^2 no es transitivo ya que no admite recurrencias no triviales (teorema 1.4.6). Por supuesto \mathbb{R} tampoco es transitivo como es fácil de constatar.

En cuanto a superficies, la clasificación de superficies transitivas no es tan sencilla de enunciar, no se tiene que todas sean transitivas ni que todas no lo sean. Enunciaremos y probaremos la clasificación que hemos logrado en el capítulo 4. Concluimos

ya esta sección apuntando que la única variedad de dimensión 1 transitiva es homeomorfa a \mathbb{S}^1 , ya que cualquier variedad transitiva es conexa, las únicas variedades de dimensión uno conexas son aquellas homeomorfas a \mathbb{S}^1 , $[0, 1]$ o $[0, 1)$ y las dos últimas no son transitivas.

1.5. Variedades de dimensión dos y tres

Nuestro interés en este trabajo es desarrollar lo máximo posible la caracterización topológica de los conjuntos ω -límite para variedades de dimensión arbitraria. No obstante es conveniente parar y mirar las particularidades que ofrecen las superficies. Una razón para esta restricción es que existe un teorema de clasificación de superficies. Otra razón es que cualquier variedad de dimensión menor o igual a tres admite una estructura diferenciable. Ambas propiedades se usarán para dar resultados más precisos en dimensión 2.

En cuanto a las variedades de dimensión 1 no nos ocuparemos del estudio de la estructura de los ω -límites sobre ellas porque es trivial: son el conjunto vacío, conjuntos formados por un único punto o bien una órbita periódica.

1.5.1. Suavizando variedades topológicas de dimensiones dos y tres

En este apartado vamos a seguir el capítulo 3 de [Thu97]. En concreto estamos interesados en presentar un teorema de diferenciabilidad de variedades de dimensión menor o igual a tres. Siguiendo con el ejemplo 3.1.6¹¹ de [Thu97, p. 112] tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1 (diferenciabilidad de variedades topológicas). *Cualquier variedad sin frontera combinatoria de dimensión n ($n \leq 3$) admite una única estructura diferenciable de clase C^∞ (única salvo difeomorfismos). En concreto, si S y R son variedades homeomorfas de dimensión n ($n \leq 3$) entonces serán difeomorfas.*

Este teorema se puede generalizar para superficies con frontera combinatoria, con este fin introducimos el siguiente teorema.

¹¹**Nota por eliminar:** Revisar la referencia

Teorema 1.5.2 (collaring). *Sea S una superficie de clase C^r ($r \geq 0$). Entonces existe un embebimiento $e : \partial S \times [0, 1) \rightarrow S$ con $e(x, 0) = x$ para cada $x \in \partial S$.*

Demostración. Véase [Hir88, pp 113-114] y [Bro62]. \square

Teorema 1.5.3 (suavizando superficies). ¹² *Cualquier superficie (no necesariamente compacta y conexa) admite una estructura diferenciable suave (única salvo difeomorfismos). En particular, si S y R son superficies homeomorfas entonces también son difeomorfas siendo el difeomorfismo de clase C^∞ .*

Demostración. Usando el teorema anterior construimos un embebimiento $e : S \rightarrow S'$ tal que $\partial S' = \emptyset$. Ahora se aplica el teorema 1.5.1 para obtener una estructura diferenciable suave sobre S' , que induce una estructura diferenciable en $e(S)$ y por lo tanto en S . La unicidad se obtiene aplicando, de nuevo, el teorema 1.5.1 a $S \setminus \partial S$. \square

1.5.2. Notación y definiciones relacionadas con la noción de superficie

En este apartado se pretende fijar de manera exacta la notación relacionada con el concepto de superficie así como los objetos que se pueden definir sobre ellas. Es pues importante la lectura de esta sección para evitar confundir estas nociones con otras similares que otros autores llaman de otro modo. De todas formas hemos intentado seguir la notación comunmente usada en los manuales de geometría y topología.

Empezamos con la notación de caracter general. A menos que se señale explícitamente, usaremos el símbolo “ \cong ” para denotar “homeomorfo a”. Por $\|\cdot\|$ denotaremos la norma euclídea en \mathbb{R}^n y asumiremos las identificaciones siguientes:

$$\mathbb{S}^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = \rho\},$$

$$\mathbb{O}^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho\},$$

$$\mathbb{D}^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \rho\},$$

éstos tres conjuntos los llamaremos respectivamente *esfera (de dimensión n) de radio ρ* , *bola abierta (de dimensión n) de radio ρ* y *bola cerrada (de dimensión n) de radio ρ* . Haremos referencia a la dimensión sólo cuando haya ambigüedad al no señalarla.

¹²**Nota por eliminar:** Aclarar la noción de diferenciabilidad con frontera

Frecuentemente haremos las simplificaciones:

$$\mathbb{S}^n := \mathbb{S}^n(1), \quad \mathbb{O}^n := \mathbb{O}^n(1) \quad \text{y} \quad \mathbb{D}^n := \mathbb{D}^n(1).$$

Si C es un subconjunto de M entonces $\text{Cl } C$, $\text{Int } C$ y $\text{Bd } C$ denotan respectivamente la clausura, el interior y la frontera topológica de C . Si M es además un espacio métrico $\text{diam } C$ denota el diámetro del conjunto C .

Hemos usado ya el plano proyectivo, la botella de Klein y la esfera sin definición previa por ser superficies bien conocidas. No obstante aprovechamos esta sección de notación general para revisar la definición y nomenclatura usuales de estas y otras superficies comunes:

- \mathbb{T}^2 es el *toro* y se define como el espacio cociente $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = (t, \delta)$ y $y = (t, -\delta)$ con $|\delta| = 1$.
- \mathbb{P}^2 es el *plano proyectivo* y se define como el espacio cociente \mathbb{D}^2/\sim , donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = -y$.
- \mathbb{B}^2 es la *botella de Klein* y se define como el espacio cociente $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = (t, \delta)$ y $y = (-t, -\delta)$ con $|\delta| = 1$.
- \mathbb{M}^2 es la *banda de Möbius* y se define como el espacio cociente $(\mathbb{O}^1 \times \mathbb{D}^1)/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = (t, \delta)$ y $y = (-t, -\delta)$ con $|\delta| = 1$.
- Un *anillo* sobre una superficie S es cualquier subconjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{O}^1$. Cuando la frontera topológica de un anillo tiene dos componentes conexas se dice entonces que es un *anillo regular*.
- Un *anillo cerrado* sobre una superficie S es cualquier subconjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$.
- Un *disco cerrado* es cualquier conjunto homeomorfo a \mathbb{D}^2 .
- Un *disco abierto* es cualquier conjunto homeomorfo a \mathbb{O}^2 , a veces llamaremos simplemente *disco* a los discos abiertos.

Definición 1.5.4 (curva, arco, subarco, parametrización, orientaciones).
Una *curva* B sobre la superficie S es la imagen de una aplicación continua inyectiva

$\varphi : I \rightarrow S$, siendo I un intervalo abierto¹³ o $I = \mathbb{S}^1$. Cuando $I = \mathbb{S}^1$ diremos que B es un *círculo* (también llamado *curva de Jordan*¹⁴).

Un *arco* A sobre la superficie S es la imagen de una aplicación continua inyectiva $\varphi : I \rightarrow S$, siendo I un intervalo cerrado no degenerado

La aplicación φ recibe el nombre de *parametrización* de B o de A . A veces, para evitar recargar la notación cometeremos un abuso de notación llamando a una curva (resp. arco) y su parametrización de la misma forma.¹⁵

Cuando estamos ante una curva de Jordan, B , también podremos suponer que la parametrización está definida sobre el intervalo $[0, 1]$, $\varphi : [0, 1] \rightarrow S$, de manera que $\varphi|_{[0,1]}$ es inyectiva y $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Si A es un arco, B es una curva y $A \subset B$ entonces diremos que A es un *subarco* de B .

Dos parametrizaciones $\varphi_i : I_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, se dice que *inducen la misma orientación* sobre B si $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : I_1 \rightarrow I_2$ es un homeomorfismo creciente. Esta definición induce una relación de equivalencia en la familia de parametrizaciones de B y cada una de las clases de equivalencia recibe el nombre de *orientación* de B . Cualquiera de las aplicaciones que pertenecen a cada una de las clases recibe el nombre de parametrización *compatible* con la orientación. Una vez que se le asocia a una curva una orientación se dice que la curva es una *curva orientada*.

Definición 1.5.5 (círculo o curva de Jordan (no) homotópicamente nula).

Diremos que una curva de Jordan $C \subset S$, parametrizada por $\alpha : [0, 1] \rightarrow C$, es *homotópicamente nula* si existe una aplicación continua $H : [0, 1]^2 \rightarrow S$ que satisface:

- $H(t, 0) = \alpha(t)$ para todo $t \in [0, 1]$;
- $H(t, 1) = \alpha(0)$ para todo $t \in [0, 1]$;
- $H(0, s) = H(1, s) = \alpha(0)$ para cada $s \in [0, 1]$.

Definición 1.5.6 (curvas de Jordan orientables y no orientables).

Cuando una curva de Jordan B está incluida en una superficie decimos que es orientable si B admite entornos arbitrariamente pequeños homeomorfos a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{O}^1$ (anillo). Sin

¹³Obsérvese que si I es un intervalo abierto entonces $\varphi : I \rightarrow S$ no es necesariamente un *embebimiento*, es decir, $\varphi : I \rightarrow \varphi(I)$ no es necesariamente un homeomorfismo

¹⁴**Nota por eliminar:** ¿No deberíamos usar uno de los dos términos?

¹⁵**Nota por eliminar:** Preguntar si se puede hacer este abuso

embargo, si B admite un entorno homeomorfo a \mathbb{M}^2 (banda de Möbius) se dice que es no orientable.

Es conveniente notar que cualquier curva de Jordan sobre una superficie debe ser orientable o no orientable. La prueba es bastante tediosa: se obtendría usando el *teorema de Schönflies* (cualquier homeomorfismo entre dos círculos en una esfera se puede extender a un homeomorfismo definido sobre toda la esfera) y el *teorema de la curva de Jordan* (una curva de Jordan descompone la esfera en dos discos, cada uno de ellos teniendo a la curva de Jordan como frontera). Una buena referencia para estos resultados es [Kur68, capítulo 10].

Definición 1.5.7 (superficies orientables y no orientables). Una superficie se dice que es *orientable* si no admite sobre ella curvas de Jordan no orientables. En caso contrario se dice que la superficie es *no orientable*.

Definición 1.5.8 (superficie simplemente conexa). Una superficie $R \subset S$ se dice que es *simplemente conexa* si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{D}^2 \setminus P \rightarrow R$, donde P es compacto y tal que $\emptyset \subset P \subset \mathbb{S}^1$.

Ahora introducimos la noción de característica de Euler de una superficie.

Definición 1.5.9 (característica de Euler). Dada una triangulación T (ver por ejemplo [Kin93, capítulo 4]) sobre una superficie compacta y sin frontera combinatoria, S , definimos la característica de Euler de M por:

$$\chi(S) = F - E + V$$

donde F , E y V denotan los números de caras, aristas y vértices de T respectivamente.

Es conveniente hacer notar que la característica de Euler de una superficie no depende de la triangulación elegida.

1.5.3. Modelos de superficies. Pseudosuperficies

La estructura de variedades de dimensión 1 es bastante simple ya que cualquier variedad conexa de esta dimensión debe ser homeomorfa a $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ o $\mathbb{D}^1 = [0, 1]$ si es compacta, a $\mathbb{O}^1 = (0, 1)$ si es abierta y sin frontera o a $\mathbb{E}^1 = [0, 1)$

si es no compacta y con frontera combinatoria (ver [ES92, sección 5.4]). Este hecho tiene algunas consecuencias importantes. La primera de todas es que podemos dar un teorema de estructura para las variedades unidimensionales. La segunda es que, con este teorema de clasificación de variedades, podremos probar propiedades sobre cualquier variedad de dimensión uno haciendo sólo las pruebas en \mathbb{S}^1 , \mathbb{D}^1 , \mathbb{O}^1 y \mathbb{E}^1 si la propiedad que estudiamos es invariante por homeomorfismos.

Definición 1.5.10 (modelos de variedades unidimensionales). Las variedades unidimensionales \mathbb{S}^1 , \mathbb{D}^1 , \mathbb{O}^1 y \mathbb{E}^1 se llaman *modelos de variedades de dimensión 1*.

Ahora se puede introducir el teorema de clasificación de variedades de dimensión 1 en los siguientes términos:

Teorema 1.5.11 (clasificación de variedades de dimensión 1). *Cualquier variedad de dimensión 1 es homeomorfa al conjunto $\bigcup_{i \in N} A_i$, donde:*

1. cualquier A_i es homeomorfo a un modelo de variedad de dimensión 1,
2. $A_j \cap \text{Cl} \bigcup_{i \neq j} A_i = \emptyset$,
3. El conjunto N es numerable.

El teorema de clasificación de superficies es más complicado. Sin embargo es conocido que existe tal clasificación para superficies compactas (ver por ejemplo el Capítulo 9 de [Hir88]), incluso existe un teorema de embebimiento de superficies conexas en espacios llamados pseudosuperficies. Terminamos este apartado definiendo los llamados modelos de superficies y pseudosuperficies.

Notación 1.5.12. Sean $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{i_0}$ y $\{\gamma_j\}_{j=1}^{j_0}$ ($0 \leq i_0, j_0 \leq \infty$) familias de círculos en \mathbb{S}^2 , $\Sigma = \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{i_0} \cup \{\gamma_j\}_{j=1}^{j_0}$ y asumamos que se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) Los círculos $\sigma \in \Sigma$ son disjuntos dos a dos y encierran discos, D_σ , disjuntos dos a dos.
- (ii) Los círculos α_i y β_i tienen orientaciones opuestas para cada índice i (nos referiremos a las parametrizaciones de estos círculos con los mismos nombres que los denotamos a ellos).
- (iii) $d(D_\sigma, \bigcup_{\sigma' \neq \sigma} D_{\sigma'}) > 0$ para todo $\sigma \in \Sigma$.
- (iv) Si $i_0 = \infty$ entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} d(D_{\alpha_i}, D_{\beta_i}) = 0$.

- (v) Si $i_0 = \infty$ (resp. $j_0 = \infty$) entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam } D_{\alpha_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam } D_{\beta_i} = 0$ (resp. $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam } D_{\gamma_j} = 0$).

Entonces definimos en $\mathbb{S}^2 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma} D_\sigma$ la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si alguna de las siguientes propiedades se satisfacen:

- $x = y$.
- $x = \alpha_i(t)$, $y = \beta_i(t)$ (o $y = \alpha_i(t)$, $x = \beta_i(t)$) para algún $t \in \mathbb{S}^1$ y algún i , $0 \leq i \leq i_0$.
- $x = \gamma_j(t)$, $y = \gamma_j(-t)$ para algún $t \in \mathbb{S}^1$ y algún j , $0 \leq j \leq j_0$.

Para cualquier punto $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma} D_\sigma$ denotaremos por $[x]$ a la clase de equivalencia del punto x .

Definición 1.5.13 (modelos de superficies). Con la notación introducida en el párrafo precedente, si $i_0 < \infty$ y $j_0 < \infty$, un modelo de superficie será cualquier espacio homeomorfo a

$$\mathbb{S}_\Sigma^2 := \mathbb{S}^2 / \sim .$$

Definición 1.5.14 (pseudosuperficie). Siguiendo la notación 1.5.12, llamamos *pseudosuperficie* a cualquier espacio $\mathbb{S}_\Sigma^2 := \mathbb{S}^2 / \sim$.

De la definición de topología cociente ([Mun75, sección 2.11]) es fácil constatar que $\mathbb{S}_\Sigma^2 := \mathbb{S}^2 / \sim$ es un espacio topológico regular, compacto, conexo y tiene una base numerablemente localmente finita¹⁶. Aplicando ahora el teorema de Bing-Nagata-Smirnov (ver [Mun75, capítulo 6] o [Kur66, capítulo 2, sección 21-XVII]) se concluye que $\mathbb{S}_\Sigma^2 := \mathbb{S}^2 / \sim$ también es metrizable.

Además, es fácil ver que cualquier modelo de superficie es realmente una superficie compacta y conexa.

¹⁶Una *base* es una familia de abiertos del espacio, de manera que cada abierto de éste se puede conseguir como unión de abiertos de la base. La base \mathcal{B} del espacio X es *numerablemente localmente finita* si es una unión numerable de familias de abiertos, $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\mathcal{B}_n = \{O_i^n\}_{i \in I}$, de tal forma que para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto $U \ni x$ tal que U interseca sólo a un número finito de abiertos O_i^n .

1.5.4. Propiedades de los modelos de superficies

Cuando $i(\Sigma) := i_0$ y $j(\Sigma) := j_0$ son finitos (en notación 1.5.12) se ha recalado que \mathbb{S}_Σ^2 es una superficie compacta y conexa para la que adoptaremos la notación que sigue.

Definición 1.5.15 (M_k y N_k). En lo que sigue se usará el siguiente convenio:

1. $M_{i(\Sigma)} = \mathbb{S}_\Sigma^2$ cuando $j(\Sigma) = 0$. Esta superficie se llama *superficie orientable de género $i(\Sigma)$* .
2. $N_{2i(\Sigma)+j(\Sigma)} = \mathbb{S}_\Sigma^2$ si $j(\Sigma) > 0$. Esta superficie se llama *superficie no orientable de género $2i(\Sigma) + j(\Sigma)$* .

Con la notación introducida $M_0 \cong \mathbb{S}^2$, $M_1 \cong \mathbb{T}^2$, $N_1 \cong \mathbb{P}^2$ y $N_2 \cong \mathbb{B}^2$.

Teorema 1.5.16. *Los modelos de superficies tienen las siguientes propiedades:*

1. M_n es una superficie orientable con característica de Euler igual a $\chi(M_n) = 2 - 2n$,
2. N_n es una superficie no orientable con característica de Euler igual a $\chi(N_n) = 2 - n$.

1.5.5. Clasificación de superficies

Recordamos que dos superficies compactas y conexas son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo género y la misma característica de Euler.

Vamos a describir ahora un procedimiento para dar una aproximación a las superficies no compactas. Una propiedad interesante de las pseudosuperficies será que las superficies no compactas se pueden embeber en ellas según se detalla en [Ric63].

Teorema 1.5.17. *Sea S una superficie conexa sin frontera combinatoria, es decir $\partial S = 0$. Entonces existe un embebimiento $e : S \rightarrow \mathbb{S}_\Sigma^2$ para alguna colección de círculos Σ tal que $\mathbb{S}_\Sigma^2 \setminus e(S)$ es totalmente desconexo (esto es, cada una de sus componentes conexas consta sólo de un punto) y no interseca a ninguno de los círculos $[\sigma] = \{[x] : x \in \sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$.*

Además, para cada $\epsilon > 0$ la distancia máxima de los puntos de los círculos $[\sigma]$ a $\mathbb{S}_\Sigma^2 \setminus e(S)$ es menor que ϵ (excepto como mucho para un número finito de círculos).

Capítulo 2

Órbitas no recurrentes en superficies

2.1. Introducción

En este capítulo nos centramos en el estudio de los conjuntos ω -límite generados por órbitas no recurrentes de flujos definidos sobre superficies. Es decir, dado un flujo continuo Φ definido sobre una superficie S ,

$$\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S,$$

daremos una caracterización topológica del conjunto $\omega_\Phi(x)$ cuando $x \in S$ es un punto tal que $x \notin \omega_\Phi(x)$. Esta introducción sigue parcialmente las comunicaciones [Sol01c] y [Sol03b].

Hasta ahora sólo hemos visto que el conjunto $\omega_\Phi(x)$ es un subconjunto no vacío compacto y conexo de S si S es una superficie compacta. Además estas propiedades no tienen por qué ser satisfechas en el caso que S no sea compacta. Un ejemplo sencillo de esto se obtiene para $S = \mathbb{R}^2$ y la ecuación diferencial autónoma

$$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Ésta define un flujo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\omega_\Psi((x, y)) = \emptyset$ para cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (véase la figura 2.1.1).

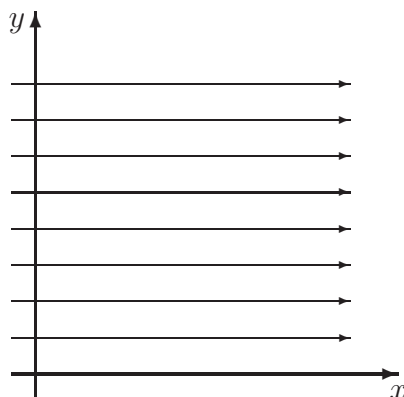


Figura 2.1: Dibujo de las órbitas del flujo definido por la ecuación diferencial 2.1.1

2.1.1. Primera descripción del conjunto ω -límite: aproximación de Poincaré y Bendixson

El primer resultado importante sobre el conjunto ω -límite en superficies se debe a Poincaré y Bendixson que establecieron separadamente diferentes versiones del célebre teorema de Poincaré-Bendixson. Exponemos aquí una versión ligeramente más general a la probada por los citados autores.

Teorema 2.1.1 (Poincaré-Bendixson). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un flujo continuo y $u \in \mathbb{S}^2$ tal que $\omega_\Phi(u)$ no contiene puntos singulares. Entonces $\omega_\Phi(u)$ es una curva de Jordan.*

Demostración. Como hemos comentado esta versión es más general que las probadas por Poincaré y Bendixson. A este respecto conviene notar que la primera prueba de una versión de este teorema se debe a Henri Poincaré (1854-1912), quien en [Poi85] probó el teorema para flujos derivados de ecuaciones diferenciales definidas por campos de vectores analíticos.

Es justo también que el teorema lleve el nombre de Bendixson, pues dieciséis años más tarde Ivar Otto Bendixson (1861-1935) probó el mismo resultado, esta vez para flujos definidos por las soluciones de una ecuación diferencial autónoma definida por un campo de vectores de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 , ver [Ben01].

La versión enunciada se sigue de la clásica aplicando un teorema de C. Gutiérrez que asegura que cualquier flujo continuo sobre \mathbb{S}^2 es topológicamente equivalente a

un flujo de clase C^∞ , ver [Gut86]. No obstante la primera prueba de este resultado se debe a O. Hajek que la obtuvo en [Haj68]. \square



Jules Henri Poincaré
1854-1912



Ivar Otto Bendixson
1861-1935

El teorema de Poincaré-Bendixson se generalizó mucho más tarde por A. Schwartz para flujos de clase C^2 definidos sobre superficies compactas y conexas. En cuanto a flujos de clase C^1 la generalización no es posible como puso de manifiesto ya A. Denjoy en 1932. Este autor construyó en [Den32] un flujo de clase C^1 sobre \mathbb{T}^2 , sin puntos singulares ni órbitas cerradas.

Teorema 2.1.2 (Schwartz). *Sea S una superficie compacta y conexa, sea $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo de clase C^2 y $x \in S$. Si $\omega_\Phi(x) \cap \text{Sing}(\Phi) = \emptyset$ entonces $\omega_\Phi(x)$ es una órbita cerrada o toda la superficie S . En este último caso se tiene que $S = \mathbb{T}^2$.*

Demostración. La prueba completa de este resultado puede encontrarse en el artículo original de A. J. Schwartz [Sch63] y también en [Sol01b, capítulo 2]. \square

Aunque el teorema de Poincaré-Bendixson se ha generalizado, conviene notar que la generalización no es la directa del enunciado que hemos dado en el caso de la esfera para flujos continuos. Es decir, la generalización se ha hecho teniendo que admitir muchas excepciones ya que los flujos son ahora de clase C^2 . Por otro lado también existe una excepción a la generalización directa a clase C^2 , cuando el espacio de fases que manejamos es \mathbb{T}^2 . Sin embargo, en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 y en la botella de Klein la generalización directa del teorema 2.1.1 funciona. Antes de establecer esta generalización necesitamos algunos resultados técnicos, también será necesario recordar que no existen órbitas recurrentes no triviales ni en la esfera, ni en el plano proyectivo ni en la botella de Klein (ver teorema 1.4.6).

Teorema 2.1.3 (Gutiérrez). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo definido sobre una superficie compacta S . Entonces existe un flujo de clase C^1 $\Psi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ topológicamente equivalente a Φ y además se tiene que las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Cualquier conjunto minimal de Φ es trivial.*
2. *Φ es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^2 .*
3. *Φ es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^∞ .*

Demostración. La prueba de este teorema, larga y bastante complicada, se puede seguir en el artículo [Gut86]. □

Ahora estamos preparados para extender el teorema de Schwartz en los casos concretos del plano proyectivo y la botella de Klein.

Teorema 2.1.4 (Poincaré-Bendixson para \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2). *Sea S igual \mathbb{P}^2 o a \mathbb{B}^2 , sea $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo y $x \in S$. Si $\omega_\Phi(x) \cap \text{Sing}(\Phi) = \emptyset$ entonces $\omega_\Phi(x)$ es una órbita cerrada.*

Demostración. Para la prueba de este resultado sólo es necesario tener en cuenta que cualquier flujo continuo sobre S es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^∞ (usando simultáneamente los teoremas 2.1.3 y 1.4.6). Finalmente se aplica el teorema de Schwartz y se obtiene el resultado. □

2.1.2. Caracterizaciones topológicas del conjunto ω -límite. Un resumen de resultados

Nuestro trabajo va principalmente encaminado a desvelar la estructura topológica de los conjuntos ω -límites en todas las superficies y el mayor número posible de variedades. El teorema de Poincaré-Bendixson describe este conjunto en un caso muy concreto, cuando no contiene puntos singulares. La extensión de Schwartz tiene incluso más restricciones.

La primera caracterización topológica completa del conjunto ω -límite en la esfera la obtuvo R. E. Vinograd en 1952, que estableció el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 (Vinograd, [Vin52]). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un flujo continuo y sea $u \in \mathbb{S}^2$. Entonces $\omega_\Phi(u)$ es la frontera de una región simplemente conexa O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$.*

Recíprocamente, si Ω es la frontera de una región simplemente conexa, $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$, entonces existe un flujo suave $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y un punto $u \in \mathbb{S}^2$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.

Este teorema fue mejorado en 1998 por F. Balibrea y V. Jiménez que acompañaron a la estructura topológica del conjunto ω -límite la estructura dinámica. Introducimos brevemente el teorema y la notación necesaria para enunciarlo.

Definición 2.1.6 (conjunto realizable). Sea $1 \leq k \leq +\infty$ y $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_{i \in I}$ una familia de pares tales que:

1. Los Γ_i son curvas de \mathbb{S}^2 , disjuntas dos a dos y están parametrizadas por una aplicación φ_i de clase C^k (estas curvas pueden ser tanto arcos abiertos como curvas de Jordan).
2. Los o_i marcan una de las dos orientaciones posibles de la curva Γ_i , en concreto la inducida por φ_i , que denotaremos también por $[\varphi_i]$.

Sea $S \subset \mathbb{S}^2$ un conjunto disjunto de $\bigcup_i \Gamma_{i \in I}$ y definamos $\Omega := S \cup (\bigcup_{i \in I} \Gamma_i)$.

Diremos que (\mathcal{G}, S) es un conjunto realizable de clase k si existe un abierto O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$, simplemente conexo y que satisface las siguientes condiciones:

1. $\Omega = \text{Bd } O$.
2. Cada curva Γ_i es abierta en Ω y está incluida en $\text{Bd}(\mathbb{R}_\infty^2 \setminus (O \cup \Omega))$.
3. (\mathcal{G}, S) tiene una orientación compatible respecto a O . Esto quiere decir que si $x = \varphi_i(t) \in \Gamma_i$, $y = \varphi_j(t') \in \Gamma_j$ y ε es un real positivo arbitrario suficientemente pequeño, entonces o bien $x + \varepsilon \mathbf{N}\varphi'_i(t)$, $y + \varepsilon \mathbf{N}\varphi'_j(t')$ ¹ pertenecen los dos a O , o bien, $x - \varepsilon \mathbf{N}\varphi'_i(t)$, $y - \varepsilon \mathbf{N}\varphi'_j(t')$ están los dos en O^c .

¹**Nota por eliminar:** Aquí hay que modificar esta definición porque estos vectores no están en \mathbb{S}^2

² Para un vector v tangente a \mathbb{S}^2 , $\mathbf{N}v$ denota un vector normal a v de manera que $\{v, \mathbf{N}v\}$ es una base positivamente orientada

Teorema 2.1.7 (Balibrea Gallego & Jiménez López, [BJ98]). Dado $1 \leq k \leq +\infty$, entonces se verifican los siguientes apartados:

1. Si $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un flujo de clase C^k y $x \in \mathbb{S}^2$, entonces existe una familia $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ de órbitas de Φ y un conjunto $S \subset \text{Sing}(\Phi)$ tales que (\mathcal{G}, S) es un conjunto realizable de clase k , siendo $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, [\varphi_i])\}_{i \in I}$, con cada φ_i la parametrización de Γ_i inducida por Φ . Además $\omega_\Phi(x) = S \cup \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$.
2. Sea (\mathcal{G}, S) un conjunto realizable de clase k con $\mathcal{G} = \{(\Gamma_i, o_i)\}_i$. Entonces existe un flujo de clase C^k , $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, y un punto $x \in \mathbb{S}^2$ tales que: para todo $i \in I$, Γ_i es una órbita de Φ y la orientación o_i coincide con la inducida por Φ sobre Γ_i , $S \subset \text{Sing}(\Phi)$ y $\omega_\Phi(x) = S \cup (\bigcup_{i \in I} \Gamma_i)$.

Sorprendentemente, en el resto de superficies no se han dado otras caracterizaciones topológicas similares a la de Vinograd hasta hace poco. Es más, D. V. Anosov propuso estudiar este problema para el plano proyectivo ([Ano95] y [NZ99, p. 39]). El mismo Anosov recalcó que el resultado de Vinograd no es válido en los mismos términos para \mathbb{P}^2 . En efecto, en la figura 2.1.2 mostramos un subconjunto de \mathbb{P}^2 (la unión de las fronteras de las regiones A , B y C) que no es la frontera de ninguna región simplemente conexa ya que O incluye curvas de Jordan no homotópicamente nulas. Sin embargo el conjunto dibujados sí que es el conjunto ω -límite de the órbita γ esbozada para un flujo apropiado definido sobre \mathbb{P}^2 .

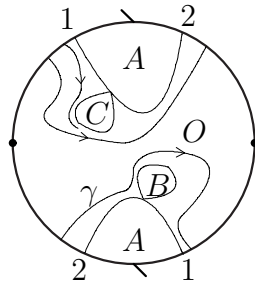


Figura 2.2: Un contraejemplo al teorema de Vinograd en el plano proyectivo

En el artículo [JS01] respondimos al problema propuesto por Anosov. Además de este resultado, en este capítulo vamos a dar un teorema que caracteriza el conjunto ω -límite de órbitas no recurrentes para flujos definidos sobre cualquier superficie compacta y conexa. Si recordamos que \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 son las únicas superficies compactas y conexas que no admiten flujos con órbitas recurrentes no triviales (ver teorema

1.4.6) entonces, para ellas, nuestro teorema caracteriza totalmente los conjuntos ω -límite. Las pruebas de esta caracterización se pueden seguir en [JS01], [Sol03a] y [JS04a]. En el primero probamos el resultado para \mathbb{P}^2 , en el segundo para la botella de Klein y en el tercero para cualquier superficie compacta y conexa. Además pondremos de manifiesto que la generalización directa de la caracterización, para cualquier superficie, no es cierta.

2.2. Lemas técnicos

Dedicamos esta sección a presentar algunos resultados que serán de gran utilidad a la hora de probar la caracterización topológica de los conjuntos ω -límite.

Lema 2.2.1. *Sea $O \subsetneq \mathbb{P}^2$ una región que no contiene curvas de Jordan no orientables, entonces O es homeomorfa a una región $A \subsetneq \mathbb{S}^2$.*

Además si O tiene complementario conexo entonces A es simplemente conexo.

Demostración. Para esta demostración veremos el plano proyectivo como el espacio cociente \mathbb{S}^2 / \sim , donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = -y$. Denotaremos por $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ a la aplicación cociente.

El primer paso de la demostración consiste en ver que p es una aplicación biyectiva entre cada una de las componentes conexas de $p^{-1}(O)$ y O . Denotaremos por A a una de dichas componentes, la otra será $-A$, donde entendemos que $-Z = \{-u : u \in Z\}$ para cada $Z \subset \mathbb{S}^2$.

Empezamos probando que $p|_A$ es inyectiva. Supongamos que no, entonces es posible encontrar puntos u y $-u$ ambos en A . Construyamos un arco $C \subset A$ que tenga como extremos a u y $-u$. No es restrictivo suponer que el arco C no contiene ningún otro par de puntos antipodales (en otro caso se toma un arco abierto $D \subset C$ que no tenga tales pares y se incluye en un arco maximal $E \subset C$ con la misma propiedad y se reemplaza C por la clausura de E). Además podemos asumir que hay un homeomorfismo $h : [0, 1] \times (0, 1) \rightarrow U \subset A$ tal que $h([0, 1] \times \{1/2\}) = C$ y $h(0, t) = -h(1, 1 - t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Entonces $p(C)$ es una curva de Jordan en O que tiene a $p(U)$, como un entorno homeomorfo a una banda de Möbius. Por lo tanto $p(C)$ es no orientable y esto es una contradicción que viene de suponer que $p|_A$ no es inyectiva.

Probamos ahora que $p(A) = O$. En otro caso existirá un punto $b \in p(A)$ tal que $b \in \text{Bd } p(A) \cap O$ ya que O es conexo. Puesto que A es abierto y p es una aplicación abierta, entonces $p(A)$ es un abierto y $b \notin p(A)$. Tomemos una sucesión $(v_n)_n$ de puntos de $p(A)$ que convergen a b y puntos u_n en A con $p(u_n) = v_n$. No es restrictivo suponer que $(u_n)_n$ converge, digamos a a . Como $p(a) = b$, a no pertenece a A . Ahora es suficiente tomar un entorno conexo suficientemente pequeño, U de a , y observar que $p(A \cup U) \subset O$, lo que contradice la definición de A . Esto concluye la demostración de la primera parte del lema.

Probamos seguidamente que A es simplemente conexo si O lo es. Antes de demostrar esta parte recordamos que, puesto que $A \subset \mathbb{S}^2$, A es simplemente conexo si y sólo si A es conexo con complementario conexo. Como ya sabemos que A es conexo, veamos que $\mathbb{S}^2 \setminus A$ es conexo procediendo por reducción al absurdo.

Tomamos conjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos C_1 y C_2 con $\mathbb{S}^2 \setminus A = C_1 \cup C_2$. Como $-A$ es conexo podemos asumir que $-A \subset C_2$. Al ser $A \cup C_1$ abierto, $D := C_2 \cap (\mathbb{S}^2 \setminus ((-A) \cup (-C_1)))$ será cerrado y también $p(C_1)$ y $p(D)$. Además $p(C_1) \cap p(D) = \emptyset$ y es fácil comprobar que $p(C_1 \cup D) = \mathbb{P}^2 \setminus p(A) = \mathbb{P}^2 \setminus O$.

Por la hipótesis y la igualdad anterior tenemos que $p(C_1 \cup D)$ es conexo. Entonces $D = \emptyset$ y $C_2 \subset (-A) \cup (-C_1)$. De aquí se tiene $\mathbb{S}^2 = (A \cup C_1) \cup ((-A) \cup (-C_1))$. Además, como $-A \subset C_2$ entonces $(-A) \cap C_1 = \emptyset$ y $(A \cup C_1) \cap ((-A) \cup (-C_1)) = C_1 \cap (-C_1)$ es a la vez abierto y cerrado por lo que $A \cup C_1$ y $(-A) \cup (-C_1)$ son disjuntos. Al ser \mathbb{S}^2 conexa llegamos a una contradicción.

□

Teorema 2.2.2. *Sea S una superficie compacta y conexa y O una región tal que $\emptyset \subsetneq O \subset S$. Entonces O es simplemente conexo si y sólo si o bien $O = S \cong \mathbb{S}^2$ o $O \cong \mathbb{S}_*^2$.*

Demostración. La parte “si” del enunciado es evidente. La parte “sólo si” también es bien conocida para $S = \mathbb{S}^2$. Lo probaremos para el resto de superficies.

Si $S \cong \mathbb{P}^2$ y O es una región que sólo contiene curvas de Jordan orientables entonces O es homeomorfo a una región $U \subsetneq \mathbb{S}^2$ por el lema 2.2.1. Usando el resultado para $S = \mathbb{S}^2$ se obtiene para $S \cong \mathbb{P}^2$.

Si $S \not\cong \mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2$ usaremos la existencia de una *aplicación recubridora* $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, que es una aplicación continua y sobreyectiva tal que, para cada $u \in S$, hay un entorno abierto O_u de u tal que O_u y cada una de las componentes conexas de

$\pi^{-1}(O_u)$ son homeomorfas (ver [Knu71]). Denotamos por U a una componente de $\pi^{-1}(O)$ y probamos que $q = \pi|_U : U \rightarrow O$ es un homeomorfismo y entonces el resultado quedará demostrado por ser cierto para $S = \mathbb{S}^2$.

Para empezar vemos que q es sobreyectiva por reducción al absurdo. Puesto que q es un homeomorfismo local y U es abierto, $q(U)$ es también abierto. Entonces, si q no es sobreyectiva, $O \setminus q(U) \neq \emptyset$ y existe un punto $u \in \text{Bd}(q(U)) \cap O$. Tomemos ahora $O_u \subset O$ y tenemos en cuenta que al menos una de las componentes conexas de $\pi^{-1}(O_u)$, que denotaremos por V_u , debe intersectar a U .

Fijemos $V = U \cup V_u$ y observemos que V es conexo y $V \subset \pi^{-1}(O)$, con lo que llegamos a una contradicción con la definición de U y por lo tanto q es sobreyectiva. Ahora tenemos que $q : U \rightarrow O$ es una aplicación recubridora y como U es conexo por arcos y O es simplemente conexo, aplicamos el corolario de [dC76b, p. 382] y concluimos que q es un homeomorfismo. \square

Lema 2.2.3. *Sea α una curva de Jordan homotópicamente nula sobre una superficie compacta y conexa S , entonces existe un disco $D \subset S$ tal que $\text{Bd} D = \alpha$ (en particular, cualquier curva homotópicamente nula es orientable).*

Demostración. Tomemos una aplicación recubridora $\pi : E \rightarrow S$ (con $E = \mathbb{S}^2$ o $E = \mathbb{R}^2$ dependiendo de la superficie), esto es, una aplicación continua y sobreyectiva tal que, para cada $x \in S$, hay un entorno abierto O_x de x de manera que O_x y cada una de las componentes de $\pi^{-1}(O_x)$ son homeomorfos.

La existencia de este tipo de aplicaciones sigue por ejemplo de [Knu71]. Además, de acuerdo con [Mun75, Lemma 54.1 y Teorema 54.3], si fijamos un punto $x_0 \in \alpha$, parametrizamos α por algún camino $p : [0, 1] \rightarrow S$ empezando en x_0 , y tomamos $e_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$, entonces existe un único camino homotópicamente nulo $q : [0, 1] \rightarrow E$, empezando en e_0 y que es un *levantamiento* de p , esto es, $\pi \circ q = p$.

Usando que π es una aplicación recubridora se puede demostrar:

1. $\beta := q([0, 1])$ es una curva de Jordan.
2. $\pi^{-1}(\alpha)$ es una unión de curvas de Jordan dos a dos disjuntas.
3. Una de tales curvas (se puede considerar que es β) encierra un disco cerrado B que la tiene como frontera y que no interseca otra componente de $\pi^{-1}(\alpha)$.

Ahora es suficiente con ver que π es inyectiva en B y tomar $D = \pi(B)$. Asumamos lo contrario y tomemos puntos $a \neq b$ en B con $\pi(a) = \pi(b) =: x_1$. Obsérvese que podemos suponer que a y b están en $\text{Int } B$, por lo que $x_1 \neq x_0$.

Sea u un caminino sobre la superficie S , que empieza en el punto x_1 y acaba en x_0 y sean v_a y v_b los únicos levantamientos que empiezan respectivamente en los puntos a y b (ver de nuevo [Mun75, Lemma 54.1]). Podemos suponer que $u([0, 1])$, $v_a([0, 1])$ y $v_b([0, 1])$ son arcos.

Puesto que ningún punto de $\text{Int } B$ va a parar a α por la aplicación π , tenemos (usando que B es un disco cerrado) que los puntos c y d en los que respectivamente los arcos v_a y v_b empiezan a pertenecer β coinciden, $c = d$. Esto quiere decir que $\bar{v}_a(t) := v_a(1-t)$ y $\bar{v}_b(t) := v_b(1-t)$ son levantamientos diferentes de $\bar{u}(t) := u(1-t)$ empezando en el mismo punto, con lo que se llega a una contradicción con [Mun75, Lemma 54.1]. \square

Acabamos esta sección con un resultado geométrico que nos explica qué pasa cuando le quitamos a una superficie una curva de Jordan.

Lema 2.2.4. *Sea $B \subset S$ una curva de Jordan y sea g el género de S .*

- (i) *Si B es no orientable (por lo tanto $S \cong N_g$) entonces $S \setminus B \cong M_{(g-1)/2,*}$ o $S \setminus B \cong N_{g-1,*}$.*
- (ii) *Si B es orientable y $S \setminus B$ es conexo entonces $S \setminus B \cong M_{g-1,**}$ (si $S \cong M_g$), y $S \setminus B \cong M_{(g-2)/2,**}$ o $S \setminus B \cong N_{g-2,**}$ (si $S \cong N_g$).*
- (iii) *Si B es orientable y no homotópicamente nula y $S \setminus B = O_1 \cup O_2$ para algunos conjuntos abiertos disjuntos O_1 y O_2 . Entonces existen enteros positivos g_1 y g_2 y ocurre una de las dos posibilidades siguientes:*
 1. *Si $S \cong M_g$ entonces $g_1 + g_2 = g$ y $O_i \cong M_{g_i,*}$ para $i = 1, 2$.*
 2. *Si $S \cong N_g$ una de las dos alternativas que siguen se satisfacen:*
 - a) *$2g_1 + g_2 = g$ con $O_1 \cong M_{g_1,*}$ y $O_2 \cong N_{g_2,*}$.*
 - b) *$g_1 + g_2 = g$ con $O_i \cong N_{g_i,*}$, $i = 1, 2$.*

Observación 2.2.1. En el lema anterior se puede ver, por ejemplo, que si $S \cong \mathbb{P}^2$ entonces (ii) y (iii) no se pueden satisfacer y el lema nos dice en este caso concreto que $S \setminus \alpha \cong \mathbb{S}_*^2$. Sin embargo, si $S \cong \mathbb{B}^2$ entonces concluimos que $S \setminus \alpha \cong \mathbb{P}_*^2$ en el caso (i), $S \setminus \alpha \cong \mathbb{S}_{**}^2$ en el caso (ii), y $O_i \cong \mathbb{P}_*^2$, $i = 1, 2$, en el caso (iii).

Demostración. Esta prueba se puede encontrar en [JS04a, Lema 2.4] y generaliza los casos concretos probados en [JS01] y [Sol03a].

Prueba de (i). Podemos suponer, por el teorema de Whitney, que $S \subset \mathbb{R}^4$. Tomamos entornos abiertos U y V de B , homeomorfos a la banda de Möbius y de tal manera que $\text{Cl}V \subset U$. Entonces $U \setminus B \cong \mathbb{S}_{**}^2$ y existe un homeomorfismo $h : U \setminus B \rightarrow \mathbb{O}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $\|h(u)\| \rightarrow 1$ cuando u tiende a B . Ahora se extiende h a una aplicación continua definida sobre toda la superficie $S \setminus B$ de tal forma que $h(u) = (0, 0)$ para cada $u \in S \setminus U$, y se construye una aplicación continua $k : S \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisfaga $k(u) = u$ para cada $u \in S \setminus U$ y $k(u) = (0, 0, 0, 0)$ para los puntos $u \in V \setminus B$. Por último definimos $f : S \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^7$ como $f(u) = (k(u), h(u), \|h(u)\|)$. Entonces $N = f(S \setminus B)$ y $S \setminus B$ son homeomorfos porque f es inyectiva y además se verifica que si $(u_n)_n$ es una sucesión de puntos en $S \setminus B$ que tienden hacia B entonces $(f(u_n))_n$ no posee puntos de acumulación en N .

Únicamente queda por ver que la superficie $M = N \cup (\{(0, 0, 0, 0)\} \times \text{Cl}D \times \{1\})$ es homeomorfa a $M_{(g-1)/2}$ o a N_{g-1} . Para ello se construye una triangulación T_1 sobre S tal que B sólo interseque a vértices y aristas de la triangulación T_1 , transportamos esta triangulación sobre N mediante la aplicación f y entonces se extiende de forma natural a una triangulación T_2 sobre M que tenga un número de caras nuevas igual al doble número de aristas contenidas en B .

Denotemos por Q_i , E_i y X_i a los números de caras, aristas y vértices de la triangulación T_i , $i = 1, 2$, y sea $E_B = X_B$ el número de aristas y vértices de T_1 incluidos en B . Entonces

$$\chi(M) = Q_2 - E_2 + X_2 = (Q_1 + 2E_B) - (E_1 + 3E_B) + (X_1 + E_B + 1) = \chi(S) + 1 = 3 - g.$$

Ahora si $M \cong M_{g'}$ entonces $g' = (g - 1)/2$, mientras que si $M \cong N_{g'}$ entonces $g' = g - 1$. Esto concluye la prueba del apartado (i).

Para probar (ii) y (iii) se procede como en el caso anterior, fijando entornos abiertos U y V de B (ahora homeomorfos a \mathbb{S}_{**}^2) con $\text{Cl}V \subset U$. Decomponemos $U \setminus B$ en sus componentes conexas, U_1 y U_2 , y se fijan homeomorfismos $h_i : U_i \rightarrow D \setminus \{(0, 0)\}$ con $\|h_i(u)\| \rightarrow 1$ cuando u tiende a B . Ahora se extienden simultáneamente h_1 y h_2 a una aplicación continua sobre todo $S \setminus B$ tomando $h(u) = (0, 0)$ para cualquier $u \in S \setminus U$ y $h(u) = h_i(u)$ para todo $u \in U_i$, $i = 1, 2$. Tomemos $\sigma : S \setminus B \rightarrow [-1, 0, 1]$ continua tal que:

$$\sigma(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \in \text{Cl}V \cap U_1, \\ 1 & \text{si } u \in \text{Cl}V \cap U_2, \end{cases}$$

y

$$\sigma(u) \in (-1, 1) \quad \text{si } u \in S \setminus \text{Cl } V.$$

Tomemos también la aplicación $k : S \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^4$ como antes y definamos $f : S \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^7$ por $f(u) = (k(u), h(u), \sigma(u) \|h(u)\|)$, que es un homeomorfismo entre $S \setminus B$ y su imagen $N = f(S \setminus B)$.

Sea ahora $M = N \cup (\{(0, 0, 0, 0)\} \times \text{Cl } D \times \{-1\}) \cup (\{(0, 0, 0, 0)\} \times \text{Cl } D \times \{1\})$ y T_1 una triangulación de S para la que B es una unión de vértices y aristas. Extendámosla a una triangulación T_2 sobre M con tantas veces el número de nuevas caras como el doble del número de aristas contenidas en B . Denotemos por Q_i , E_i y X_i el número de caras, aristas y vértices de la triangulación T_i , $i = 1, 2$, y sea $E_B = X_B$ el número de aristas y vértices de T_1 incluidos en B .

Para probar (ii), asumamos que $S \setminus B$ es conexa. Entonces M también será conexa y tendrá la siguiente característica de Euler

$$\chi(M) = Q_2 - E_2 + X_2 = (Q_1 + 2E_B) - (E_1 + 3E_B) + (X_1 + E_B + 2) = \chi(S) + 2,$$

así que $\chi(M) = 4 - 2g$ si $S \cong M_g$ y $\chi(M) = 4 - g$ si $S \cong N_g$. En el primer caso es fácil ver que M es orientable y entonces $M \cong M_{g-1}$. En el segundo existen dos posibilidades: $M \cong M_{(g-2)/2}$ o $N \cong N_{g-2}$ y por lo tanto (ii) se satisface.

Asumamos por último que $S \setminus B$ no es conexa y, sin pérdida de generalidad, que $U_i \subset O_i$. Sea $M_i = f(O_i) \cup (\{(0, 0, 0, 0)\} \times \text{Cl } D \times \{(-1)^i\})$, $i = 1, 2$.

Sean Q_1^i , E_1^i y X_1^i los números de caras, aristas y vértices de T_1 contenidos en $\text{Cl } O_i$ y sean Q_2^i , E_2^i y X_2^i los números de caras, aristas y vértices de T_2 contenidos en M_i , $i = 1, 2$. Entonces:

$$\begin{aligned} \chi(M_1) + \chi(M_2) &= (Q_2^1 - E_2^1 + X_2^1) + (Q_2^2 - E_2^2 + X_2^2) \\ &= [(Q_1^1 + E_B) - (E_1^1 + E_B) + (X_1^1 + 1)] \\ &\quad + [(Q_1^2 + E_B) - (E_1^2 + E_B) + (X_1^2 + 1)] \\ &= (Q_1^1 + Q_1^2) - (E_1^1 + E_1^2 + E_B) + (X_1^1 + X_1^2 + E_B) + 2 \\ &= \chi(S) + 2 \end{aligned}$$

y siguiendo el mismo tipo de argumentos que hemos hecho antes se concluye la prueba (obsérvese que $\chi(M_j) = 0$ para algún $j \in \{1, 2\}$ no es posible porque B es una curva no homotópicamente nula y entonces no puede encerrar a O_j , que sería homeomorfo al disco). \square

2.3. Teorema de caracterización de conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes sobre superficies compactas y conexas

El problema de caracterizar topológicamente los conjuntos ω -límites de flujos definidos sobre una superficie S es un problema natural que, salvo en el caso de la esfera \mathbb{S}^2 no se había resuelto completamente. Es más D. V. Anosov propuso estudiar este problema en 1995 para el caso particular del plano proyectivo, sin embargo ha quedado olvidado hasta hace muy poco (ver por ejemplo el comentario de Anosov en [Ano95] y también [NZ99, p. 39], donde se propone como un problema abierto).

El propósito de esta sección es extender los trabajos introducidos en la sección 2.1.2 para caracterizar el conjunto ω -límite de órbitas no recurrentes de flujos definidas sobre superficies compactas y conexas. Seguidamente presentamos algunas definiciones necesarias para el resto del capítulo.

Recordamos la noción de anillo regular ya introducida en la sección 1.5.2.

Definición 2.3.1 (anillo regular). Un conjunto abierto O de una superficie S se dice que es un *anillo regular* si es homeomorfo a un anillo y su frontera topológica contiene dos componentes conexas.

Con esta definición vamos a enunciar el teorema de caracterización de conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes para flujos definidos sobre superficies compactas y conexas. Este teorema extiende el teorema de Vinograd para órbitas no recurrentes y para órbitas recurrentes tales que el complementario de su ω -límite sólo posee un número finito de componentes. La prueba que presentamos aquí es una reproducción de la escrita en el artículo [JS04a].

Teorema 2.3.A (Jiménez López-Soler López). *Sea S una superficie compacta y conexa, $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo y $u \in S$. Supongamos que u es un punto no recurrente o que $\text{Int } \omega_\Phi(u) = \emptyset$ y $S \setminus \omega_\Phi(u)$ tiene un número finito de componentes. Entonces $\omega_\Phi(u)$ es una componente de la frontera de un anillo regular de S .*

Recíprocamente, si Ω es una componente de la frontera de un anillo regular de S entonces existe un flujo suave, $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$, y un punto $u \in S$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.

Puesto que \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 son las únicas superficies compactas y conexas que no admiten flujos con órbitas recurrentes no triviales (ver teorema 1.4.6), para ellas nuestro teorema se puede enunciar de una forma más general.

Corolario 2.3.2. *Sea $S = \mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2$ o \mathbb{B}^2 . Un conjunto $\Omega \subset S$ es un conjunto ω -límite para algún flujo sobre S si y sólo si es una componente conexa de la frontera de un anillo regular.*

2.3.1. Prueba de la caracterización de los conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes. Primera parte

Haremos esta primera parte de la prueba del teorema por inducción sobre el género de la superficie S . Cuando $g = 0$ el resultado se obtiene directamente del teorema de Vinograd. Asumamos ahora que el resultado es válido para cualquier superficie de género menor que g . Definimos $W = S \setminus \omega_\Phi(u)$ y la descomponemos en sus componentes conexas $W = \bigcup_{j \in J} W_j$. Si u es un punto no recurrente entonces $\Phi_u(\mathbb{R}) \subset W_m$ para algún valor adecuado de m y es fácil comprobar que $\text{Bd } W_m = \omega_\Phi(u)$. Si u es recurrente entonces, como J es finito, $u \in \text{Bd } W_m$ para algún m . Ahora la continuidad de Φ garantiza que $\Phi_u(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\omega_\Phi(u)$, está incluida en la frontera de W_m . Así que $\text{Bd } W_m = \omega_\Phi(u)$.

Definamos $V := W_m$ y $\Omega := \omega_\Phi(u)$. Ahora distinguimos dos casos: que V sea simplemente conexo y que no lo sea.

Si V es simplemente conexo entonces se aplica el teorema 2.2.2 y el resultado ya estaría demostrado.

Si V no es simplemente conexo entonces debe incluir alguna curva de Jordan no homotópicamente nula α , a la que se le pueda aplicar alguno de los apartados (i), (ii) o (iii) del lemma 2.2.4. Por ejemplo supongamos (los demás casos son similares) que α es orientable y que $S \setminus \alpha = O_1 \cup O_2$ para un par de conjuntos abiertos disjuntos, O_1 y O_2 , y tomemos enteros positivos g_1, g_2 de forma que, $2g_1 + g_2 = g$, con $O_1 \cong M_{g_1, *}$ y $O_2 \cong N_{g_2, *}$. Supongamos que $\Omega \subset O_1$, aquí no es restrictivo asumir (reemplazando si fuera necesario u por otro punto de su semiórbita positiva) que $\Phi_u([0, \infty)) \subset O_1$.

Ahora restringimos Φ al conjunto $A^* = \{(t, v) : t \in I_v^*, v \in O_1\}$ donde I_v^* es el subintervalo más grande de \mathbb{R} con las propiedades $0 \in I$ y $\Phi_v(I) \subset O_1$. Es fácil comprobar que $\Phi^* := \Phi|_{A^*}$ es un flujo local bien definido en O_1 .

Fijemos un punto $z \in M_{g_1}$ y usemos un homeomorfismo $h : O_1 \rightarrow M_{g_1} \setminus \{z\}$ para transportar el flujo local Φ^* sobre un flujo local Ψ^* en $h(O_1)$. Entonces extendemos, usando el teorema 1.3.A, el flujo local Ψ^* a un flujo $\Psi : \mathbb{R} \times M_{g_1} \rightarrow M_{g_1}$ y hacemos notar que puesto que Ψ^* y Φ^* son topológicamente equivalentes se tiene que

$\omega_\Psi(h(u)) = h(\Omega)$. Además, si u es recurrente para Φ y $S \setminus \Omega$ es un conjunto denso en S que tiene un número finito de componentes, entonces $h(u)$ es recurrente para Ψ y $M_{g_1} \setminus h(\Omega)$ es denso en M_{g_1} y tiene un número finito de componentes. Apliquemos la hipótesis de inducción para fijar un anillo regular C en M_{g_1} teniendo a $h(\Omega)$ como una de las componentes de su frontera. Si fuera necesario se puede modificar C para asegurar que $z \notin \text{Cl } C$. Por lo tanto $h^{-1}(C)$ es un anillo regular de S que tiene a Ω como una de las componentes de su frontera.

2.3.2. Prueba de la caracterización del conjunto ω -límite de órbitas no recurrentes. Segunda parte

Ahora probamos la segunda parte del teorema. Pongamos que Ω es una de las componentes de $\text{Bd } O$ para algún anillo regular $O \subset S$. Usando el teorema 1.5.3 hay un difeomorfismo $h : D \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow O$ que, puesto que O es regular, podemos asumir con la propiedad adicional: $\text{Bd } h(D \setminus \text{Cl } D_{1/2})$ interseca a $\text{Bd } O$ exactamente en Ω ($D_{1/2}$ denota el disco centrado en el origen de radio $1/2$). Usando coordenadas polares es fácil definir un campo suave de vectores en \mathbb{R}^2 cuyo flujo asociado Ψ tiene exactamente dos órbitas periódicas que son los círculos de radios $1/2$ y 1 y tal que todas las órbitas entre ambos círculos tienden describiendo una espiral hacia el círculo de radio unidad.

La restricción de Ψ a $\mathbb{R} \times D \setminus \text{Cl } D_{1/2}$ es también un flujo que se puede transportar con la aplicación h sobre un flujo suave definido en $O^* := h(D \setminus \text{Cl } D_{1/2})$. Extendámoslo a un flujo suave Φ sobre toda la superficie S con el teorema 1.3.A.

Debemos probar que $\Omega = \omega_\Phi(u)$ para algún $u \in O^*$. Para esto, sea $\Omega^* \subset \Omega$ el conjunto de puntos v para el que hay un arco cerrado γ_v (es decir, un conjunto homeomorfo a $[0, 1]$) que tiene a v como uno de sus extremos y tal que $\gamma_v \setminus \{v\} \subset O^*$. No es difícil ver que si $u \in O^*$ y $v \in \Omega^*$ entonces su semiórbita positiva $\Phi_u([0, \infty))$ interseca γ_v tan cerca de v como se quiera, así que $\Omega^* \subset \omega_\Phi(u)$. Debido a que Ω^* es denso en Ω (ver [Bur79, Ejercicio 2.1, p. 25]) obtenemos que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.

2.4. El plano proyectivo

En la sección precedente hemos probado una caracterización topológica de los conjuntos ω -límite generados por órbitas no recurrentes para flujos definidos sobre

superficies compactas y conexas.

Ya hemos recalado antes que esta caracterización supone una caracterización completa de los conjuntos ω -límite para \mathbb{P}^2 , \mathbb{S}^2 y \mathbb{B}^2 . En estos casos el teorema se podía describir en los siguientes términos.

Teorema 2.4.A. *Sea $S = \mathbb{S}^2$, \mathbb{P}^2 o \mathbb{B}^2 . Un conjunto $\Omega \subset S$ es un conjunto ω -límite para algún flujo sobre S si y sólo si es una componente de la frontera de un anillo regular.*

Sin embargo, antes de obtener los resultados para superficies compactas y conexas obtuvimos algunas caracterizaciones alternativas a la anterior para el caso del plano proyectivo y la botella de Klein. Además en el caso del plano proyectivo la caracterización citada se aproxima mucho a la de Vinograd para la esfera como veremos (ver teorema 2.1.5). Anosov hizo notar que la misma caracterización de Vinograd no es válida para el plano proyectivo como hemos visto en la sección 2.1.2, pero, debido a que las regiones simplemente conexas en \mathbb{S}^2 son las regiones conexas con complementario conexo, el siguiente teorema y el de Vinograd admiten una formulación análoga, respondiendo por lo tanto al problema planteado por Anosov.

Teorema 2.4.B (Jiménez López-Soler López). *Sea Φ un flujo continuo definido sobre \mathbb{P}^2 y sea $u \in \mathbb{P}^2$. Entonces $\omega_\Phi(u)$ es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{P}^2$, que tiene complementario conexo.*

Recíprocamente, si Ω es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{P}^2$, que tiene complementario conexo, entonces existe un flujo suave Φ sobre \mathbb{P}^2 y un punto $u \in \mathbb{P}^2$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.

La demostración sigue esencialmente la presentada en el artículo [JS01]. Antes de entrar en los detalles introducimos un poco de notación y un lema.

En lo que sigue es conveniente ver el plano proyectivo \mathbb{P}^2 de alguna de las dos formas siguientes:

1. El espacio cociente \mathbb{S}^2 / \sim , donde $u \sim u'$ si y sólo si $u = -u'$. Denotamos la clase de equivalencia del punto u por $[u]$ y $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ denotará la aplicación cociente.
2. Una subvariedad de \mathbb{R}^4 , como por ejemplo la imagen de la esfera \mathbb{S}^2 bajo la aplicación $f(x, y, z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$.

El siguiente lema es un caso concreto del lemma 2.2.4, aunque en una versión diferenciable que se obtiene aplicando además el teorema 1.5.3.

Lema 2.4.1. *Sea $\delta \subset \mathbb{P}^2$ una curva de Jordan no orientable. Entonces $\mathbb{P}^2 \setminus \delta$ es difeomorfo a un disco abierto.*

2.4.1. Prueba de la caracterización de los conjuntos ω -límite sobre el plano proyectivo. Primera parte

Esta parte de la prueba es bastante sencilla, empezaremos fijando la notación $\gamma = \Phi_u(\mathbb{R})$. Si γ es un punto singular o la imagen de una órbita periódica entonces $\mathbb{P}^2 \setminus \gamma$ tendrá una o dos componentes, cada una de las cuales tiene a γ como su frontera, con lo que el teorema se verifica en este primer caso.

Ahora asumimos que no estamos ante ninguno de los casos anteriores, es decir u no es un punto singular ni pertenece a una órbita periódica. Denotemos $W = \mathbb{P}^2 \setminus \omega_\Phi(u)$ y descompongámoslo en sus componentes conexas $W = \bigcup_{j \in J} W_j$. Puesto que $\omega_\Phi(u) \cap \gamma = \emptyset$ ya que no existen recurrencias no triviales en el plano proyectivo, teorema 1.4.6, existirá una componente W_k tal que $V := W_k \supset \gamma$. Probaremos ahora que $\text{Bd } V = \omega_\Phi(u)$ y $\mathbb{P}^2 \setminus V$ es conexo.

Asumamos que $\mathbb{P}^2 \setminus V = \omega_\Phi(u) \cup \bigcup_{j \neq k, j \in J} W_j$ no es conexo. Entonces $\mathbb{P}^2 \setminus V = C \cup B$ con $C \neq \emptyset \neq B$ y $\text{Cl } C \cap B = C \cap \text{Cl } B = \emptyset$, y cada uno de los conjuntos W_j y $\omega_\Phi(u)$ deben estar incluidos o en B o en C . Pongamos $B = (\bigcup_{j \in J_1} W_j) \cup \omega_\Phi(u)$ y $C = \bigcup_{j \in J_2} W_j$ donde $k \notin J_1 \cup J_2$ y $J_1 \cup J_2 \cup \{k\} = J$. Como $\text{Bd } W_j \subset \omega_\Phi(u)$ para cada $j \in J_2$ y $\text{Cl } C \cap B = \emptyset$, se llega a una contradicción.

Debemos probar ahora que $\text{Bd } V = \omega_\Phi(u)$. Puesto que $\gamma \subset V$ y $\omega_\Phi(u) \cap V = \emptyset$ se tiene $\omega_\Phi(u) \subset \text{Bd } V$. Recíprocamente, $\text{Bd } V = \text{Bd } W_k = \text{Cl } W_k \setminus W_k \subset (W_k \cup \omega_\Phi(u)) \setminus W_k = \omega_\Phi(u)$. Esto concluye la prueba de la primera parte del teorema.

2.4.2. Prueba de la caracterización del conjunto ω -límite en el plano proyectivo. Segunda parte

En esta parte de la prueba se necesita distinguir dos casos:

1. O incluye una curva de Jordan no orientable δ .
2. O incluye sólo curvas de Jordan orientables.

Procedamos a probar el teorema suponiendo que estamos en el primer caso, es decir el conjunto O incluye una curva de Jordan no orientable δ . Usemos el lema 2.4.1 para construir un embebimiento $i : \mathbb{P}^2 \setminus \delta \rightarrow \mathbb{S}^2$ y tomemos $S = \mathbb{S}^2 \setminus i(\mathbb{P}^2 \setminus \delta)$.

Puesto que δ no es orientable, existe un entorno $U \subset O$ de δ tal que $U \setminus \delta$ es conexo. Por lo tanto $O \setminus \delta$ es conexo y también lo son $i(O \setminus \delta)$ y $V = i(O \setminus \delta) \cup S$. Como $\mathbb{P}^2 \setminus O$ es conexo, $i(\mathbb{P}^2 \setminus O) = \mathbb{S}^2 \setminus V$ también será conexo.

Así que como V y $\mathbb{S}^2 \setminus V$ son conexos V es simplemente conexo y podemos usar el teorema de Vinograd para construir un flujo suave $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que tenga a $\text{Bd } V$ como el conjunto ω -límite de una de sus órbitas.

Sea $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo suave de vectores asociado a Ψ . Multipliquemos F por una función escalar suave adecuada λ tal que el nuevo campo de vectores $F_1 = \lambda F$ sea igual a F sobre un entorno de $\text{Bd}(V)$ e igual a al vector cero sobre un conjunto abierto que contenga a S . Si Ψ_1 es el flujo asociado a F_1 entonces $\text{Bd } V$ es todavía uno de sus conjuntos ω -límites pero ahora la restricción $\Psi_1|_{\mathbb{R} \times (\mathbb{S}^2 \setminus S)}$ es también un flujo sobre $\mathbb{S}^2 \setminus S$.

Ahora el flujo Φ_1 que se obtiene de la composición:

$$\Phi_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{P}^2 \setminus \delta) \xrightarrow{\text{Id} \times i} \mathbb{R} \times (\mathbb{S}^2 \setminus S) \xrightarrow{\Psi_1} \mathbb{S}^2 \setminus S \xrightarrow{i^{-1}} \mathbb{P}^2 \setminus \delta,$$

es un flujo suave definido sobre $\mathbb{P}^2 \setminus \delta$ que tiene $i^{-1}(\text{Bd } V) = \text{Bd } O = \Omega$ como uno de sus conjuntos ω -límites. Como $\Phi_1(t, u) = u$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y u en un entorno de δ , Φ_1 se puede extender trivialmente a un flujo suave definido sobre \mathbb{P}^2 de manera que tenga a Ω como un conjunto ω -límite. Esto termina la prueba en el caso 1.

Hagamos ahora la prueba del segundo caso, es decir, suponiendo que dentro de O no hay ninguna curva de Jordan no orientable. Usamos el lema 2.2.1 y obtenemos que O y una de las componentes conexas de $p^{-1}(O)$, digamos A , son homeomorfos. Además A es simplemente conexo.

Como A es simplemente conexo, se puede razonar como en [BJ98] para construir un flujo suave $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ anulándose fuera de A y de manera que su flujo asociado posee una órbita en A que tiene a $\text{Bd } A$ como su conjunto ω -límite. Definimos $G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $G(u) = F(u) - F(-u)$. Nótese que este campo de vectores nuevo coincide con F sobre A y tiene la propiedad adicional que su flujo asociado Ψ satisface $\Psi(t, u) = -\Psi(t, -u)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{S}^2$.

Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definido por $\Phi(t, [u]) = [\Psi(t, u)]$. Es fácil comprobar que Φ es un flujo suave definido sobre \mathbb{P}^2 . Tomemos un punto apropiado $u_0 \in A$ tal que

$\text{Bd } A = \omega_\Psi(u_0)$. Ahora se tiene claramente que $\Omega = \omega_\Phi([u_0])$, lo que acaba la prueba.

2.4.3. El caso de la botella de Klein

Nótese que los teoremas 2.4.B y de Vinograd dan caracterizaciones de los conjuntos ω -límite sobre \mathbb{P}^2 y \mathbb{S}^2 alternativas a las del teorema 2.3.A. En el caso de la botella de Klein también se obtuvo con anterioridad a la caracterización del teorema 2.3.A una descripción topológica alternativa del conjunto ω -límite. Sin embargo la formulación es más complicada.

La figura 2.3 muestra una región O con complementario conexo sobre la botella de Klein, pero que obviamente no puede ser un conjunto ω -límite, puesto que una órbita que se aproxime al punto u no se puede acercar al punto v a menos que tenga puntos de acumulación fuera de la frontera de O . Dicho de otro modo, el teorema anterior del plano proyectivo no vale para el caso de la botella de Klein, con la misma figura se puede observar que el de Vinograd tampoco es válido en \mathbb{B}^2 .

El objetivo de este apartado es presentar la caracterización mencionada del conjunto ω -límite para la botella de Klein y que se publicó en [Sol03a]. Pasemos pues a introducir la notación necesaria y el teorema.

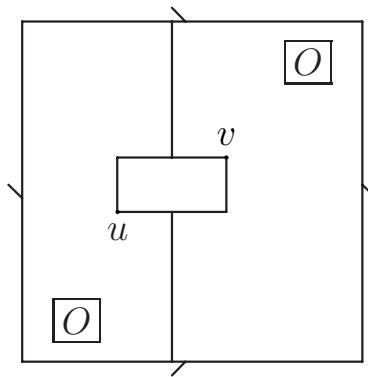


Figura 2.3: Una región en \mathbb{B}^2 con complementario conexo y cuya frontera no es un conjunto ω -límite

Definición 2.4.2 (conjunto admisible). Un conjunto O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{B}^2$, se dice

admissible si es un conjunto abierto conexo con complementario conexo tal que una de las dos alternativas siguientes ocurre:

1. O no contiene curvas de Jordan no homotópicamente nulas.
2. Si $\beta \subset O$ es una curva de Jordan no homotópicamente nula entonces $\text{Bd } O$ está dentro de la frontera de una de las componentes de $O \setminus \beta$.

Teorema 2.4.C. 1. *Dado un flujo continuo sobre \mathbb{B}^2 , $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$, y dado $u \in \mathbb{B}^2$ entonces $\omega_\Phi(u)$ es la frontera de un conjunto admisible en \mathbb{B}^2 .*

2. *Recíprocamente, si Ω es la frontera de un conjunto admisible O , entonces existe un flujo suave $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ y $u \in O$ con $\Omega = \omega_\Phi(u)$.*

Antes de pasar a la prueba introducimos el enunciado de dos lemas que son necesarios en la prueba, estos dos lemas no son más que casos concretos del lema 2.2.4. Aunque aquí están enunciados en una versión diferenciable que se obtiene aplicando el teorema 1.5.3.

Lema 2.4.3. *Sea $\beta \subset \mathbb{B}^2$ una curva de Jordan no orientable. Entonces $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ es difeomorfa a $\mathbb{P}^2 \setminus \text{Cl } D$, donde D es un disco abierto.*

Lema 2.4.4. *Sea $\beta \subset \mathbb{B}^2$ una curva de Jordan no homotópicamente nula. Entonces ocurre una de las dos alternativas:*

1. $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ es conexo y difeomorfo a $\mathbb{S}^2 \setminus (\text{Cl } D_1 \cup \text{Cl } D_2)$, donde D_1 y D_2 son discos abiertos disjuntos.
2. $\mathbb{B}^2 \setminus \beta = O_1 \cup O_2$ con $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y existen embebimientos $f_i : O_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ con $\mathbb{P}^2 \setminus f_i(O_i) = \text{Cl } D_i$ donde D_i es un disco abierto, $i = 1, 2$.

En lo que queda de capítulo denotaremos por \mathcal{G} al grupo de transformaciones $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ generado por $S(x, y) = (x + 1, -y)$ y por $T(x, y) = (x, y + 1)$. Entonces la botella de Klein puede ser vista tanto como un subconjunto de \mathbb{R}^4 o como el espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim donde dos puntos $u, v \in \mathbb{R}^2$ son equivalentes, $u \sim v$, si y sólo si existe $F \in \mathcal{G}$ tal que $F(u) = v$. La aplicación $p : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{B}^2$ denotará la aplicación cociente definida por $p(x) = [x]_{\sim}$.

Prueba de la primera parte del teorema 2.4.C

Si la órbita asociada a u es una curva de Jordan o un punto singular la prueba es bastante sencilla. Por lo que asumiremos que la órbita de u es diferente de una curva de Jordan y de un punto singular y puesto que \mathbb{B}^2 no admite recurrencias no triviales tendremos que $\Phi_u(\mathbb{R}) \cap \omega_\Phi(u) = \emptyset$. Descomponemos ahora $U := \mathbb{B}^2 \setminus \omega_\Phi(u)$ en sus componente conexas $U = \bigcup_{j \in J} W_j$ y definimos $O := W_k$ donde W_k es la componente que contiene a $\Phi_u(\mathbb{R})$. Probemos que O es un conjunto admisible tal que $\text{Bd } O = \omega_\Phi(u)$.

Primero probamos la igualdad $\text{Bd } O = \omega_\Phi(u)$. Puesto que $\Phi_u(\mathbb{R}) \subset O$ y $\omega_\Phi(u) \cap O = \emptyset$ tenemos $\omega_\Phi(u) \subset \text{Bd } O$. Recíprocamente, $\text{Bd } O = \text{Bd } W_k = \text{Cl } W_k \setminus W_k \subset (W_k \cup \omega_\Phi(u)) \setminus W_k = \omega_\Phi(u)$.

Mostremos ahora que O es admisible. Para ello observemos primero que $\mathbb{B} \setminus O = \omega_\Phi(u) \cup \bigcup_{j \neq k, j \in J} W_j$ es conexo. Supongamos lo contrario, entonces $\mathbb{B} \setminus O = C \cup B$ con $\text{Cl } C \cap B = C \cap \text{Cl } B = \emptyset$, $C \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y cada una de las componentes W_j y $\omega_\Phi(u)$ están incluidas en o en B o C . Pongamos $B = \bigcup_{j \in J_1} W_j \cup \omega_\Phi(u)$ y $C = \bigcup_{j \in J_2} W_j$ donde $k \notin J_1 \cup J_2$ y $J_1 \cup J_2 \cup \{k\} = J$. Como $\text{Bd } W_{j_2} \subset \omega_\Phi(u)$ para cualquier $j_2 \in J_2$ y $\text{Cl } C \cap B = \emptyset$ llegamos a una contradicción y $\mathbb{B} \setminus O$ es conexo.

Sea finalmente $\beta \subset O$ una curva de Jordan no homotópicamente nula, si su complementario no es conexo descomponemos $O \setminus \beta$ en sus componentes conexas: $O \setminus \beta = A_1 \cup A_2$, elíjase t_1 suficientemente grande e $i \in \{1, 2\}$ tal que $\Phi_u((t_1, +\infty)) \subset A_i$ (esto es posible porque $\beta \cap \omega_\Phi(u) = \emptyset$), por lo que $\text{Bd } O \subset \text{Bd } A_i$. Si $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ es conexo tenemos que $\text{Bd } O \subset \text{Bd}(O \setminus \beta)$. Esto prueba que O es admisible y concluye la prueba de la primera parte del teorema.

Prueba de la primera parte del teorema 2.4.C

En esta parte de la prueba distinguimos cuatro casos:

- (i) O es simplemente conexo.
- (ii) O contiene una curva de Jordan no orientable β .
- (iii) O contiene una curva de Jordan orientable y no homotópicamente nula β de forma que $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ es conexo.
- (iv) O contiene una curva de Jordan orientable y no homotópicamente nula β tal que $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ no es conexo.

Caso (i) Adoptemos la notación $V = p^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^2$ y denotemos por W a una de sus componentes conexas (p es la aplicación recubridora antes introducida). Veamos que $q = p|_W : W \rightarrow O$ es un homeomorfismo.

Si q no fuera inyectiva la aplicación deberían existir dos puntos A_0, A_1 dentro de W y una transformación $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de \mathcal{G} tal que $P(A_0) = A_1$. Tómesese ahora un arco (inyectivo) $\alpha : [0, 1] \rightarrow W$ con $\alpha(0) = A_0$ y $\alpha(1) = A_1$ defínase $\beta : [0, 1] \rightarrow O$ por $\beta(t) = p \circ \alpha(t)$. Obsérvese que β es una curva de Jordan, ya que si no lo fuera entonces $p \circ \alpha|_{(0,1)}$ no sería inyectiva y podemos tomar subintervalos cerrados $J \subset (0, 1)$ para los que $\beta|_{\text{Int } J}$ es inyectiva y $\beta(J)$ es una curva de Jordan.

β no es homotópicamente nula, en caso contrario existiría una homotopía $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(t, 0) = \beta(t)$, $H(t, 1) = p(A_0) = A$ para todo $t \in [0, 1]$ y $H(1, s) = H(0, s) = A$ para todo $s \in [0, 1]$. Levantemos la homotopía H a \mathbb{R}^2 (ver por ejemplo [dC76a, sección 5.6, proposición 3]) y obtengamos la homotopía $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\tilde{H}(t, 0) = \alpha(t)$, $\tilde{H}(t, 1) = A_0$ para cada $t \in [0, 1]$. Puesto que $\tilde{H}(0, s) = A_0$ para cualquier $s \in [0, 1]$, $\tilde{H}(1, 0) = A_1$ y $\tilde{H}(1, 1) = A_0$ llegamos a una contradicción con la continuidad de \tilde{H} porque $\tilde{H}(1, s)$ debe ser siempre igual a un punto $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $A \sim X$. Así que β no es homotópicamente nula y llegamos a una contradicción que viene de suponer que q no es inyectiva. Por lo tanto q es inyectiva.

Veamos ahora que q es sobreyectiva. Si no lo fuera $O \setminus p(W) \neq \emptyset$ además, como p es un homeomorfismo local y W es un conjunto abierto entonces $p(W)$ es también abierto. Por lo tanto debe existir un punto $b \in \text{Bd } p(W) \cap O$. Puesto que p es una aplicación recubridora, podemos tomar un pequeño entorno de b , $U_b \subset O$, tal que U_b y cada componente conexa de $p^{-1}(U_b)$ son homeomorfos. Denotemos por V_b a una de las componentes de $p^{-1}(U_b)$ que interseca a W y pongamos $V = W \cup V_b$. Puesto que $V \subset p^{-1}(O)$ es conexo se llega a una contradicción con la definición de W . Entonces q es sobreyectiva. Además, como p es un homeomorfismo local, q es una aplicación abierta y continua y entonces q es un homeomorfismo entre O y W .

Además aplicamos el teorema 1.5.3 y obtenemos que W y O también son difeomorfos [Thu97, p. 112], denotemos por $i : W \rightarrow O$ a un homeomorfismo entre ambos. Ahora se usa que W es simplemente conexo y el teorema de Vinograd para construir un flujo suave $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $u \in W$ tal que $\omega_\Psi(u) = \text{Bd } W$ y con puntos singulares en todo $\mathbb{R}^2 \setminus W$.

Sea $\Sigma : \mathbb{R} \times O \rightarrow O$ un flujo suave definido por $\Sigma(t, x) = i(\Psi(t, i^{-1}(x)))$, entonces $\omega_\Sigma(i(u)) = \text{Bd } i(W) = \text{Bd } O$. Usemos el lema 1.3.A para extender el flujo Σ a un

flujo suave $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ con las mismas órbitas en O , entonces $\omega_\Phi(i(u)) = \text{Bd } O$ lo que concluye la prueba en este caso.

Caso (ii) Sea β una curva de Jordan no orientable contenida en O . Pongamos $V = O \setminus \beta$ y usemos el lema 2.4.3 para ver que $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ está embebido por una aplicación suave en \mathbb{P}^2 , $f : \mathbb{B}^2 \setminus \beta \rightarrow \mathbb{P}^2$ de tal manera que $\mathbb{P}^2 \setminus f(\mathbb{B}^2 \setminus \beta)$ es la clausura de un disco abierto D . Puesto que $f(V \setminus \beta)$ es conexo por serlo $V \setminus \beta$ es conexo, $W = f(V \setminus \beta) \cup \text{Cl } D \subset \mathbb{P}^2$ es también conexo y abierto. Además $\mathbb{P}^2 \setminus W$ es conexo porque $\mathbb{P}^2 \setminus W = f(\mathbb{B}^2 \setminus O)$ y O es admisible. Usemos ahora el teorema 2.4.B para obtener un flujo suave $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ y un punto $u \in W$ tal que $\omega_\Psi(u) = \text{Bd } W$. Notemos que este flujo se puede construir con el conjunto de puntos singulares conteniendo a $\text{Cl } D$, en caso contrario, bastaría con multiplicar el campo de vectores asociado a Ψ , G , por una función suave y positiva $\lambda : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ anulándose sólo en $\text{Cl } D$ y reemplazar u por un punto w en $\Psi_u(\mathbb{R})$ tal que $\Psi_w([0, +\infty)) \cap \text{Cl } D = \emptyset$ y Ψ por el flujo asociado a λG .

Sea $\Lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{B}^2 \setminus \beta \rightarrow \mathbb{B}^2 \setminus \beta$ el flujo suave definido por $\Lambda(t, v) = f^{-1}(\Psi(t, f(v)))$ y extiéndase a un flujo suave Φ definido en todo \mathbb{B}^2 usando el lema 1.3.A como en el caso anterior. Por lo tanto $\omega_\Phi(f^{-1}(u)) = \text{Bd } O$ que concluye la prueba.

Caso (iii) La prueba de este caso es igual que la del segundo teniendo en cuenta que hay que aplicar el lema 2.4.4 y el teorema de Vinograd en lugar del lemma 2.4.3 y el teorema 2.4.B.

Caso (iv) Sea β una curva de Jordan orientable y no homotópicamente nula contenida en O . Tomemos $V = O \setminus \beta$ y usemos el lema 2.4.4 para ver que $\mathbb{B}^2 \setminus \beta$ se descomponen en dos componentes B_1 y B_2 embebidas por aplicaciones suaves en \mathbb{P}^2 , $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{P}^2$. Además $\mathbb{P}^2 \setminus f_i(B_i) = \text{Cl } D_i$ donde D_i es un disco abierto, para $i \in \{1, 2\}$.

Al ser O admisible se tiene que $\text{Bd } O$ está contenida o bien en B_1 o en B_2 , asumamos que $\text{Bd } O \subset B_1$ (la prueba del otro caso es igual). Definimos el conjunto $W := f_1(V \cap B_1) \cup \text{Cl } D_1$, que es conexo porque $V \cap B_1$ es conexo y $f(V \cap B_1)$ tiene puntos de acumulación en $\text{Cl } D_1$. $\mathbb{P}^2 \setminus W$ es también conexo porque $\mathbb{P}^2 \setminus W = f_1(B_1 \setminus (V \cap B_1))$ y $B_1 \setminus (V \cap B_1)$ es igual a $(\mathbb{B}^2 \setminus O) \cap B_1$ que es conexo por hipótesis.

Podemos aplicar ahora el teorema 2.4.B a W y obtener un flujo suave $\Sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ y un punto $u \in W \setminus \text{Cl } D_1$ con $\omega_\Sigma(u) = \text{Bd } W$, además Σ se puede construir de forma tal que cualquier punto de $\text{Cl } D_1$ es singular. Consideramos el flujo suave $\Lambda : \mathbb{R} \times B_1 \rightarrow B_1$ definido por $\Lambda(t, v) = f_1^{-1}(\Sigma(t, f_1(v)))$ y lo extendemos a un flujo

$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ usando el lemma 1.3.A. Ahora $\omega_\Phi(f^{-1}(u)) = f^{-1}(\text{Bd } W) = \text{Bd } O$, lo que concluye la prueba.

2.5. Caracterización para superficies en general

Desafortunadamente la caracterización del teorema 2.3.A no es válida para superficies en general. Veamos un contraejemplo en superficies no compactas. Para ello tomemos la superficie abierta

$$S = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \left(\frac{-1}{n}, 0 \right) \right\} \cup \{ (0, 0) \} \right).$$

Esta superficie está dibujada en la figura 2.5. Claramente, el círculo C puede ser el conjunto ω -límite de una órbita para un flujo adecuado, sin embargo C no es la frontera de ningún anillo regular en la superficie S . De hecho, si $U \subset S$ es un conjunto abierto tal que $\text{Bd } U = C$, entonces es necesario que $\text{Bd } U$ contenga infinitos puntos del conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \left(\frac{-1}{n}, 0 \right) \right\} \cup \{ (0, 0) \}$, por lo tanto U no puede ser un anillo regular.

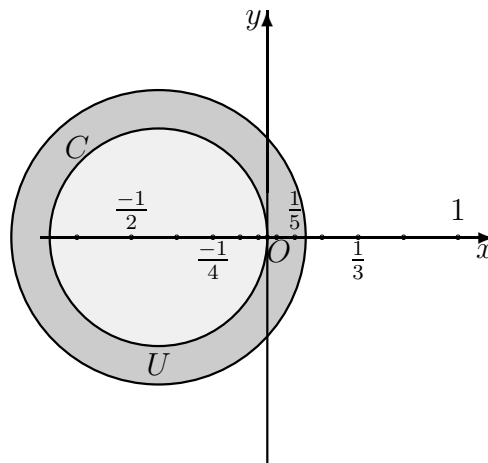


Figura 2.4: Representación de un conjunto ω -límite sobre una superficie S que no es una componente de la frontera de un anillo regular

Capítulo 3

Órbitas recurrentes sobre superficies generando conjuntos ω -límite con interior vacío

3.1. Introducción

El flujo construido por Denjoy en [Den32] demuestra la existencia de un conjunto ω -límite con interior vacío generado por órbitas recurrentes sobre el toro \mathbb{T}^2 , además dicho conjunto no sólo es un conjunto ω -límite sino que se trata de un conjunto minimal.

Los conjuntos ω -límites generados por órbitas recurrentes y con interior vacío han permanecido hasta la década pasada muy poco estudiados y sólo antes de esta década Markley [Mar69a, Mar78, Mar66] y Mañer [Mai43] dedicaron estudios más o menos profundos a este tema. Sin embargo en sus artículos no se estudia la estructura de ellos sino que se trata más bien de contar el número de ω -límites recurrentes no triviales diferentes que puede tener un flujo. Artículos de finales de los 80 [Oda89] tenían objetivos parecidos a los antiguos de Markley y Mañer.

Como ya se expuso en el primer capítulo sabemos qué superficies no admiten órbitas recurrentes no triviales. Recordamos que por el teorema de Poincaré-Bendixson

generalizado, en la esfera no cabe hablar de este tipo de órbitas. En cuanto a las superficies de género uno, por un lado tenemos el toro donde sí existen estas órbitas y por otro se tiene el plano proyectivo que no puede tener órbitas recurrentes no triviales por ser su recubridor orientable doble la esfera.

Si nos fijamos en las superficies orientables de género mayor o igual que dos es obvio que pueden tener órbitas recurrentes pues estas superficies no son más que sumas conexas de toros, los cuales pueden contener tales órbitas. Por ejemplo, si quisiéramos construir una órbita recurrente, no periódica y no singular, con el interior de su ω -límite vacío bastaría con construir el flujo en el toro con una órbita de estas características y sumar conexasmente este toro con otro constituido sólo de puntos singulares.

La superficie no orientable de género dos, en cambio, no puede tener una órbita recurrente definida sobre ella a menos que ésta sea una órbita periódica. Sin embargo para las superficies no orientables de género mayor sí se da la existencia de órbitas recurrentes no triviales con el interior de su ω -límite vacío. El procedimiento es el mismo que se ha definido para la superficie orientable de género mayor que uno, pues las superficies no orientables de género mayor que dos se pueden obtener sumando conexasmente el toro con bandas de Möbius.

El estudio de este tipo de recurrencias ha mantenido su interés durante toda la segunda mitad del siglo XX e incluso su desconocimiento profundo ha dado lugar a que teoremas como el de estabilidad estructural de Peixoto [Pei62] se fueran al traste, al menos en las superficies no orientables. El artículo [Gut78] explica por qué y establece dicho teorema para la superficie no orientable de género tres, con lo cual el teorema de Peixoto es válido en todas las superficies orientables y las no orientables de género menor o igual que tres.

3.2. El flujo de Denjoy

En esta sección vamos a dar un método de construcción de flujos usando homomorfismos del círculo, estos flujos se llaman *suspensiones* de los homeomorfismos correspondientes. Su construcción detallada se puede seguir en [ABZ96, sección 3.1].

3.2.1. Suspensión de un homeomorfismo del círculo

En este apartado denotaremos por $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a un homeomorfismo del círculo y con él definiremos la superficie M_f como vamos a explicar.

La superficie M_f . Para definir M_f partiremos del anillo $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y definiremos en él la relación de equivalencia que sigue.

$$(t, a) \sim (t', a') \text{ si y sólo si:}$$

1. $(t, a) = (t', a')$ o,
2. existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $(t, a) = (x, 1)$ y $(t', a') = (f(x), 0)$.

Con esta relación de equivalencia definimos:

$$M_f = \mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \sim .$$

Es fácil ver que cuando el homeomorfismo f conserva la orientación la superficie M_f es homeomorfa al toro \mathbb{T}^2 y en caso contrario, cuando f invierte la orientación, entonces M_f es homeomorfa a la botella de Klein \mathbb{B}^2 .

El flujo $\Phi_f : \mathbb{R} \times M_f \rightarrow M_f$. Usando la definición de M_f y del homeomorfismo f , para cada $\tau \in [0, 1)$ y $x \in \mathbb{S}^1$ definimos:

$$\Phi_f(t, [x, \tau]) = [f^{[t+\tau]}(x), \{t + \tau\}],$$

donde $[t + \tau]$ (respectivamente $\{t + \tau\}$) denota la parte entera (respectivamente fraccional) del número $t + \tau$. Es fácil ver que Φ_f es un flujo bien definido sobre M_f llamado *suspensión de f* y que también denotaremos por

$$\text{Sus}(f).$$

Relación entre f y $\text{Sus}(f)$. Las dinámicas del homeomorfismo f y del flujo $\text{Sus}(f)$ están estrechamente relacionadas. En concreto se tiene:

Proposición 3.2.1. 1. Si f tiene una órbita densa, entonces el flujo $\text{Sus}(f)$ tiene una órbita densa.

2. Si f tiene una órbita recurrente no trivial entonces $\text{Sus}(f)$ tiene una órbita recurrente no trivial.

3. Si f tiene un órbita periódica, entonces $\text{Sus}(f)$ tiene una órbita periódica.

3.2.2. El homeomorfismo de Denjoy

La construcción del flujo de Denjoy se puede realizar mediante la suspensión de un homeomorfismo del círculo. Esbozaremos la construcción de este homeomorfismo y lo utilizaremos para obtener el flujo que buscamos.

Para empezar fijaremos un poco de notación:

1. Identificaremos $\mathbb{S}^1(\rho)$ y el espacio que se obtiene del intervalo $[0, \rho]$ identificando los puntos finales.
2. Dado un número $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ denotará la rotación de ángulo θ sobre \mathbb{S}^1 , es decir $R_\theta(x) = x + \theta \pmod{1}$.
3. $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ denotará la bisucesión de números reales tales que $a_n = \frac{1}{(|n|+2)(|n|+3)}$, además $a \in \mathbb{R}$ será la suma de la bisucesión, es decir $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$.

Suponemos en lo que sigue que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tomamos un punto $x_0 \in \mathbb{S}^1$ y definimos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de \mathbb{S}^1 tales que $x_n = R_\theta^n(x_0)$. Puesto que θ es irracional se tendrá que $\text{Cl}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{S}^1$.

Ahora tomamos para cada $n \in \mathbb{Z}$ un intervalo abierto de longitud a_n , $G_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{S}^1(1+a)$, de tal forma que la posición relativa entre los intervalos $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es la misma que la de los puntos de la bisucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Con esta definición de los intervalos G_n se tiene que $\Omega = \mathbb{S}^1(1+a) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n$ es un conjunto de Cantor. El subconjunto de Ω que se obtiene quitando de éste los extremos de los intervalos G_n se denota por Ω° .

De la definición que hemos dado de los conjuntos G_n , Ω y Ω° podemos deducir la existencia de una aplicación

$$h : \mathbb{S}^1(1+a) \rightarrow \mathbb{S}^1$$

tal que:

1. h es continua y conserva la orientación,
2. $h(\text{Cl } G_n) = x_n$,
3. h es inyectiva cuando se restringe su definición al conjunto Ω° .

Ya estamos en condiciones de realizar ya la construcción del homeomorfismo de Denjoy, su definición no es directa sino que se hace a través de su derivada, ésta será la aplicación

$$F : \mathbb{S}^1(1+a) \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$F(x) = 1 + k_n \frac{(x - \alpha_n)(\beta_n - \alpha)}{a_n^2} \quad \text{si } x \in G_n = (\alpha_n, \beta_n),$$

donde se toma $k_n = 6 \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$.

Se puede comprobar (para los detalles nos remitimos a [ABZ96, sección 3.1]) que existe un homeomorfismo (*homeomorfismo de Denjoy*) $f : \mathbb{S}^1(1+a) \rightarrow \mathbb{S}^1(1+a)$ cuya derivada es la aplicación F y que satisface las siguientes propiedades:

1. $f(\Omega) = \Omega$,
2. $R_\theta \circ h = h \circ f$,
3. $f(\Omega^\circ) = \Omega^\circ$,
4. para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica $f(G_n) = G_{n+1}$,
5. para cualquier $x \in \mathbb{S}^1(1+a)$ se tiene que

$$\omega_f(x) := \{y \in \mathbb{S}^1(1+a) : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty \text{ tal que } (f^{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow y\} = \Omega.$$

3.2.3. Suspensión del homeomorfismo de Denjoy

Los dos apartados anteriores nos permiten definir el *flujo de Denjoy* haciendo la suspensión del homeomorfismo de Denjoy, $f : \mathbb{S}^1(1+a) \rightarrow \mathbb{S}^1(1+a)$. Con esta suspensión obtenemos el flujo:

$$\Phi_f : \mathbb{R} \times M_f \rightarrow M_f.$$

En este caso, debido a que el homeomorfismo f conserva la orientación, tenemos que $M_f = \mathbb{T}^2$ y por lo tanto podemos reescribir el flujo como:

$$\Phi_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

De la definición de suspensión de un homeomorfismo y de las propiedades del homeomorfismo de Denjoy, se deducen fácilmente las siguientes propiedades del flujo Φ_f :

1. El flujo Φ_f no tiene puntos singulares.
2. El flujo Φ_f no tiene órbitas periódicas.
3. Si $x \in \Omega$ entonces $\text{Orb}_{\Phi_f}([x, 0])$ es recurrente no trivial.
4. Si $x \in \mathbb{S}^1(1+a) \setminus \Omega$ entonces $\text{Orb}_{\Phi_f}([x, 0])$ es no recurrente.
5. Existe un conjunto $\text{Sus}(\Omega) \subset \mathbb{T}^2$ compacto, conexo y con interior vacío tal que si $[x, \tau] \in \mathbb{T}^2 = M_f$ entonces $\omega_{\Phi_f}([x, \tau]) = \text{Sus}(\Omega)$.
6. $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Sus}(\Omega)$ tiene una única componente conexa.

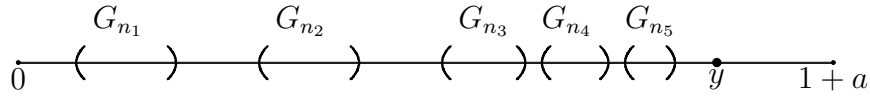
El conjunto ω -límite que aparece para el flujo de Denjoy, desde el punto de vista topológico, ya está estudiado. En efecto, a pesar de ser $\text{Sus}(\Omega)$ el conjunto ω -límite de órbitas recurrentes no triviales también es el conjunto ω -límite de órbitas no recurrentes. En consecuencia, por el teorema 2.3.A, C es una componente de la frontera de un anillo regular.

Antes de centrar nuestra atención en estudiar conjuntos ω -límite con interior vacío de órbitas recurrentes no triviales conviene plantearse si realmente existen ejemplos de éstos conjuntos sin que sean ω -límite de órbitas no recurrentes. Vemos un ejemplo de tales conjuntos en el apartado siguiente.

3.2.4. Modificaciones del ejemplo de Denjoy

Fijemos un punto $y \in \Omega \setminus \Omega^\circ \subset \mathbb{S}^1(1+a)$ y una sucesión de números enteros $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tales que:

1. La sucesión de intervalos $(G_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ está ordenada de forma creciente (ver la figura 3.1).
2. Tanto $+\infty$ como $-\infty$ son puntos de acumulación de $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Todos los puntos de los intervalos G_{n_k} son menores que $y \in \text{Cl } G_m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$.
4. $y \in \text{Bd } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{n_k}$.
5. $D := \text{Cl } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{n_k} = \{y\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Cl } G_{n_k}$.

Figura 3.1: Elección de los intervalos G_{n_k}

Antes de seguir es necesario enunciar un lema geométrico sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

Lema 3.2.2. *Sea U un abierto conexo $\emptyset \subsetneq U \subsetneq \mathbb{S}^2$ y definamos en \mathbb{S}^2 la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si:*

1. $x = y$ o
2. x e y pertenecen a una misma componente de $\mathbb{S}^2 \setminus U$.

Entonces \mathbb{S}^2 / \sim es homeomorfo a \mathbb{S}^2 .

Demostración. La prueba de este resultado se puede seguir en [Sol01b, sección 5.3] y consiste en ver que \mathbb{S}^2 / \sim es un espacio de Janiszewski¹, contiene más de un punto y para cada $x \in \mathbb{S}^2 / \sim$ se tiene que $\mathbb{S}^2 / \sim \setminus \{x\}$ es conexo. A partir de ahí se aplica un teorema que nos dice que cualquier espacio con estas propiedades es homeomorfo a \mathbb{S}^2 (ver [Kur68, páginas 154 y 531]). \square

Según el teorema de Gutiérrez, cualquier flujo es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^1 (ver [Gut86]), así que no es restrictivo suponer que el flujo Φ_f es de clase C^1 , en caso contrario haríamos el razonamiento con el flujo equivalente a Φ_f de clase C^1 . Como el conjunto $E = \{[x, 1] : x \in D\} \subset M_f = \mathbb{T}^2$ es cerrado en \mathbb{T}^2 , podemos modificar el flujo Φ_f sobre el toro (multiplicando el campo de vectores asociado a Φ_f , G_f , por una función escalar positiva que se anule únicamente sobre E , λ_f , y luego considerando el flujo asociado al campo de vectores $\lambda_f G_f$) para obtener un flujo

$$\tilde{\Phi}_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

que verifique:

¹Un espacio se dice de Janiszewski cuando es Hausdorff, compacto, conexo, localmente conexo y se verifica además: para cada par de subconjuntos compactos y conexos, A_1 y A_2 , tales que $A_1 \cap A_2$ no es conexo existen puntos, x e y , en el complementario de $A_1 \cup A_2$ que no están simultáneamente contenidos en ningún compacto y conexo del complementario de $A_1 \cup A_2$ (se puede ver la definición de estos espacios así como sus propiedades básicas en [Kur68, capítulo 10, sección 61]).

1. Todos los puntos de E son singulares para $\tilde{\Phi}_f$.
2. Las órbitas de Φ_f que no intersecan al conjunto E siguen siendo órbitas de $\tilde{\Phi}_f$.

Definimos ahora la relación de equivalencia \sim_E sobre \mathbb{T}^2 de la siguiente forma: $x \sim_E y$ si y sólo si

1. $x = y$ o,
2. x e y pertenecen a la misma componente conexa de E .

Aplicando ahora el lema 3.2.2 a $\mathbb{T}^2 \setminus \{[x, \frac{1}{2}] : x \in \mathbb{S}^1(1+a)\}$, que es homeomorfo a \mathbb{S}_{**}^2 , se puede ver que $\mathbb{T}_E^2 := \mathbb{T}^2 / \sim_E$ y \mathbb{T}^2 son homeomorfos. Denotaremos por $p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}_E^2$ a la aplicación cociente, por $\{x\}_E$ a la clase de equivalencia de un punto $x \in \mathbb{T}^2$ y para cada conjunto $A \subset \mathbb{T}^2$, $\{A\}_E$ representa el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A , es decir $\{A\}_E = \{p(x) : x \in A\}$.

Es fácil ver que el flujo $\hat{\Phi}_f : \mathbb{R} \times (\mathbb{T}_E^2 \setminus \{E\}_E) \rightarrow \mathbb{T}_E^2 \setminus \{E\}_E$ definido por:

$$\hat{\Phi}_f(t, \{x\}_E) = p(\tilde{\Phi}_f(t, p^{-1}(x))),$$

está bien definido. Éste lo podemos extender a todo \mathbb{T}_E^2 con ayuda del lema 1.3.A, la extensión la seguimos llamando $\hat{\Phi}_f$ para no recargar la notación.

Finalmente si llamamos $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}_E^2$ al homeomorfismo existente entre \mathbb{T}^2 y \mathbb{T}_E^2 , utilizamos el flujo $\hat{\Phi}_f$ para definir otro con las mismas propiedades sobre \mathbb{T}^2 :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (t, x) &\longrightarrow g^{-1}(\hat{\Phi}_f(t, g(x))). \end{aligned}$$

De la definición del flujo se siguen fácilmente las siguientes propiedades:

1. Para todo $u \in \mathbb{T}^2 \setminus \text{Sus}(\Omega)$ se tiene que $g^{-1}(\{u\}_E)$ es un punto no recurrente, en concreto para todo $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ se tiene que $g^{-1}(\{[x, 1]\}_E)$ es un punto no recurrente.
2. La segunda propiedad anterior se puede refinar todavía más, para todo $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Cl } G_n$ se tiene que $g^{-1}(\{[x, 1]\}_E)$ es un punto no recurrente.

3. Para todo $x \in \Omega^\circ$ se tiene que $g^{-1}(\{[x, 1]\}_E)$ es un punto recurrente no trivial. Además existe un conjunto compacto, conexo y con interior vacío F tal que

$$\omega_{\widehat{\Phi}_f}(g^{-1}(\{[x, 1]\}_E)) = \alpha_{\widehat{\Phi}_f}(g^{-1}(\{[x, 1]\}_E)) = F.$$

4. Si z es un punto no recurrente entonces tanto $\omega_{\widehat{\Phi}_f}(z)$ como $\alpha_{\widehat{\Phi}_f}(z)$ son conjuntos formados por un solo punto.
5. $\mathbb{T}^2 \setminus F$ tiene un número infinito de componentes conexas, ninguna de las cuales contiene en la frontera a F .

Así que hemos construido el flujo $\widehat{\Phi}_f$ para el que existen puntos cuyo ω -límite es F . Además no existe ningún flujo definido sobre \mathbb{T}^2 que tenga a F como el conjunto ω -límite de una órbita no recurrente.

3.3. Número de ω -límites generados por órbitas recurrentes

Vamos a presentar en este apartado los resultados que hemos comentado en la introducción relativos al número de ω -límites diferentes de órbitas recurrentes no triviales que admite un flujo.

Recordamos que todas las superficies compactas, conexas y orientables salvo la esfera admiten flujos suaves con órbitas recurrentes cuyos conjuntos ω -límites tienen interior vacío. También se tiene que todas las superficies compactas, conexas y no orientables salvo la botella de Klein y el plano proyectivo admiten flujos suaves con órbitas recurrentes cuyos conjuntos ω -límites tienen interior vacío.

Hacemos notar que, para un flujo determinado, el número de ω -límites diferentes de órbitas recurrentes no triviales con interior vacío puede ser mayor que uno. En principio los resultados aludidos en el párrafo precedente nos dicen que existe uno, pero no nos limitan el número máximo. El primero en limitar este número fue Maier para las superficies orientables en [Mai43], posteriormente Markley hizo lo propio con las superficies no orientables en [Mar69a]. Pasamos a exponer el trabajo de ambos.

Proposición 3.3.1 (Maier, [Mai43]). *Sea S una superficie compacta y conexa, $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ un flujo continuo y x e y dos puntos recurrentes para Φ . Si $y \in \omega_\Phi(x)$ entonces $\omega_\Phi(x) = \omega_\Phi(y)$.*

Y ahora exponemos los teoremas que limitan el número de ω -límites diferentes generados por órbitas recurrentes no triviales.

Teorema 3.3.2 (Mañer, [Mai43]). *Un flujo continuo sobre una superficie compacta, conexa y orientable de género p tiene como mucho p ω -límites con interior vacío diferentes, generados por órbitas recurrentes no triviales. Además este número se alcanza por algún flujo.*

Finalmente, Markley utilizó este resultado para generalizarlo a las superficies no orientables, la técnica consiste en levantar el flujo de una superficie no orientable a una orientable por el recubridor de dos hojas, aprovechar el resultado anterior y traducirlo mediante el recubridor a la superficie no orientable de partida. El mismo resultado lo demostró también Aranson independientemente.

Teorema 3.3.3 (Aranson-Markley, [Ara69, Mar69a]). *Un flujo continuo sobre una superficie compacta no orientable de género p tiene como mucho $\lceil \frac{p-1}{2} \rceil$ ω -límites diferentes con interior vacío, generados por órbitas recurrentes no triviales. Además este número siempre se alcanza por algún flujo.*

3.4. Enunciado del teorema de estructura de los conjuntos ω -límites con interior vacío generados por órbitas recurrentes no triviales

En esta sección vamos a presentar la caracterización de conjuntos ω -límites con interior vacío generados por órbitas recurrentes no triviales. Para ello tenemos que introducir algunas definiciones previas en las que utilizaremos la noción de superficie, todas estas superficies son conexas y posiblemente con frontera combinatoria.

Fijaremos una distancia, $\text{dist} : S \times S \rightarrow [0, +\infty[$, compatible con la topología sobre la superficie S en la que deseamos dar una caracterización de los conjuntos ω -límites. La *bola abierta con centro en u y radio ϵ* se define por la igualdad:

$$D(u, \epsilon) := \{u \in S : \text{dist}(u, p) < \epsilon\}.$$

Definición 3.4.1 (puntos interiores y finales de un arco). Si A es un arco y $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ es una parametrización de A entonces llamaremos a los puntos $\varphi(a) = u$ y $\varphi(b) = v$ *puntos finales* del arco A . Los demás puntos del arco se

llaman *puntos internos*² de A y el conjunto unión de todos ellos recibe el nombre de *conjunto interno* de A y lo denotaremos por $\text{Inn } A$.

Usaremos la notación $A = [u; v]$, $\text{Inn } A = (u; v)$. Si A es un arco orientado (véase la definición 1.5.4 en la página 48) y φ es una parametrización compatible con la orientación entonces usaremos la notación $[u, v]$ y llamaremos a u el *punto inicial* de A y a v el *punto final* de A .

Definición 3.4.2 (distancias entre arcos (Hausdorff y Fréchet)). Sean A y B dos arcos sobre una superficie S . Definiremos la *distancia de Hausdorff* entre A y B por la relación

$$d_H(A, B) = \max\left\{\max_{u \in A} \min_{v \in B} \text{dist}(u, v), \max_{v \in B} \min_{u \in A} \text{dist}(u, v)\right\}.$$

Si adicionalmente A y B son arcos orientados entonces definimos la *distancia Fréchet* entre A y B por

$$d_F(A, B) = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in A} \text{dist}(u, h(u)),$$

donde \mathcal{H} es la familia de homeomorfismos, $h : A \rightarrow B$, que conservan la orientaciones entre A y B . Por supuesto, se entiende que h *conserva la orientación* entre A y B si cuando $\varphi : I \rightarrow A$ es compatible con la orientación de A entonces la composición $h \circ \varphi$ es compatible con la de B .

Definición 3.4.3 (entorno regular de Whitney). Sea \mathcal{B} una familia de curvas en S , $p \in B \in \mathcal{B}$ y O un entorno de p . Diremos que O es un *entorno regular de Whitney* del punto p si para cada $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que:

- (a) si $[p'; q'] \subset O \cap B'$ para algún $B' \in \mathcal{B}$ y $\text{dist}(p', q') < \delta$, entonces $\text{diam}([p'; q']) < \epsilon$;
- (b) si $[p; q] \subset O \cap B$, $p' \in O \cap B'$ para algún $B' \in \mathcal{B}$ y $\text{dist}(p, p') < \delta$, entonces hay algún $[p'; q'] \subset O \cap B'$ tal que $d_H([p; q], [p'; q']) < \epsilon$.

Diremos que \mathcal{B} es *regular en el sentido de Whitney* si todos los puntos de todas las curvas $B \in \mathcal{B}$ tienen un entorno regular de Whitney.

Observación 3.4.1. Si todas las curvas de una familia \mathcal{B} son inmersiones de \mathbb{R} o \mathbb{S}^1 , son disjuntas dos a dos y rellenan un subconjunto abierto U de S se dice que la familia \mathcal{B} es *completa*. Cuando \mathcal{B} es completa:

²Preferimos llamarlos *puntos internos* y no *puntos interiores* para evitar confusión con la noción topológica de punto interior de un conjunto.

- Whitney mostró en [Whi33] que la regularidad de Whitney es equivalente a la propiedad: para cada $p \in B \in \mathcal{B}$ existe un entorno D de p en O y un homeomorfismo $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ tal que cualquier arco $h([0, 1] \times \{x\})$, $x \in [0, 1]$ está incluido en alguna curva de B .
- Whitney probó en [Whi41] que la propiedad (a) de la definición 3.4.3 es redundante (esto no es cierto en general si la familia \mathcal{B} no es completa).
- Si en la definición 3.4.3 asumimos que todas las curvas de \mathcal{B} son orientables (con sus subarcos heredando las orientaciones correspondientes) y reemplazamos (b) por:

(b)' si $[p, q] \subset O \cap B$ (resp. $[q, p] \subset O \cap B$), $p' \in O \cap B'$ para algún $B' \in \mathcal{B}$ y $\text{dist}(p, p') < \delta$, entonces existe algún $[p', q'] \subset O \cap B'$ (resp. $[q', p'] \subset O \cap B'$) tal que $d_F([p, q], [p', q']) < \epsilon$ (resp. $d_F([q, p], [q', p']) < \epsilon$),

entonces decimos que \mathcal{B} es una familia completa, orientable y regular en el sentido de Whitney. Whitney demostró en [Whi33] (ver [Nik01, pp. 216–222] para una referencia reciente) que si \mathcal{B} es una familia completa, orientable y regular en el sentido de Whitney en S y O es la unión de todas las curvas de \mathcal{B} entonces existe un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ tal que cada curva de \mathcal{F} es una órbita de Φ . Además, los puntos de $S \setminus O$ son exactamente los puntos singulares de Φ y las orientaciones de cada una de las curvas de \mathcal{B} coinciden con las orientaciones de las correspondientes órbitas de Φ .

Definición 3.4.4 (superficie girando alrededor de un círculo). Sea $R \subset S$ una superficie y $C \subset S$ un círculo orientable no homotópicamente nulo. Diremos que R gira alrededor de C si existe un embebimiento, $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$, tal que:

- (i) $\phi((0, 1) \times (0, 1)) \subset R \setminus (\partial R \cup C)$;
- (ii) $\phi([0, 1] \times \{0, 1\}) \subset \partial R$;
- (iii) $\phi(\{0, 1\} \times [0, 1]) \subset C$;
- (iv) si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño entonces $\phi((0, \epsilon] \times [0, 1])$ y $\phi([1 - \epsilon, 1] \times [0, 1])$ están en lados opuestos de C .

El conjunto $\phi([0, 1] \times [0, 1])$ recibe el nombre de *sección de giro* de R y el conjunto $\phi([0, 1] \times \{0, 1\})$ es su *frontera de giro*. También denotaremos al conjunto unión de todas las secciones de giro de R por $\Upsilon(R)$ y a la unión de todas las fronteras de giro por $\Upsilon(\partial R)$.

Está claro que las definiciones previas dependen del círculo C , así que siempre deberá estar claro a qué círculo nos estamos refiriendo para que no haya confusión.

Definición 3.4.5 (familia realizable para C). Sea $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de superficies simplemente conexas sobre S disjuntas dos a dos. Sea $C \subset S$ un círculo orientable no homotópicamente nulo. Diremos que $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *familia realizable respecto a C* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) todas las superficies R_n giran alrededor del círculo C y para cada índice m , el conjunto $R_m \cup \text{Cl}(\bigcup_n \Upsilon(R_n))$ es un entorno de ∂R_m ;
- (ii) la familia de las componentes de todas las fronteras combinatorias ∂R_n es regular en el sentido de Whitney;
- (iii) para cada $u, v \in \bigcup_n \text{Bd } R_n$ y $\epsilon > 0$ existe un arco A en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial R_n$ que satisface $\text{dist}(u, A) < \epsilon, \text{dist}(v, A) < \epsilon$.

Enunciamos ya el teorema que caracteriza los conjuntos ω -límites con interior vacío de puntos recurrentes no triviales.

Teorema 3.4.A (Caracterización de conjuntos ω -límites con interior vacío generados por órbitas recurrentes no triviales). *Sea S una superficie compacta y conexa y $\Omega \subset S$ tal que $\text{Int } \Omega = \emptyset$.*

- (i) *Supongamos que Ω es el conjunto ω -límite de un punto recurrente de algún flujo definido sobre S pero no es el ω -límite de ningún punto no recurrente de ningún flujo definido sobre S . Entonces existe una familia realizable $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ para algún círculo no homotópicamente nulo, C , tal que $\Omega = \text{Bd } \bigcup_n R_n$.*
- (ii) *Asumamos que existe una familia realizable $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ para algún círculo no homotópicamente nulo, C , con $\Omega = \text{Bd } \bigcup_n R_n$. Entonces existe un flujo definido sobre S (topológicamente equivalente a un flujo suave definido sobre S) que tiene a Ω como el conjunto ω -límite de uno de sus puntos recurrentes. Sin embargo, no existe ningún flujo definido sobre S que tiene a Ω como el conjunto ω -límite de alguno de sus puntos no recurrentes.*

La formulación de esta caracterización es bastante complicada. Sin embargo hacemos notar que ninguna de las hipótesis involucradas es redundante. De hecho, existen familias $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ de superficies simplemente conexas disjuntas dos a dos sobre el toro \mathbb{T}^2 satisfaciendo dos de las tres condiciones de la definición 3.4.5 y tal que $\text{Bd} \bigcup_n R_n$ no es un conjunto ω -límite para ningún flujo sobre \mathbb{T}^2 . Más concretamente, se pueden poner contraejemplos³ de cuatro tipos:

1. Por un lado podemos encontrar contraejemplos que satisfacen las condiciones (ii), (iii) e incluso satisfaciendo que todas las superficies R_n giran alrededor de un círculo C no homotópicamente nulo. Es decir, existen contraejemplos donde sólo una de las condiciones de las dos agrupadas en (i) no se satisface.
2. Por otro lado se pueden dar contraejemplos (incluso en la esfera \mathbb{S}^2) que satisfacen (ii) y (iii) y tal que $R_m \cup \text{Cl}(\bigcup_n \Upsilon(R_n))$ es un entorno de ∂R_m para todo m^4 .
3. También existen familias que satisfacen (i) y (iii) de la definición 3.4.5 y sólo no verifican (a) o (b) en la definición 3.4.3.
4. La condición (iii) de la definición 3.4.5 se puede interpretar como una forma fuerte de conexión. En este sentido se pueden dar también contraejemplos para los que se satisfacen (i) y (ii) y el conjunto $\text{Bd} \bigcup_n R_n$ es conexo⁵.

Obsérvese finalmente que la parte referente a la suavidad en el teorema no es óptima y no se puede mejorar ya que es fácil dar ejemplos de conjuntos Ω como los del teorema que no son conjuntos ω -límites de flujos de clase C^∞ ⁶.

³La descripción de estas familias se hará en la sección 3.7

⁴**Nota por eliminar:** Aquí el ejemplo que se puede poner es análogo al flujo de Denjoy en el Toro, se parte de la foliación irracional en la esfera, se hace un procedimiento de *blowing up* como se explica en [ABZ96, página 32] y se obtiene un flujo que no tiene órbitas recurrentes pero que tiene un conjunto ω -límite Ω tipo cantor. Además $\mathbb{S}^2 \setminus \Omega$ tiene una única componente conexa. Para obtener el flujo deseado es necesario cortar esta componente como se hace en la modificación del ejemplo de Denjoy.

⁵**Nota por eliminar:** Este ejemplo se conseguiría modificando el ejemplo de Denjoy, en concreto habría que dividir el complementario del conjunto ω -límite de Denjoy en infinitas secciones de giro, cada una de las cuales interseca a C sólo 3 veces (cuidado porque puede que no se satisfaga la propiedad (i)-segunda parte).

⁶**Nota por eliminar:** No sé cual sería el ejemplo para esta afirmación

3.5. Prueba de la primera parte del teorema 3.4.A

Durante todo esta sección fijaremos una superficie compacta y conexa S , un flujo sobre ella $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ y un conjunto $\Omega \subset S$ tal que:

1. $\text{Int } \Omega = \emptyset$,
2. existe un punto $u \in S$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u) \ni u$,
3. no existe ningún flujo sobre S que tenga a Ω como el conjunto ω -límite de ningún punto que no pertenezca a Ω .

Bajo estas hipótesis es fácil ver que Ω no es la frontera de ninguna de las componentes de $S \setminus \Omega$.

Lema 3.5.1. *Sea O una componente de $S \setminus \Omega$. Entonces $\Phi_u(\mathbb{R}) \cap \text{Bd } O = \emptyset$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\text{Bd } O = \Omega$ y distinguiremos dos casos dependiendo de si O es simplemente conexo o no. En ambos casos obtendremos que Ω es una componente conexa de la frontera de un anillo regular.

1. Si O es simplemente conexo y p es un punto de O entonces Ω una de las componentes de la frontera del anillo regular $O \setminus \{p\}$ (la otra es el punto p).
2. Si O no es simplemente conexo usamos los lemas 2.2.4 y 2.2.2 un número finito de veces para obtener círculos en O , disjuntos dos a dos y no homotópicamente nulos, $\{C_i\}_{i=1}^n$, y una superficie compacta sin frontera N tal que $O \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i$ es homeomorfo a una región $V \subset N$ que verifica que $V \cup \{q_j\}_{j=1}^l$ es simplemente conexa para ciertos puntos q_j de N .

Sea $h : O \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i \rightarrow V$ el citado homeomorfismo, $D \subset V$ un círculo que acota una región que contiene a los puntos q_j y U la componente de $O \setminus (h^{-1}(D) \cup \bigcup_{i=1}^n C_i)$ que tiene a Ω en su frontera. Ahora es claro que U es un anillo regular y que Ω es una de las componentes de la frontera (la otra es $h^{-1}(D)$).

Así que en ambos casos hemos visto que Ω es una componente de la frontera de un anillo regular contenido en S . Finalmente usando el teorema 2.3.A se puede construir un flujo sobre S que tiene a Ω como el ω -límite de un punto no recurrente, pero esto es una contradicción con las propiedades de Ω . \square

El lema 3.5.1 implica en concreto que u es recurrente no trivial. Además, por un teorema de Cherry (ver por ejemplo [ABZ96, página 57, teorema 2.1]) se tiene que $\alpha_\Phi(u) = \omega_\Phi(u) = \Omega$.

Antes de entrar en los detalles de la prueba necesitamos presentar nueva notación y algunos resultados técnicos probados por Gutiérrez en [Gut86].

Definición 3.5.2 (entorno paralelizable). Un conjunto cerrado $N \subset S$ se dice que es un *entorno paralelizable*⁷ (del flujo Φ) si existe un homeomorfismo $\theta : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow N$ tal que para cada $s \in [-1, 1]$, $\theta([-1, 1] \times \{s\})$ es una subórbita de Φ .

Es conveniente recordar que para cualquier punto no singular de un flujo Φ existe un entorno paralelizable que lo contiene, la demostración se puede ver por ejemplo en [Haj65b, p. 166].

Definición 3.5.3 (círculo transversal). Un círculo orientable $C \subset S$ se dice *transversal* al flujo Φ cuando para cada punto $y \in C$ existe un entorno paralelizable N_y ($\theta_y : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow N_y$) para la que $\theta_y(0, 0) = y$ y $\theta(\{0\} \times [-1, 1]) = N_y \cap C$.

El siguiente lema de Gutiérrez, ver [Gut78, lema 1.2], justifica la existencia de círculos transversales a nuestro flujo Φ .

Lema 3.5.4 (Gutiérrez). *Existe un círculo C no homotópicamente nulo, transversal al flujo Φ y que interseca a la órbita $\Phi_u(\mathbb{R})$ ⁸.*

Durante el resto de la sección, C denotará un círculo fijo que satisface las condiciones del lema anterior y en él tomaremos la partición $\mathcal{A}(C)$ formada por todos los arcos⁹, $[a; b] \subset C$, que satisfacen una de las dos condiciones siguientes:

- (i) $[a; b]$ es la clausura de una componente de $C \setminus \Omega$.
- (ii) $a = b$ y a no pertenece a la clausura de ninguna componente de $C \setminus \Omega$.

Denotemos por $f : D \subset C \rightarrow C$ a la *aplicación directa de Poincaré* inducida por el flujo Φ , esto es:

$$f(v) = \Phi_t(v),$$

⁷Traducción del término inglés *flow box*.

⁸**Nota por eliminar:** Mirar en el artículo de Gutiérrez si está puesto que C es no homotópicamente nulo.

⁹Algunos pueden ser degenerados.

siendo $t > 0$ el número real positivo más pequeño tal que $\Phi_t(v) \in C$. Si no existe ningún número t que satisfice esta condición entonces la aplicación directa de Poincaré no está definida en v .

Definición 3.5.5 (aplicación directa de Gutiérrez). La *aplicación directa de Gutiérrez* se define como sigue

$$\begin{aligned} f_C : \mathcal{D} \subset \mathcal{A}(C) &\longrightarrow \mathcal{A}(C) \\ [a; b] &\longrightarrow [c; d], \end{aligned}$$

donde $[c; d]$ viene definido por una de las siguientes condiciones:

- $a = b \in \Phi_u(\mathbb{R})$ y $c = d = f(a)$;
- $[a; b] \cap \Phi_u(\mathbb{R}) = \emptyset$ y existen sucesiones de puntos $\{p_n\}_{n=1}^\infty, \{q_n\}_{n=1}^\infty$ en $D \cap \Phi_u(\mathbb{R})$ verificando:
 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = a$.
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = b$.
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = c$.
 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = d$.
 5. $[a; b] \subset [p_n; q_n]$ y $[c; d] \subset [f(p_n); f(q_n)]$.
 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un disco cerrado cuya frontera es $[p_n; q_n] \cup [p_n; f(p_n)] \cup [f(p_n); f(q_n)] \cup [q_n; f(q_n)]$ ¹⁰.

Observación 3.5.1 (Aplicaciones inversas de Poincaré y Gutiérrez). Cambiando los tiempos (variable t) positivos por negativos en la definición de aplicación directa de Poincaré se obtiene la *aplicación inversa de Poincaré*, que denotaremos por $g : E \subset C \rightarrow C$.

Después, cambiando f por g en la definición de aplicación directa de Gutiérrez obtenemos la *aplicación inversa de Gutiérrez* $g_C : \mathcal{E} \subset \mathcal{A}(C) \rightarrow \mathcal{A}(C)$.

Obsérvese que f y g por un lado y f_C y g_C por otro son aplicaciones inversas una de otra allá donde la composición entre ellas tenga sentido. Así que usaremos también la notación:

1. $g = f^{-1}$.

¹⁰ $[p_n, f(p_n)]$ y $[q_n, f(q_n)]$ denotan arcos que están contenidos en órbitas de Φ .

2. $g_C = f_C^{-1}$.
3. $f^i(p) = g^{-i}(p)$ si $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
4. $f_C^i(A) = g_C^{-i}(A)$ si $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Definición 3.5.6 (órbitas directas e inversas completas y arcos directa e inversamente consistentes). Llamaremos *órbita directa completa* (resp. *órbita inversa completa*) de f_C a la sucesión $\{f_C^i(A)\}_{i=0}^\infty$ (resp. $\{f_C^{-i}(A)\}_{i=0}^\infty$) cuando está bien definida.

Sea $A \in \mathcal{D}$ (resp. $A \in \mathcal{E}$) un arco no degenerado. Diremos que A es *directamente consistente* (resp. *inversamente consistente*) si existe una componente de $S \setminus \Omega$ intersecando tanto a A como a $f_C(A)$ (resp. tanto a A como a $f_C^{-1}(A)$).

De algunos de los resultados demostrados en el artículo [Gut86] y el lema 3.5.1 podemos enunciar el teorema que sigue.

Teorema 3.5.7 (Gutiérrez). *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

- (i) $C \cap \Omega$ es un subconjunto de C de tipo Cantor (por lo tanto $\mathcal{A}(C) \cong C$ cuando a $\mathcal{A}(C)$ se le dota de la topología cociente);
- (ii) $\mathcal{A}(C) \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{E})$ es finito;
- (iii) cualquier órbita directa o inversa completa de f_C es densa en $\mathcal{A}(C)$.

Lema 3.5.8. *La aplicación f_C no tiene órbitas directas (resp. inversas) completas de arcos directamente consistentes (resp. inversamente consistentes).*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo suponiendo que existen tales órbitas completas. Entonces alguna de las sucesiones $\{f_C^i(A)\}_{i=0}^\infty$ o $\{f_C^{-i}(A)\}_{i=0}^\infty$ está bien definida y es densa en $\mathcal{A}(C)$ por el teorema 3.5.7(iii). Puesto que existe una componente O de $S \setminus \Omega$ que interseca a todos los arcos de esta sucesión densa, obtenemos que $\Phi_u(\mathbb{R}) \cap C \subset \text{Bd } O$, lo que contradice el lema 3.5.1. \square

Lema 3.5.9. *Sea O una componente de $S \setminus \Omega$ que interseca a algún $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ y sea \mathcal{B} la familia de órbitas de Φ contenidas en $\text{Bd } O$ que intersecan a C . Entonces $T = O \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ es una superficie simplemente conexa.*

Demostración. Usamos el lema 3.5.8 para obtener enteros no negativos minimales, l y m , tales que $f_C^l(A)$ no es directamente consistente y $f_C^{-m}(A)$ no es inversamente consistente.

Empezamos mostrando que T es una superficie. Para ello definimos $f_C^i(A) = [a_i; b_i]$ si $-(m+1) \leq i \leq l+1$, y tomamos puntos $\{p_n\}_{n=1}^\infty, \{q_n\}_{n=1}^\infty$ de $D \cap \Phi_u(\mathbb{R})$ ¹¹, que satisfacen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f^i(p_n) = a_i$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^i(q_n) = b_i$ si $-(m+1) \leq i \leq l+1$;
- para cada n , $[a_i; b_i] \subset [f^i(p_n); f^i(q_n)]$ si $-(m+1) \leq i \leq l+1$;
- para cada n ,

$$B_n := [f^{-(m+1)}(p_n); f^{-(m+1)}(q_n)] \cup [f^{-(m+1)}(p_n), f^{l+1}(p_n)] \\ \cup [f^{-(m+1)}(q_n); f^{l+1}(q_n)] \cup [f^{l+1}(p_n); f^{l+1}(q_n)]$$

es la frontera de un disco cerrado, D_n , que interseca a C sólo en los arcos $[f^i(p_n); f^i(q_n)]$ para todo $-(m+1) \leq i \leq l+1$ ¹².

Recalcamos que $[a_i; b_i] \subset T$ si $-m \leq i \leq l$, y para cualquier n , $T \cap B_n = \emptyset$ y $T \cap ([f^i(p_n); f^i(q_n)] \setminus [a_i; b_i]) = \emptyset$ si $-m \leq i \leq l$. Por lo tanto se tiene que $T \subset D_1$ y por la continuidad de f y la transversalidad de C que T es localmente homeomorfo a un disco cerrado en todos los puntos a_i, b_i con $-m \leq i \leq l$ (y en consecuencia en todos los puntos de T por la definición de \mathcal{B}). Así que T es una superficie.

Sólo queda por probar que T (o el abierto O) es simplemente conexo. Puesto que $S \setminus O$ es conexo y $O \cap B_1 = \emptyset$, $D_1 \setminus O$ es también conexo. Por lo tanto O es simplemente conexo. \square

Ya estamos preparados para realizar la prueba de la primera parte del teorema 3.4.A. Denotemos por $\{R_n\}_n$ a la familia de superficies R tales que:

1. $\text{Int } R = O$ se encuentra en las condiciones del lema 3.5.9,
2. ∂R es el conjunto de puntos v tales que $\Phi_v(t) \in C$ y $\Phi_v(s) \in C$ para ciertos $t < 0 < s$,
3. R gira alrededor de C .

¹¹ D es el dominio de la aplicación directa de Poincaré

¹² $[f^{-(m+1)}(p_n), f^{l+1}(p_n)]$ y $[f^{-(m+1)}(q_n); f^{l+1}(q_n)]$ denotan arcos contenidos en órbitas de Φ .

Observemos que para cada n , R_n es una superficie simplemente conexa bien definida debido al lema 3.5.9. La igualdad $\Omega = \text{Bd} \bigcup_n R_n$ sigue fácilmente ya que, por la continuidad de Φ , la transversalidad de C y el teorema 3.5.7[(i) y (ii)], cualquier arco de $\mathcal{A}(C)$ suficientemente cercano a un punto de $\Phi_u(\mathbb{R}) \cap C$ está incluido en una sección de giro de alguna superficie R_n .

Ahora probamos que $\{R_n\}_n$ es una familia realizable para C . Claramente las superficies R_n son disjuntas dos a dos y, en vista de la igualdad $\Omega = \text{Bd} \bigcup_n R_n$ y del lema 3.5.1, la familia $\{R_n\}_n$ es infinita. La existencia de un entorno paralelizable conteniendo a cada punto no singular de S y el hecho de que cualquier componente de ∂R_n es de la forma $\Phi_v(I)$ para algún $v \in S$ y algún intervalo I garantiza que se satisfaga la propiedad (ii) de la definición 3.4.5. Las propiedades (i) y (iii) de la definición 3.4.5 se puede probar de una manera similar a como se ha procedido para ver que $\Omega = \text{Bd} \bigcup_n R_n$.

3.6. Prueba de la segunda parte del teorema 3.4.A

Esta parte de la prueba es más complicada que la primera y la dividiremos en varias secciones en las que se probarán resultados auxiliares que se utilizarán para la construcción del flujo. Empezamos con la definición de familia casi regular.

Definición 3.6.1 (familia casi regular). Sea \mathcal{B} una familia de curvas en la superficie S y $D \subset S$. Diremos que \mathcal{B} es *casi regular* en D si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $[p'; q'] \subset D \cap B'$ para algún $B' \in \mathcal{B}$ y $\text{dist}(p', q') < \delta$, entonces $\text{diam}([p'; q']) < \epsilon$.

Si \mathcal{B} es casi regular en S entonces diremos solamente que \mathcal{B} es *casi regular*.

Lema 3.6.2. *Sea \mathcal{B} una familia casi regular de arcos. Entonces existen parametrizaciones $\varphi_B : [0, 1] \rightarrow B$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$ tal que la familia $\{\varphi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ es equicontinua.*

Demostración. Tomamos particiones \mathcal{P}^r , $r \in \mathbb{N}$, de S formadas por discos cerrados de diámetros menores o iguales que $1/r$ cuyos interiores son disjuntos dos a dos. Podemos suponer que cada \mathcal{P}^{r+1} refina \mathcal{P}^r , es decir, si $T \in \mathcal{P}^{r+1}$ entonces existe algún $P \in \mathcal{P}^r$ tal que $T \subset P$.

Ahora es fácil construir por inducción para cada arco $B \in \mathcal{B}$ particiones del intervalo $[0, 1]$, $\mathcal{Q}^r = \mathcal{Q}_B^r$, con cada \mathcal{Q}^{r+1} refinando \mathcal{Q}^r , y definir correspondientemente

la aplicación φ_B de manera que:

- todos los intervalos de \mathcal{Q}^1 tienen la misma longitud;
- todos los intervalos de \mathcal{Q}^{r+1} incluidos en el mismo intervalo de \mathcal{Q}^r tienen la misma longitud;
- para cada intervalo $[a, b] \in \mathcal{Q}^r$ existe algún disco cerrado, $T \in \mathcal{P}^r$, tal que $\{\varphi_B(a), \varphi_B(b)\} \subset T$ y $\varphi_B([0, 1] \setminus [a, b]) \cap T = \emptyset$.

La equicontinuidad de las aplicaciones φ_B sigue de la definición 3.6.1 y del hecho de que todos los intervalos de la partición \mathcal{Q}^r tienen como mínimo longitud $1/(\prod_{s=1}^r \text{Card } \mathcal{P}^s)$. \square

A lo largo de toda esta sección $\{R_n\}_n$ denotará una familia realizable para algún círculo C y \mathcal{A} será la familia de las componentes de de todas las fronteras ∂R_n .

Notación 3.6.3 (Conjunto de Cantor, particiones, refinamientos). K denotará el conjunto ternario de Cantor, $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^\infty$ será la familia de componentes de $[0, 1] \setminus K$ y $N = \bigcup_{i=1}^\infty \{a_i, b_i\}$.

Una *partición* de K será una descomposición de K en una unión finita de conjuntos disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales es la intersección de algún subintervalo compacto de $[0, 1]$ con K . Como antes, si \mathcal{P}, \mathcal{Q} son particiones de K entonces decimos que \mathcal{Q} *refina* a \mathcal{P} si para cada $L \in \mathcal{Q}$ existe algún $M \in \mathcal{P}$ tal que $L \subset M$.

3.6.1. Regularización de las fronteras de las superficies R_n

Empezamos este apartado introduciendo la noción de arco regularizable. El objetivo final será ver que todo arco $A \subset \partial R_n$ es regularizable.

Definición 3.6.4 (arco regularizable). Sea $A' \subset \partial R_m$ un arco. Se dice que A' es *regularizable* si existe un embebimiento $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ tal que

- (i) $h([0, 1] \times \{0\}) = A'$ y $h([0, 1] \times \{1\}) \subset \Upsilon(\partial R_l)$ para algún l ;
- (ii) para cada $i \in \mathbb{N}$ existe algún R_k tal que $h([0, 1] \times (a_i, b_i)) \subset \text{Int } R_k \cap \Upsilon(R_k)$ y $h([0, 1] \times \{a_i, b_i\}) \subset \Upsilon(\partial R_k)$.

Una aplicación como h recibe el nombre de *regularización* de A' .

Lema 3.6.5. *Sea $p \in \partial R_m$ para algún m . Entonces existen arcos A, B, Y, Z , un entorno abierto U de p , y una familia de arcos \mathcal{E} tales que:*

(i) *las curvas $\text{Inn } A, \text{Inn } B, \text{Inn } Y, \text{Inn } Z$ son disjuntas dos a dos y existe un disco cerrado D tal que $\text{Bd } D = A \cup B \cup Y \cup Z$. Además:*

- $p \in \text{Inn } A$.
- $D \cap R_m = A \subset \partial R_m$.
- $D \cap R_l \cap W = B \subset \Upsilon(\partial R_l)$ para algún $l \in \mathbb{N}$ y algún entorno W de R_l .
- Existe una curva $(p; q) \subset U \cap \text{Int } D$ con $q \in \text{Inn } B$.
- \mathcal{E} es la familia de arcos de $\bigcup_n \Upsilon(\partial R_n)$ que están dentro de D y que intersecan a $\text{Bd } D$ exactamente en un punto de Y y en uno de Z ;

(ii) *si $u \in \text{Int } U \cap D \cap \bigcup_n \Upsilon(\partial R_n)$ entonces existe algún $E \in \mathcal{E}$ tal que $u \in E$;*

(iii) $\bigcup_n \Upsilon(R_n)$ *es denso en D ;*

(iv) \mathcal{A} *es casi regular en D .*

Demostración. Sea O un disco abierto pequeño que contiene a p (siendo $\text{Cl } O$ un disco cerrado) tal que:

$$\mathcal{A} \text{ es casi regular en } O \quad (\text{definición 3.4.5(ii)}) \quad \text{y} \quad (3.6.1)$$

$$O \subset R_m \cup \text{Cl}(\bigcup_n \Upsilon(R_n)) \quad (\text{definición 3.4.5(i)}). \quad (3.6.2)$$

También suponemos que existe un arco $A = [r; q] \subset \partial R_m$ con $p \in (r; q) \subset O$ y $r, q \in \text{Bd } O$, que descompone a O en dos discos, uno de ellos incluido en $\text{Int } R_m$ y el otro, que denotaremos por V , disjunto de R_m . En concreto téngase en cuenta que si $u \in O \cap \text{Bd } R_n$ para algún $n \neq m$ entonces $u \in \Upsilon(\partial R_n)$ y existe un arco $[r_u; q_u] \in \text{Cl } O$ con $u \in (r_u; q_u) \subset O$ y $r_u, q_u \in \text{Bd } V \setminus A$. Fijamos ahora un entorno U más pequeño y abierto de p y denotamos por \mathcal{D} a la familia de todos los arcos de antes $[r_u, q_u]$ tales que $u \in U$, ver la figura 3.2. Entonces:

$$\inf_{X \in \mathcal{D}} \text{diam } X > 0. \quad (3.6.3)$$

Definimos en \mathcal{D} una relación de equivalencia \approx como sigue. Si $X, X' \in \mathcal{D}$ entonces decimos que $X \approx X'$ si $X = X'$ o las siguientes condiciones se satisfacen:

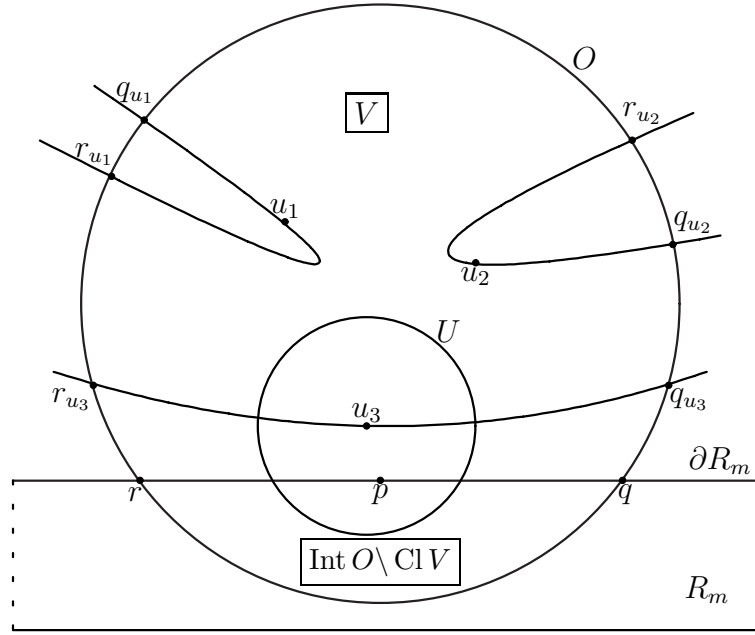


Figura 3.2: Ilustración sobre la definición de O , U , V y los arcos $[r_u; q_u]$

- o X no está incluido en el disco cerrado contenido en $\text{Cl } V$ y delimitado por X' y A , o X' no está contenido en el disco cerrado incluido en $\text{Cl } V$ y delimitado por X y A ;
- el disco cerrado contenido en $\text{Cl } V$ y limitado por X , X' y los arcos disjuntos (posiblemente degenerados) $E, E' \subset \text{Bd } V \setminus A$ que conectan sus puntos finales, no incluye ningún arco de \mathcal{D} intersectando sólo a uno de los conjuntos E o E' .

También introducimos en \mathcal{D}/\approx un orden parcial \prec como sigue, $[X'] \prec [X]$ si se satisface una de las dos alternativas siguientes:

1. $[X] = [X']$.
2. $[X] \neq [X']$ y X' pertenece a la componente de $\text{Cl } V \setminus X$ que no incluye a A .

Claramente, tanto \approx como \prec están bien definidas.

Vamos a ver que existe un máximo para este orden. Para ello hacemos notar que (3.6.1) y (3.6.3) implican que cualquier subconjunto infinito de \mathcal{D}/\approx incluye algún par tal que $[X'] \prec [X]$ y $[X'] \neq [X]$. Así que si \mathcal{D}/\approx es infinito es fácil

construir o una cadena estrictamente creciente infinita $[X_1] \prec [X_2] \prec [X_3] \prec \dots$ o bien una cadena estrictamente decreciente $[X_1] \succ [X_2] \succ [X_3] \succ \dots$. Por otro lado, si $[X'] \prec [X]$ y $[X'] \neq [X]$ entonces existe algún $[X''] \neq [X]$ con $[X''] \prec [X]$, $[X'] \not\prec [X'']$ y $[X''] \not\prec [X']$. Ahora se podrían usar las cadenas anteriores para construir un subconjunto infinito de \mathcal{D}/\approx tal que $[X] \not\prec [X']$ para cualquier par de puntos del subconjunto. Así que forzosamente \mathcal{D}/\approx debe ser finito y (3.6.2) implica que p está en la clausura de la unión de todos los arcos de alguna clase de equivalencia $[X] \in \mathcal{D}/\approx$.

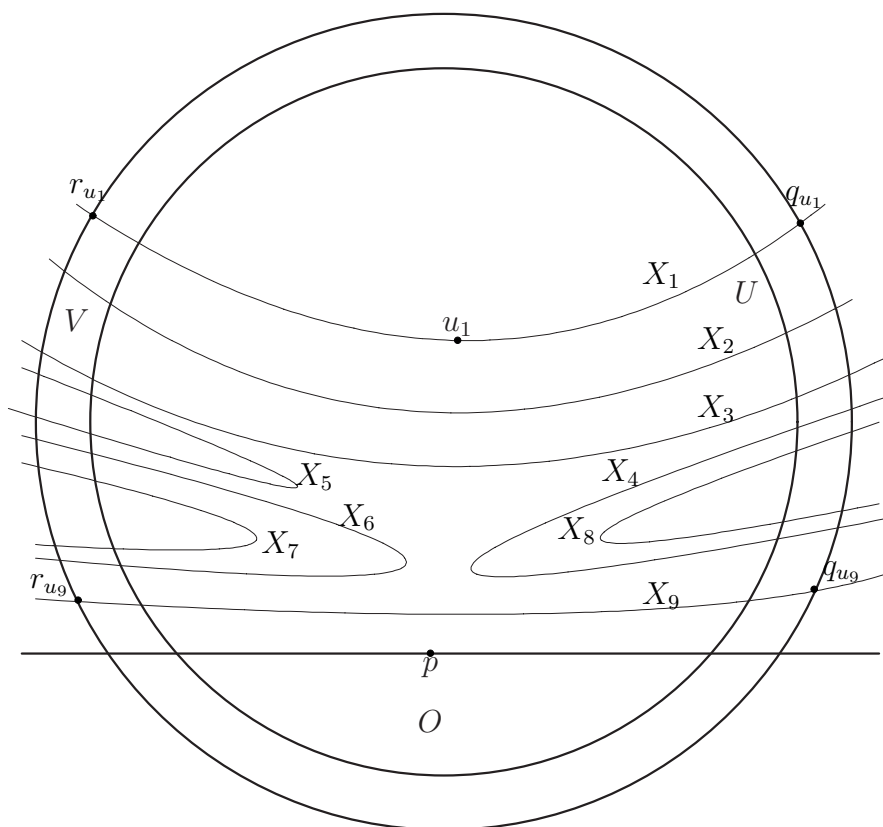


Figura 3.3: Figura ilustrativa de la relación de equivalencia \approx y del orden parcial \prec en la que se pueden observar las relaciones $X_6 \approx X_7$, $X_4 \approx X_8$, $X_1 \approx X_2 \approx X_3$ y se puede verificar que $X_2 \not\approx X_9$, $X_4 \approx X_5 \not\approx X_6$, $X_7 \approx X_5 \not\approx X_8$. Además $[X_1] \prec [X_9]$, $[X_5] \prec [X_9]$, $[X_6] \prec [X_9]$, $[X_6] \prec [X_9]$, $[X_7] \prec [X_9]$, $[X_8] \prec [X_9]$, $[X_4] \prec [X_9]$, $[X_1] \not\prec [X_5]$, $[X_5] \not\prec [X_1]$

Seguidamente mostramos que $[X]$ es el máximo para \prec . Para hacer esto tomamos una sucesión $X_r \in [X]$, $r \in \mathbb{N}$, que converge hacia p y tal que cada X_{r+1} está entre A y X_r . Por el lema 3.6.2 y el teorema de Arcelá, podemos suponer que

las parametrizaciones correspondientes, $\varphi_{X_r} : [0, 1] \rightarrow X_r \subset V$, convergen uniformemente a una aplicación continua $\varphi : [0, 1] \rightarrow V$. Además (3.6.1) implica que si $\varphi(a) = \varphi(b) = u$ entonces $\varphi([a, b]) = \{u\}$. Por lo tanto $\varphi([0, 1])$ es un arco. Incluso, por la definición 3.4.5(ii), se puede suponer que existe un entorno de $\text{Cl } O$ que es un entorno regular de p y entonces $A = \varphi([0, 1])$ (este es el único momento en la prueba en el que necesitamos la propiedad (b) de entorno regular, definición 3.4.3). Así que $[X]$ es el máximo para \prec .

Pongamos que $X \subset \Upsilon(\partial R_l)$. Modificando ligeramente O si fuera necesario, podemos asumir que:

- (i) o todos los puntos del disco R limitado por A , X y los dos arcos correspondientes en $\text{Bd } V$ no contienen puntos de $\text{Int } R_l$ suficientemente cerca de X ;
- (ii) o todos los puntos de R suficientemente cerca de X pertenecen a $\text{Int } R_l$.

No es restrictivo suponer que ocurre el primer caso, si no existiría un arco $X' \in [X] \cap \text{Cl } R$ que se puede conectar con X mediante un arco F en $\Upsilon(R_l) \cap \text{Cl } R \cap U$ con $\text{Inn } F \subset \text{Int } R_l$ (en concreto $X' \subset \Upsilon(\partial R_l)$), y de nuevo modificando si es necesario O podemos considerar que el disco limitado por A , X' y los arcos correspondientes de $\text{Bd } V$ no contiene puntos de $\text{Int } R_l$ suficientemente cerca de X' . También se puede suponer que existe una curva $(p; q) \subset U \cap R$ con $q \in \text{Inn } X$.

Ahora es suficiente con tomar $B = X$ y elegir como Y y Z los arcos mencionados más arriba de $\text{Bd } V$, con $D = \text{Cl } R$ y \mathcal{E} la familia de todos los arcos de $[X] \setminus \{X\}$ que están incluidos en D . Incluso la definición de $[X]$ y su condición de máximo para la relación \prec garantiza que \mathcal{E} es la familia de arcos de \mathcal{D} incluida en $D \setminus (A \cup B)$, y entonces la familia de arcos de $\bigcup_n \Upsilon(\partial R_n)$ que caen en D e intersecan a $\text{Bd } D$ exactamente en un punto de Y y uno de Z (puesto que cualquiera de tales arcos debe intersecar U y por lo tanto pertenecer a \mathcal{D}). Por lo tanto (i) y (ii) se satisfacen.

Las propiedades (iii) y (iv) siguen de (3.6.1) y (3.6.2). □

En los siguientes cuatro lemas el punto $p \in \partial R_m$ quedará fijo. Nuestro interés inmediato ahora es mostrar que existe un arco regularizable $A' \in \partial R_m$ tal que $p \in \text{Inn } A'$ (lema 3.6.12). Hasta entonces usamos la notación del lema 3.6.5 y suponemos que todos los arcos de \mathcal{E} están orientados de tal manera que sus puntos iniciales están en Y .

Notación 3.6.6 (familia \mathcal{F} y orden parcial sobre ella). Sea \mathcal{F} la familia de todos los arcos orientados de D con punto inicial en Y y punto final en Z y provista de estructura de espacio métrico inducida por la métrica de Fréchet (la distancia de Fréchet se denotará por d_F).

Introducimos en \mathcal{F} una relación de orden parcial $<$ como sigue: $F < F'$ si $F = F'$ o $F \neq F'$ y los conjuntos de D limitados por A y F por un lado y por F' y B por otro, tienen interiores disjuntos dos a dos. Nótese finalmente que $<$ es un orden total en \mathcal{E} .

Lema 3.6.7. *Sea $(E_r)_r \subset \mathcal{E}$ una sucesión estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) y, para cada r , sea $D_r \subset D$ el disco cerrado delimitado por A (resp. B) y E_r . Entonces $\text{Cl}(\bigcup_r D_r)$ es un disco cerrado en D limitado por A y un arco $E \in \mathcal{F}$ y $(E_r)_r$ converge a E en (\mathcal{F}, d_F) .*

Demostración. Asumamos por ejemplo que $(E_r)_r$ es estrictamente creciente. Para cada r , sea $D_r \subset D$ el disco cerrado limitado por A y E_r . Usando la equicontinuidad de parametrizaciones adecuadas, $\varphi_r = \varphi_{E_r} : [0, 1] \rightarrow E_r$, podemos encontrar una subsucesión $(\varphi_{r_l})_l$ convergiendo uniformemente a alguna aplicación $\varphi : [0, 1] \rightarrow D$, siendo $E = \varphi([0, 1])$ un arco (ver el lema 3.6.5(iv) y el lema 3.6.2). Además $E \in \mathcal{F}$ y por monotonía, el disco cerrado incluido en D y limitado por A y por E es $\text{Cl}(\bigcup_{r_l} D_{r_l}) = \text{Cl}(\bigcup_r D_r)$. Además, un argumento similar garantiza que cualquier subsucesión de $(E_r)_r$ tiene una subsucesión convergiendo hacia E . Esto es suficiente para garantizar la convergencia de toda la sucesión $(E_r)_r$. \square

Lema 3.6.8. *Existe una aplicación biyectiva $\Sigma : N \rightarrow \mathcal{E}^{13}$ que conserva el orden. Además, para cada i existe algún $k = k(i)$ tal que $\Sigma(a_i), \Sigma(b_i) \in \Upsilon(\partial R_k)$.*

Demostración. Tomemos un arco arbitrario $E \in \mathcal{E}$ y pongamos que $E \subset \Upsilon(\partial R_k)$. Usando el lema 3.6.5(i), (ii) y (iii) podemos encontrar un arco F en $\Upsilon(R_k) \cap D \cap U$ con su conjunto interno incluido en $\text{Int } R_k$, y que tiene uno de sus puntos finales en E y el otro en algún $E' \in \mathcal{E}$ con $E' \subset \Upsilon(\partial R_k)$. En concreto, el disco cerrado de D delimitado por E y E' no limita ningún otro arco de \mathcal{E} .

Asumamos por ejemplo $E < E'$, entonces definimos $\Sigma(a_1) = E$, $\Sigma(b_1) = E'$. Usando repetidamente este procedimiento y teniendo el lema 3.6.5(i) y (iii) en cuenta, podemos conseguir la aplicación deseada Σ . \square

¹³Ver la definición de N en la notación 3.6.3.

Notación 3.6.9 (arcos F_x^- y F_x^+). En vista de los lemas 3.6.7 y 3.6.8, los arcos F_x^- y F_x^+ definidos por:

- $F_x^- = \lim_{z \rightarrow x, z \in N, z < x} \Sigma(z)$ y
- $F_x^+ = \lim_{z \rightarrow x, z \in N, z > x} \Sigma(z)$

están bien definidos para cualquier $x \in K$ y pertenecen a \mathcal{F} .

Con la notación anterior, si $z = a_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ (respectivamente $z = b_i$) $F_z^+ = \Sigma(z)$ (respectivamente $F_z^- = \Sigma(z)$), también se tiene que $F_0^+ = A$, $F_1^- = B$ y

$$F_x^- \leq F_x^+ < F_y^- \leq F_y^+ \text{ siempre que } x < y.$$

Además usando el lema 3.6.5(ii),(iii), tenemos para cada x :

- $F_x^- \cap F_x^+ \neq \emptyset$;
- ni el primer ni el último punto que interseca a F_x^- y F_x^+ pertenece a U ;
- no existen arcos en F_x^- y F_x^+ intersecando únicamente en sus puntos finales.

Así que F_x^- y F_x^+ intersecan exactamente en un arco F_x , con F_x incluyendo todos los puntos de $(F_x^- \cup F_x^+) \cap U$. Está claro por la construcción que la familia $\{F_x^-, F_x^+\}_{x \in K}$ es casi regular en D .

Finalmente, si definimos en $\{F_x^-, F_x^+ : x \in K\} \subset \mathcal{F}$ una relación de equivalencia \sim identificando F_x^- y F_x^+ para cada $x \in K$, podemos volver a utilizar el argumento del lema 3.6.7 para probar que la aplicación $\Gamma : K \rightarrow \{F_x^-, F_x^+ : x \in K\} / \sim$ dada por $\Gamma(x) = [F_x^-]_{\sim} = [F_x^+]_{\sim}$ es un homeomorfismo.

Ahora mejoramos este resultado introduciendo una familia \mathcal{G} .

Definición 3.6.10 (familia \mathcal{G}). Denotaremos por \mathcal{G} a la familia de todos los subarcos de los arcos F_x , $x \in K$. Después de orientar los arcos de \mathcal{G} de la manera natural e introduciendo de la forma usual la distancia de Fréchet, \mathcal{G} se convierte en un espacio métrico.

Lema 3.6.11. *Existe una aplicación continua $\Theta : K \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\Theta(x) \subset U$ y $\Theta(x)$ es un subarco de F_x para cada $x \in K$, y $p \in \text{Inn } \Theta(0)$.*

Demostración. Fijemos un arco $X = [p, p'] \subset U \cap D$ como en el lema 3.6.5(i), que conecte p y $p' \in B$ y tal que $\text{Inn } X \subset \text{Int } D$. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que todos los puntos de D que distan menos que 2ϵ de X estén en U . Usando la continuidad uniforme de Γ podemos construir una sucesión de particiones \mathcal{K}^r de K , $r \in \mathbb{N}$, con cualquier \mathcal{K}^{r+1} refinando \mathcal{K}^r , y arcos $G_x^r \subset F_x$ tales que:

- cualquier G_x^1 tiene algún punto interno en X y sus puntos finales están a una distancia como mínimo $\epsilon/2$ y como mucho $3\epsilon/2$ de X ;
- $d_F(G_x^r, G_y^r) < \epsilon/2^{r+1}$ para cada x, y que pertenezcan al mismo $L \in \mathcal{K}^r$;
- $G_x^r = G_x^{r+1}$ siempre que x sea simultáneamente el punto menor de algún $L \in \mathcal{K}^r$ y algún $M \in \mathcal{K}^{r+1}$.

Es fácil comprobar que cualquier sucesión $(G_x^r)_r$ converge a un arco no degenerado $G_x \subset F_x$ y que la aplicación $\Theta(x) := G_x$ es continua. Enfatizamos que p es el punto interno de G_0^1 que pertenece a X , por lo tanto $p \in \text{Inn } G_0$. \square

Lema 3.6.12. *Existe un arco regularizable en ∂R_m que tiene a p como un punto interno.*

Demostración. Empezaremos explicando cómo definiremos la aplicación h sobre $[0, 1] \times K$ de forma que su imagen sea la unión de todos los arcos de $\Theta(K)$, siendo Θ la aplicación del lema 3.6.11, después la extenderemos al resto de $[0, 1] \times [0, 1]$.

Puesto que Θ es continua, existe algún número real $d_1 > 0$ tal que $\text{diam}(\Theta(x)) > d_1$ para cada $x \in K$. Obsérvese que existe un entero $l(1)$, un número $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ y conjuntos finitos $P_x \subset \Theta(x)$ con $\text{Card } P_x = l(1) + 1$ y P_x incluyendo los puntos finales de $\Theta(x)$, tal que la distancia entre puntos consecutivos de cualquier P_x es mayor que ϵ y menor que $1/2$.

Para probar la afirmación anterior procedemos del siguiente modo. Se toma $\epsilon' > 0$ suficientemente pequeño para que todos los subarcos de los arcos $\Theta(x)$ con puntos finales distando menos de $2\epsilon'$ tengan diámetros menores que $\min\{d_1, 1/2\}$: esto es posible porque la familia $\{\Theta(x)\}_x$ es casi regular en D . Ahora es fácil construir conjuntos $P'_x \subset \Theta(x)$ incluyendo los puntos finales de $\Theta(x)$ tales que la distancia entre cualquier par de puntos consecutivos de P'_x es como mucho $2\epsilon'$ y la distancia entre cualquier par de puntos de P'_x es como mínimo ϵ' . Además, el punto más cercano de P'_x al punto inicial de $\Theta(x)$ es el último de los puntos de $\Theta(x)$ que está exactamente a una distancia ϵ' del punto inicial de $\Theta(x)$.

Puesto que D está acotado, existe un número $l(1)$ tal que cualquier subconjunto de D cuyos puntos estén separados dos a dos por una distancia mayor que ϵ' tiene como mucho $l(1)$ puntos (obsérvese que $l(1) \geq 3$). Ahora para construir el conjunto P_x fijamos dos puntos consecutivos, u y v , de P'_x , añadimos a P'_x un punto w_1 en $\Theta(x)$ entre u y v con $\text{dist}(u, w_1) = \text{dist}(v, w_1)$, añadimos seguidamente w_2 entre u y w_1 con $\text{dist}(u, w_2) = \text{dist}(w_1, w_2)$ y así sucesivamente, hasta que consigamos un conjunto cuyo cardinal sea $l(1) + 1$. Claramente, el número $\epsilon = \epsilon'/2^{l(1)-2}$ es el que se necesita.

Debido a la continuidad uniforme de Θ , existe una partición \mathcal{L}^1 de K tal que si $x, y \in L \in \mathcal{L}^1$ entonces $d_F(\Theta(x), \Theta(y)) < \min\{1/4, \epsilon/4\}$. Ahora, si empezamos con los puntos de los conjuntos P_x de arriba es sencillo razonar como en el lema 3.6.11 y encontrar aplicaciones continuas $\Theta_{j,L}^1 : L \rightarrow \mathcal{G}$ para cualquier $L \in \mathcal{L}^1$ y todo $1 \leq j \leq l(1)$, así que $\Theta_{j,L}^1(x) \subset \Theta(x)$ y además: el punto inicial de $\Theta_{1,L}^1(x)$ es el punto inicial de $\Theta(x)$, el punto final de $\Theta_{l(1),L}^1(x)$ es el punto final de $\Theta(x)$ y el punto final de $\Theta_{j,L}^1(x)$ es el punto inicial de $\Theta_{j+1,L}^1(x)$, $1 \leq j < l(1)$. Además, se puede suponer que $\text{diam}(\bigcup_{x \in L} \Theta_{j,L}^1(x)) < 1$ para cada $1 \leq j \leq l(1)$ y $L \in \mathcal{L}^1$.

Iteramos el proceso para encontrar una sucesión de particiones \mathcal{L}^r de K , $r \in \mathbb{N}$, una sucesión creciente $(l(r))_r$ de enteros positivos tal que cada $l(r)$ divide a $l(r+1)$ para cada r , y aplicaciones continuas $\Theta_{j,L}^r : L \rightarrow \mathcal{G}$ para cada $L \in \mathcal{L}^r$ y $1 \leq j \leq l(r)$ satisfaciendo:

- $\Theta_{j,L}^r(x) \subset \Theta(x)$; además, el punto inicial de $\Theta_{1,L}^r(x)$ es el punto inicial de $\Theta(x)$, el punto final de $\Theta_{l(r),L}^r(x)$ es el punto final de $\Theta(x)$, y el punto final de $\Theta_{j,L}^r(x)$ es el punto inicial de $\Theta_{j+1,L}^r(x)$, $1 \leq j < l(r)$;
- si $x \in M \subset L$ con $L \in \mathcal{L}^r$, $M \in \mathcal{L}^{r+1}$, y $k = s + (j-1)\frac{l(r+1)}{l(r)}$ con $1 \leq j \leq l(r)$ y $1 \leq s \leq \frac{l(r+1)}{l(r)}$, entonces $\Theta_{k,M}^{r+1}(x) \subset \Theta_{j,L}^r(x)$;
- $\text{diam}(\bigcup_{x \in L} \Theta_{j,L}^r(x)) < 1/r$ para cualquier $1 \leq j \leq l(r)$ y $L \in \mathcal{L}^r$.

Por lo tanto, para cada $t \in [0, 1]$ y $x \in K$, se puede construir una sucesión de enteros $1 \leq j_r \leq l(r)$ y una sucesión de conjuntos $L_x^r \in \mathcal{L}^r$, tales que $\frac{j_r}{l(r)} \rightarrow t$ cuando $r \rightarrow \infty$, $\{x\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} L_x^r$ y $\Theta_{j_{r+1}, L_x^{r+1}}^{r+1}(x) \subset \Theta_{j_r, L_x^r}^r(x)$ para cada x . Claramente, la aplicación $h(t, x) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \Theta_{j_r, L_x^r}^r(x)$ está bien definida y es continua en $[0, 1] \times K$.

Ahora debemos extender h al resto del conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$. Para hacer esto hacemos notar lo siguiente. Puesto que todos los arcos de $\Theta(x)$ están dentro de U , el

lema 3.6.5(ii) garantiza que para cada $\rho > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que si $u \in \Theta(a_i)$, $v \in \Theta(b_i)$ y $\text{dist}(u, v) < \delta$ entonces existe un arco $[u; v] \in U$ con $\text{diam}([u; v]) < \rho$ y $(u; v) \subset \text{Int } R_{k(i)}$ (mirar la notación del lema 3.6.8).

En concreto, si (a_i, b_i) está limitado por $L, M \in \mathcal{L}^r$ y $0 \leq j \leq l(r)$, podemos construir arcos disjuntos dos a dos X_j^i conectando los puntos finales de los arcos $\Theta_{j,L}(a_i)$ y $\Theta_{j,M}(b_i)$ (si $j = 0$ entonces los puntos iniciales de los arcos $\Theta_{1,L}(a_i)$ y $\Theta_{1,M}(b_i)$) con puntos internos en $\text{Int } R_{k(i)} \cap \Upsilon(R_{k(i)})$, y tal que si denotamos por D_j^i el disco cerrado limitado por $X_{j-1}^i, X_j^i, \Theta_{j,L}(a_i)$ y $\Theta_{j,M}(b_i)$, $1 \leq j \leq l(r)$, entonces $\text{diam}(D_j^i) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a j .

Si definimos h sobre $[0, 1] \times [0, 1]$ llevando cuidado para que extienda la definición previa sobre $[0, 1] \times K$ y aplique de manera homeomorfa cualquier rectángulo $[(j-1)/l(r), j/l(r)] \times [a_i, b_i]$ sobre D_j^i , entonces se obtiene la aplicación que buscamos. \square

Proposición 3.6.13. *Sea $A \subset \partial R_m$ un arco. Entonces A es regularizable.*

Demostración. Es suficiente con probar que si $A', A'' \subset \partial R_m$ son arcos regularizables que intersecan en un subarco propio de A' y A'' entonces $A' \cup A''$ es también regularizable, puesto que entonces se puede usar el lema 3.6.12 y un sencillo argumento de compacidad para probar que A es regularizable.

Para probar lo enunciado en el párrafo anterior, tómnese regularizaciones $h', h'' : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S$ de A' y A'' respectivamente, de forma que:

- $h'([0, 1] \times \{x\}) \cap h''([0, 1] \times \{x\})$ es un subarco propio tanto de $h'([0, 1] \times \{x\})$ como de $h''([0, 1] \times \{x\})$ para cualquier $x \in K$;
- para cualquier componente (a_i, b_i) de $[0, 1] \setminus K$ existe algún R_k tal que $h'([0, 1] \times [a_i, b_i]) \cup h''([0, 1] \times [a_i, b_i])$ es un disco cerrado de $\Upsilon(R_k)$.

Claramente tales regularizaciones existen: esencialmente sólo es necesario tomar regularizaciones de A' y A'' cuyas imágenes estén muy próximas a ellos¹⁴ y reparame-trizar respecto a la segunda variable.

Obsérvese que la función $t : K \rightarrow \mathbb{R}$ que aplica cada $x \in K$ a la correspondiente $t = t(x)$, de forma que $h'(t, x)$ es el punto final de $h'([0, 1] \times \{x\}) \cap h''([0, 1] \times \{x\})$ perteneciente a $h'([0, 1] \times \{x\})$ es continua. Ahora es fácil definir un homeomorfismo $h : [0, 1] \times K \rightarrow h'([0, 1] \times K) \cup h''([0, 1] \times K)$ que aplica $[0, 1] \times \{x\}$ sobre $h'([0, 1] \times$

¹⁴**Nota por eliminar:** ¿cuyas imágenes estén muy próximas a ellos? Explicar

$\{u\}) \cup h''([0, 1] \times \{x\})$ y tal que $h(0, x) = h'(0, x)$ y $h(1, x) = h'(1, x)$ para cada x . Entonces podemos extender h (como en la parte final de la prueba del lema 3.6.12) a un homeomorfismo $h : [0, 1] \times K \rightarrow h'([0, 1] \times K) \cup h''([0, 1] \times K)$ que satisface la definición 3.6.4. \square

3.6.2. Construcción del flujo

Sea $\{A_l\}_{l=1}^{\infty}$ la familia de componentes de todas las fronteras de giro correspondientes a las secciones de giro de todas las superficies R_n y fijemos un “lado izquierdo” y un “lado derecho” de C . Usando la proposición 3.6.13 es fácil construir embebimientos, $h_l : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow S$, tales que para cada l :

- $h_l(\{0, 1\} \times [-1, 1]) \subset C$;
- $h_l([0, 1] \times [-1, 0])$ es la sección de giro que incluye a A_l ;
- $h_l|_{[0,1] \times [0,1]}$ es una regularización de A_l ;
- si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, $h_l((0, \epsilon) \times [-1, 1])$ está en el lado derecho de C y $h_l((1 - \epsilon, 1) \times [-1, 1])$ está sobre el lado izquierdo de C .

Ahora se construye para cada l la familia \mathcal{B}_l de arcos $\{h_l([0, 1] \times \{x\})\}_x \in I_l$, con I_l inductivamente definido por $I_1 = [-1, 1]$ y $I_m \subset [-1, 1]$ es el intervalo maximal que incluye a 0 en su clausura y tal que $h([0, 1] \times I_l) \setminus C$ no interseca ningún arco de \mathcal{B}_l para $l < m$ (o $I_m = \emptyset$ si no existe tal intervalo). Denotemos por \mathcal{B} a la familia de todas las curvas que son una unión maximal de arcos de $\bigcup_l \mathcal{B}_l$ (en el caso en el que el punto final de uno de los arcos de la curva pertenece sólo a ese arco entonces lo quitamos de la curva).

Después de orientar las curvas de \mathcal{B} de forma que se aproximen a C por su lado izquierdo y salgan de C por su lado derecho, es fácil comprobar que \mathcal{B} es una familia de curvas en S orientable, completa y regular en el sentido de Whitney. Se usa ahora el teorema de Whitney (observación 3.4.1) para obtener el flujo Φ correspondiente.

3.6.3. Final de la prueba

Ahora debemos ver que el flujo Φ anterior tiene a Ω como un conjunto ω -límite de uno de sus puntos recurrentes, es topológicamente equivalente a un flujo suave

definido sobre la superficie S y que Ω no puede ser el conjunto ω -límite de una órbita no recurrente para cualquier flujo definido sobre S . Dividimos por lo tanto esta sección en tres apartados.

Existe un punto $p \in \Omega$ tal que $\omega_\Phi(p) = \Omega$

Sea $\{V_r\}_{r=1}^\infty$ una base numerable de entornos sobre S y sean $\{V_{r_s}\}_s$ los entornos de la base que intersecan a Ω . Obsérvese que (después de quitar sus puntos finales) cualquier componente de $\Upsilon(\partial R_m)$ es una órbita de Φ . Entonces se puede usar la definición 3.4.5(iii) y la proposición 3.6.13 para construir una familia $\{D_s\}_s$ de discos cerrados con $D_{s+1} \subset D_s$ para cualquier s , todos intersecando a Ω , con diámetros tendiendo hacia 0 y tales que las órbitas de todos los puntos de D_s intersecan V_{r_s} .

Sea $\{p\} = \bigcap_s D_s$, entonces $p \in \Omega$ y la clausura de su órbita contiene a Ω . Incluso, dicha clausura debe coincidir con Ω porque Ω es claramente invariante. Entonces o $\alpha_\Phi(x) = \Omega$ o $\omega_\Phi(x) = \Omega$. Después de invertir si es necesario la orientación del flujo Φ , obtenemos que $p \in \omega_\Phi(p) = \Omega$.

Φ es topológicamente equivalente a un flujo suave

Ahora probamos que Φ es topológicamente equivalente a un flujo suave definido sobre la superficie S . Según el teorema de Gutiérrez [Gut86], debemos probar que cualquier conjunto minimal de Φ es trivial. Asumamos que M es un conjunto minimal no trivial de Φ y tomemos $q \in M$. Entonces $q \in \Omega$, ya que en caso contrario al no ser q un punto singular, $q \in \text{Int } R_k$ para algún k . Puesto que Ω es invariante y $\text{Bd } R_k \subset \Omega$, $\text{Int } R_k$ es invariante. Entonces la restricción de Φ a $\mathbb{R} \times \text{Int } R_k$ es un flujo sobre $\text{Int } R_k$ que tiene un punto recurrente no trivial, lo que es imposible para flujos planos.

Por lo tanto $\omega_\Phi(q) = M \subset \Omega = \omega_\Phi(p)$. Como ambos p y q son recurrentes no triviales, un teorema de Maier [Mai43], [ABZ96, teorema 2.3, p. 65] implica que $M = \Omega$. Pero Ω no puede ser minimal; por ejemplo, cualquier $\Upsilon(\partial R_n)$ está formado de órbitas no recurrentes de Φ . Esto es una contradicción, luego no existen conjuntos minimales no triviales.

Ω no es el ω -límite de ninguna órbita no recurrente para ningún flujo definido sobre S

Para concluir la prueba de (ii) del teorema debemos mostrar que no existe ningún flujo, $\Psi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$, que satisfaga $\omega_\Psi(u) = \Omega$ para algún $u \notin \Omega$. En vista de la proposición 3.6.13 podemos asumir que $u \in \text{Int } R_k$ para algún k . Puesto que $\text{Bd } R_k \subset \Omega$ la órbita competa de u está en $\text{Int } R_k$, esto significa que $\text{Bd } R_k = \Omega$. Pero esto no es posible ya que, por la proposición 3.6.13, si $v \in \partial R_k$ entonces existen puntos de Ω tan próximos a v como se quiera (que no pueden pertenecer a $\text{Bd } R_k$ porque R_k es una superficie).

3.7. Todas hipótesis del teorema son necesarias

En esta sección queremos dejar claro que aunque son varias las hipótesis involucradas en el teorema ninguna de ellas es redundante. Como hemos comentado en la sección 3.4 (página 92) es posible encontrar sobre \mathbb{T}^2 familias, $\{R_n\}_{n=1}^\infty$, satisfaciendo dos de las tres condiciones de la definición 3.4.5 y tal que $\text{Bd } \bigcup_n R_n$ no es un conjunto ω -límite para ningún flujo sobre \mathbb{T}^2 . Incluso en uno de los casos es posible poner un ejemplo de tales familias sobre \mathbb{S}^2 .

En los apartados siguientes ponemos ejemplos de esas familias, no pretendemos hacer una demostración exhaustiva de que las familias que damos están en las condiciones exigidas, nos contentaremos con describirlas.

Durante esta sección necesitaremos el flujo, $\widehat{\Phi}_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, obtenido modificando el de Denjoy, $\Phi_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, (ver apartado 3.2.4) y cuyas propiedades se pueden ver en la página 114.

Por otro lado también necesitaremos un flujo en la esfera que tiene una construcción similar a la del flujo de Denjoy. Aquí por similar entenderemos lo siguiente: se parte de una foliación irracional en la esfera y luego se realiza un procedimiento de *blowing up* de una de sus órbitas que es densa en \mathbb{S}^2 . Los detalles de esta construcción se pueden seguir en [ABZ96, sección 3.3] y el flujo obtenido de esta forma, que denotaremos por $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, tiene las siguientes propiedades:

1. Existe un conjunto $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ tal que si $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \Omega$ entonces $\omega_\Psi(x) = \alpha_\Psi(x) = \Omega$.
2. Para todo $x \in \Omega$ se tiene que x es singular, si $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \Omega$ entonces x no es singular.

3. Para el ecuador, C , de \mathbb{S}^2 se tiene que $(\mathbb{S}^2 \setminus \Omega) \cap C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n$, siendo los G_n intervalos abiertos transversales al flujo. Además $\mathbb{S}^2 \setminus \Omega$ tiene una única componente conexa.
4. Los intervalos G_n se les puede numerar de tal manera que si por $f : D \subset C \rightarrow C$ denotamos la aplicación de Poincaré del flujo Ψ asociada a C , entonces $f(G_n) = G_{n+1}$.
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam } G_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{diam } G_n = 0$.
6. $C \cap \Omega$ es un conjunto de Cantor.

3.7.1. Familias que satisfacen las condiciones (ii) y (iii) de la definición 3.4.5

Las familias R_n giran alrededor de C

Para dar un ejemplo de familia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisface las condiciones (ii) y (iii) de la definición 3.4.5 haremos una modificación del flujo de Denjoy $\Phi_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, similar a la que se hizo en el apartado 3.2.4, pero eligiendo un conjunto D diferente al que se tomaba allí.

Fijamos bisucesiones, $(l_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $(m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, que satisfagan las siguientes propiedades:

1. $\lim_{i \rightarrow +\infty} l_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} m_i = +\infty$ y $\lim_{i \rightarrow -\infty} l_i = \lim_{i \rightarrow -\infty} m_i = -\infty$.
2. $l_i < m_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
3. Las dos bisucesiones son crecientes y además para cada $i \in \mathbb{Z}$:

$$\dots < l_i < m_i < l_{i+1} < m_{i+1} < \dots$$

4. Si para cada $i \in \mathbb{Z}$ definimos los conjuntos

$$C_i = \{l_i, l_{i+1}, \dots, m_i - 1\}$$

$$D_i = \{m_i, m_{i+1}, \dots, l_{i+1} - 1\}$$

entonces:

$$a) \max_{j \in \{0, \dots, l_i - 1\}} \text{dist}(\bigcup_{k \in C_i} G_k, G_j) < \frac{1}{|i|+1},$$

$$b) \max_{j \in \{0, \dots, m_i - 1\}} \text{dist}(\bigcup_{k \in D_i} G_k, G_j) < \frac{1}{|i|+1}$$

Ahora se modifica el flujo de Denjoy cambiando en el apartado 3.2.4 el conjunto D por $\text{Cl} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{k_i \in D_i} G_{k_i}$ y se obtiene un flujo

$$\widehat{\Phi}_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$$

con las siguientes propiedades:

1. $\widehat{\Phi}_f$ no tiene órbitas recurrentes no triviales ni órbitas periódicas.
2. Si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son las componentes de $g^{-1}(\mathbb{T}_E^2 \setminus \text{Sus}(\Omega))$ que intersecan a algún elemento del conjunto $\{G_{k_i} : k_i \in C_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ entonces $\text{Bd} \bigcup_n S_n = \text{Sus}(\Omega)$

Si ahora tomamos para cada $n \in \mathbb{N}$ R_n como la unión de S_n con las órbitas no singulares de $\text{Bd} S_n$ entonces $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de superficies que satisface las condiciones (ii) y (iii) de la definición 3.4.5. Además esta familia también satisface que cada R_n gira alrededor del círculo $C = g^{-1}(\{[\mathbb{S}^1(1+a) \times \{1\}]\}_E)$.

Para todo m se tiene $\mathbf{R}_m \cup \text{Cl}(\bigcup_n \Upsilon(\mathbf{R}_n))$ es un entorno de $\partial \mathbf{R}_m$

Para dar un ejemplo de familia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisface las condiciones (ii) y (iii) de la definición 3.4.5 haremos una modificación del flujo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ antes descrito. Esta modificación será análoga a la que le hicimos en la sección 3.2.4 al flujo de Denjoy.

Así que fijamos un punto $y \in (\Omega \cap C) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n$ y una sucesión de números enteros $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tales que:

1. La sucesión de intervalos $(G_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ está ordenada de forma creciente (ver la figura 3.1).
2. Tanto $+\infty$ como $-\infty$ son puntos de acumulación de $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Todos los puntos de los intervalos G_{n_k} son menores que $y \in \text{Cl} G_m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$.
4. $y \in \text{Bd} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{n_k}$.
5. $F := \text{Cl} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{n_k} = \{y\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Cl} G_{n_k}$.

Ahora haciendo las mismas operaciones que en la sección 3.2.4 se puede construir un flujo

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

que verifique que todos los puntos de F son singulares para $\tilde{\Psi}$ y que las órbitas de Ψ que no intersecan al conjunto F siguen siendo órbitas de $\tilde{\Psi}$.

Definimos ahora la relación de equivalencia \sim_F sobre \mathbb{S}^2 de la siguiente forma: $x \sim_F y$ si y sólo si

1. $x = y$ o,
2. x e y pertenecen a la misma componente conexa de F .

Aplicando ahora el lema 3.2.2 se puede ver que $\mathbb{S}_F^2 := \mathbb{S}^2 / \sim_F$ y \mathbb{S}^2 son homeomorfos. Denotaremos por $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}_F^2$ a la aplicación cociente, por $\{x\}_F$ a la clase de equivalencia de un punto $x \in \mathbb{S}^2$ y para cada conjunto $A \subset \mathbb{S}^2$, $\{A\}_F$ representa el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A , es decir $\{A\}_F = \{p(x) : x \in A\}$.

Es fácil ver que el flujo $\hat{\Psi} : \mathbb{R} \times (\mathbb{S}_F^2 \setminus \{F\}_F) \rightarrow \mathbb{S}_F^2 \setminus \{F\}_F$ definido por:

$$\hat{\Psi}(t, \{x\}_F) = p(\tilde{\Psi}(t, p^{-1}(x))),$$

está bien definido. Éste lo podemos extender a todo \mathbb{S}_F^2 con ayuda del lema 1.3.A y la extensión la seguimos llamando $\hat{\Psi}$ para no recargar la notación.

Finalmente si llamamos $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}_F^2$ al homeomorfismo existente entre \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}_F^2 , utilizamos el flujo $\hat{\Psi}$ para definir otro con las mismas propiedades sobre \mathbb{S}^2 :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (t, x) &\longrightarrow g^{-1}(\hat{\Psi}(t, g(x))). \end{aligned}$$

De la definición del flujo se siguen fácilmente las siguientes propiedades:

1. El conjunto $g^{-1}(\mathbb{S}_F^2 \setminus \{\Omega\}_F)$ es denso en \mathbb{S}^2 y tiene infinitas componentes conexas, cada una de ellas homeomorfa a un disco abierto.
2. $g^{-1}(\{\Omega\}_F)$ está formado por puntos singulares y no es la frontera de ninguna componente conexa de $g^{-1}(\mathbb{S}_F^2 \setminus \{\Omega\}_F)$.
3. Si $\{S_n\}_n$ es el conjunto de las componentes conexas de $\mathbb{S}_F^2 \setminus \{\Omega\}_F$ y para cada n R_n es la unión de S_n con los puntos de su frontera que no pertenecen a $\{F\}_F$, entonces $\{R_n\}_n$ es una familia que satisface (ii) y (iii) de la definición 3.4.5 y que además para todo m se tiene $R_m \cup \text{Cl}(\bigcup_n \Upsilon(R_n))$ es un entorno de ∂R_m .

3.7.2. Familias que satisfacen las condiciones (i) y (iii) de la definición 3.4.5

Para la construcción de este ejemplo fijamos el flujo de Denjoy, $\Phi_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, el círculo no orientable $C = [\mathbb{S}^1(1+a) \times \{1\}]^{15}$ y la notación que manejábamos en el apartado 3.2.4, en concreto recordamos que el ω -límite de cualquier punto era un conjunto $\text{Sus}(\Omega)$ cuyo complementario tenía una única componente conexa.

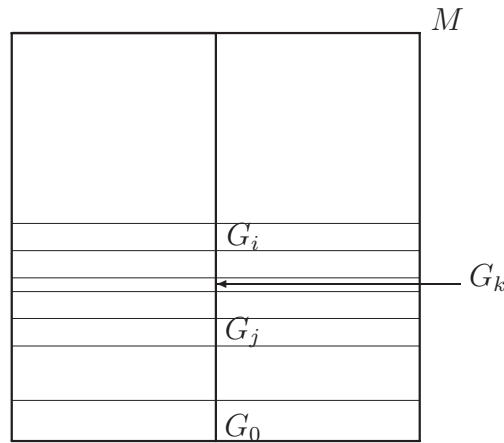


Figura 3.4: Entorno paralelizable M que contiene a $\mathbb{S}^1(1+a)$

Fijemos un disco que contenga al círculo C , M , ver la figura 3.4. Para obtener las superficies $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ modificaremos la estructura del flujo Φ_f en el entorno M como se describe en la figura 3.5 y que básicamente consiste en:

- deformamos el entorno M , ampliándolo por su parte central hasta conseguir un círculo de longitud de $1 + 2a$;
- pegamos en la frontera de cada G_j un segmento L_j de la misma longitud que G_j ;
- deformamos el conjunto $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Sus}(\Omega)$ cerca de cada segmento L_j tal y como se muestra en negro en la figura 3.6;

¹⁵Por $C = [\mathbb{S}^1(1+a) \times \{1\}]$ denotamos al conjunto formado por las clases de equivalencia cuyos representantes están en $\mathbb{S}^1(1+a) \times \{1\}$, siendo la relación de equivalencia aludida la que se definió para construir $M_f = \mathbb{T}^2$.

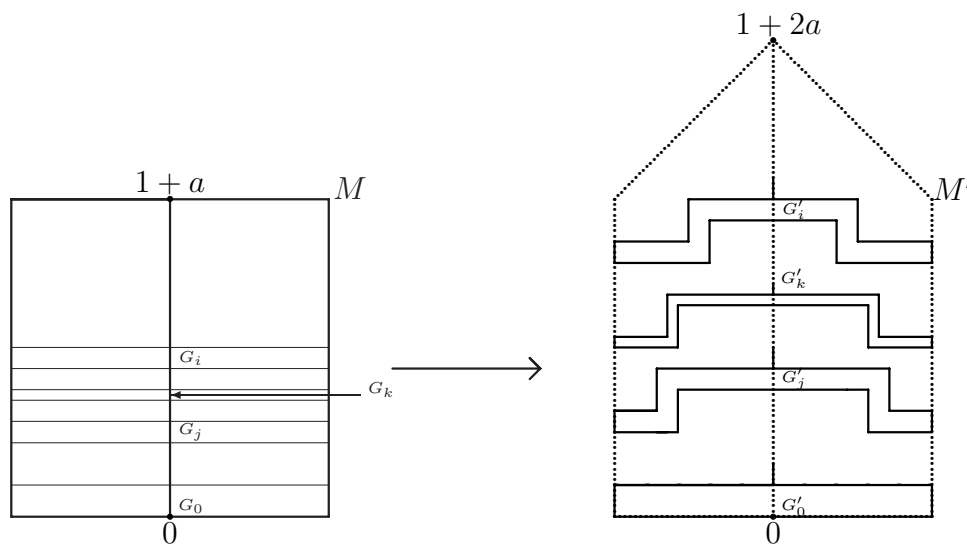


Figura 3.5: Entorno paralelizable M que contiene a $S^1(1+a)$ y su modificación

- si Ω^* es el conjunto que obtenemos modificando a $\text{Sus}(\Omega)$ junto con los segmentos L_j introducidos, debemos tener que $\mathbb{T}^2 \setminus \Omega^*$ tiene una única componente conexa A y que $\text{Bd } A = \Omega^*$;

Ahora copiando la estructura de las órbitas del flujo de Denjoy contenidas en $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Sus}(\Omega)$ sobre el conjunto $\mathbb{T}^2 \setminus \Omega^*$ y extendiendo este flujo a todo \mathbb{T}^2 con el teorema 1.3.A, obtenemos un nuevo flujo $\Phi^1 : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ con las propiedades:

- Para todo $u \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega^*$, $\omega_{\Phi^1}(u) = \Omega^*$.
- Todos los puntos de Ω^* son singulares.

Finalmente se hace una modificación de Φ^1 para obtener $\widetilde{\Phi}^1 : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de la misma manera que modificamos Φ_f para obtener $\widetilde{\Phi}_f$, pero aquí cambiando los G_{n_k} por los G'_{n_k} y exigiendo que $|n_k - n_j| > 2$ para cualesquiera k y j . El flujo $\widetilde{\Phi}^1$ tendrá las siguientes propiedades:

1. Existe un conjunto cerrado con interior vacío, $\widetilde{\Omega}^{*16}$, tal que $\mathbb{T}^2 \setminus \widetilde{\Omega}^*$ tiene infinitas componentes conexas $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

¹⁶Este conjunto es el modificado de Ω^* según la construcción que se hacía en el apartado 3.2.4

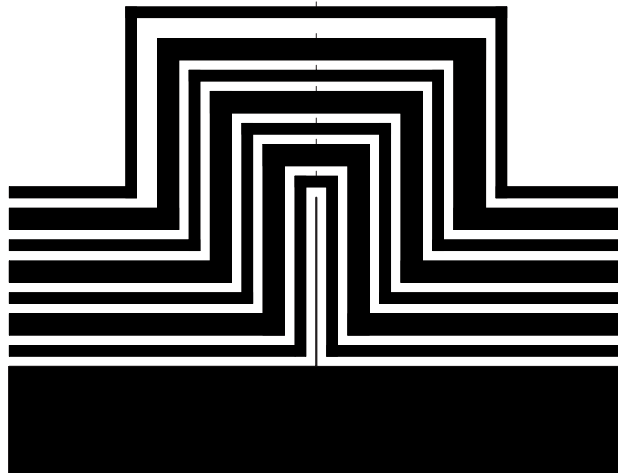


Figura 3.6: En negro se muestra la deformación que se le hace a $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Sus}(\Omega)$ cerca de el segmento L_j en la parte inferior de la figura. Esta deformación se repite en los demás L_k , aunque no se puede apreciar en el dibujo.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos R_n como la unión de S_n con los puntos de ∂S_n que no pertenecían a ningún G'_{n_k} .

Ahora la familia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica las condiciones (i) y (iii) de la definición 3.4.5, pero no la (ii), en concreto la familia no es regular en el sentido de Whitney porque los puntos de ∂R_n en los que hemos pegado los segmentos no admiten entornos regulares de Whitney. En concreto no existen esos entornos porque no se satisface la condición (b) de la definición 3.4.3, aunque cualquier entorno de los puntos de ∂R_n sí satisface la condición (a). Además es fácil ver que ningún flujo definido sobre \mathbb{T}^2 puede tener a $\text{Bd} \bigcup_n R_n$ como un conjunto ω -límite.

Recordamos que en la página 92, apartado 3, asegurábamos que existían contraejemplos que fallaban en la condición (ii) de la definición 3.4.5 por dos motivos: por no satisfacerse la propiedad (a) de la definición 3.4.3 o por no verificarse la condición (b). En los párrafos precedentes hemos conseguido el ejemplo de familias $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que no verifican la condición (b) pero sí la (a), se trata ahora de encontrar una familia que verifique la condición (b), pero no la (a). Para ello fijaremos como antes del flujo de Denjoy, $\Phi_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, el círculo no orientable $C = [\mathbb{S}^1(1+a) \times \{1\}]$ y el entorno que contiene al círculo C , M , ver la figura 3.4.

Ahora se trata de modificar la estructura del flujo Φ_f en el entorno M como se

esboza en la figura 3.7 para obtener un flujo $\Phi^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ con las propiedades:

- Si Ω^{**} es el conjunto modificado de $\text{Sus}(\Omega)$, para todo $u \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega^{**}$, $\omega_{\Phi^2}(u) = \Omega^{**}$.
- Todos los puntos de Ω^{**} son singulares.

Seguidamente se hace una modificación de Φ^2 para obtener $\widetilde{\Phi}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de la misma manera que modificamos Φ_f para obtener $\widetilde{\Phi}_f$, exigiendo que $|n_k - n_j| > 2$ para cualesquiera k y j . El flujo $\widetilde{\Phi}^2$ tendrá las siguientes propiedades:

1. Existe un conjunto cerrado con interior vacío, $\widetilde{\Omega}^{**17}$, tal que $\mathbb{T}^2 \setminus \widetilde{\Omega}^{**}$ tiene infinitas componentes conexas $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos R_n como la unión de S_n con los puntos de ∂S_n que no pertenecen a ningún G_{n_k} .

La familia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica las condiciones (i) y (iii) de la definición 3.4.5, pero no la (ii) ya que los puntos de D no admiten entornos regulares de Whitney. En concreto cualquier entorno de los puntos citados satisface la condición (b) de la definición 3.4.3 pero no la (a). Finalmente hacemos notar que ningún flujo definido sobre \mathbb{T}^2 puede tener a $\text{Bd} \bigcup_n R_n$ como un conjunto ω -límite.

3.7.3. Familias que satisfacen las condiciones (i) y (ii) de la definición 3.4.5

Este es el ejemplo más fácil de construir, para ello fijamos el flujo modificado de Denjoy

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_f : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (t, x) &\longrightarrow g^{-1}(\widehat{\Phi}_f(t, g(x))), \end{aligned}$$

construido en el apartado 3.2.4 y suponemos que la sucesión $(n_k)_k$ utilizada para construirlo satisface que $|n_k - n_j| > 2$ para cualesquiera k y j . Las propiedades de este flujo se pueden ver en la página 114.

Recordamos que el conjunto F denotaba al conjunto ω -límite de los puntos recurrentes no triviales del flujo y que $\mathbb{T}^2 \setminus F$ tiene infinitas componentes conexas

¹⁷Este conjunto es el modificado de Ω^{**} según la construcción que se hacía en el apartado 3.2.4

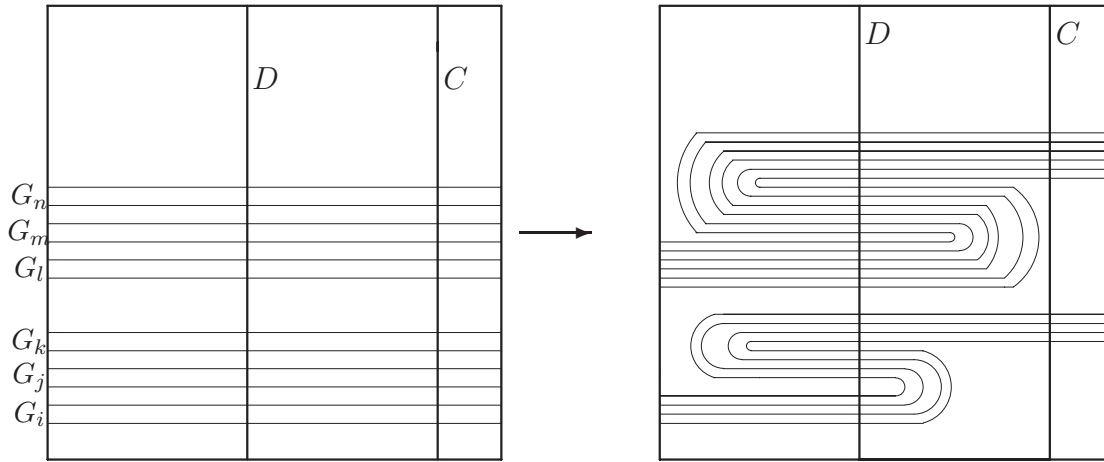


Figura 3.7: Entorno paralelizable M que contiene a dos círculos no homotópicamente nulos, C y D , y su modificación

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ahora, tomando para cada $n \in \mathbb{N}$ la superficie R_n obtenida con la unión de S_n con las órbitas regulares de $\text{Bd } S_n$, se tiene que $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia realizable para un círculo no homotópicamente nulo C tal que $\text{Bd } \bigcup_n R_n = F$.

Nuestro objetivo es construir ahora una familia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique las propiedades (i) y (ii) de la definición 3.4.5, pero que no verifique la (iii). Definiremos para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ $T_n := R_n$ y tomaremos como T_1 la superficie R_1 quitándole un segmento cerrado L , contenido en R_1 , que tiene uno de sus extremos en un punto $x \in \text{Bd } R_1 \setminus \partial R_1$ y tal que $L \setminus \{x\} \subset R_1 \setminus \partial R_1$, ver la figura 3.8.

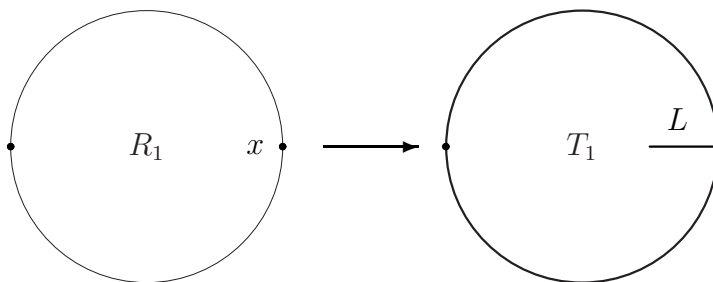


Figura 3.8: Modificación de la superficie R_1 para obtener T_1

Ahora es claro que la familia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica las propiedades (i) y (ii) de la definición 3.4.5, pero que no verifica la propiedad (iii), porque si u e v están en

$L \subset \text{Bd} T_1$ entonces se puede tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que no exista ningún arco A en $\bigcup_n \partial T_n$ que satisfaga $\text{dist}(u, A) < \epsilon$ y $\text{dist}(v, A) < \epsilon$. Además es claro que $\text{Bd} \bigcup_n T_n$ es conexo y no es el ω -límite de ningún punto de $u \in \mathbb{T}^2$ para ningún flujo definido sobre \mathbb{T}^2 .

Capítulo 4

Órbitas recurrentes sobre superficies. Transitividad

4.1. Introducción

Hasta ahora este trabajo ha fijado su atención en desvelar la estructura de los conjuntos ω -límite sobre superficies compactas y conexas en dos casos concretos:

1. conjuntos ω -límite de órbitas o puntos no recurrentes y
2. conjuntos ω -límite con interior vacío de puntos recurrentes.

Cabe destacar que los conjuntos ω -límite del primer tipo, aunque no se haya dicho explícitamente, también tienen interior vacío. En caso contrario las órbitas deberían ser recurrentes.

El objetivo de este capítulo es abordar el tercer tipo de conjuntos ω -límite que se nos pueden presentar, estos conjuntos son aquellos que tienen interior no vacío y que, por lo tanto, están generados por órbitas recurrentes.

Este problema es equivalente a otro que ha ocupado a bastantes autores y que es el de clasificar las superficies transitivas, ver sección 1.4.2 para la definición de transitividad. Esta equivalencia entre los dos problemas viene justificada por el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sea M una variedad, $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo continuo y $x \in M$. Supongamos que $O = \text{Int } \omega_\Phi(x) \neq \emptyset$, entonces O es invariante para Φ , O es conexo y $\text{Cl } O = \omega_\Phi(x)$.*

Demostración. Empezamos tomando un punto $y \in \Phi_x(\mathbb{R}) \cap O$ y como $\omega_\Phi(x)$ es invariante para el flujo Φ y $O \subset \omega_\Phi(x)$ entonces $\Phi(\mathbb{R} \times O) \subset \omega_\Phi(x)$, en concreto $\Phi_x(\mathbb{R}) = \Phi_y(\mathbb{R}) \subset \omega_\Phi(x)$.

El conjunto $\Phi(\mathbb{R} \times O)$ es abierto porque es la unión de todos los conjuntos $\Phi_t(O)$, que son abiertos ya que Φ_t es un homeomorfismo para cada valor de t .

Al ser $\Phi(\mathbb{R} \times O)$ abierto, $\Phi(\mathbb{R} \times O) \subset \omega_\Phi(x)$ y $O \subset \Phi(\mathbb{R} \times O)$ entonces $\Phi(\mathbb{R} \times O) = O$ y O es invariante. O es conexo porque es la unión de los conjuntos conexos $\{\Phi_t(O)\}_{t \in \mathbb{R}}$ y todos ellos contienen a la órbita $\Phi_y(\mathbb{R})$. Finalmente O también es denso en $\omega_\Phi(x)$ porque incluye a la órbita $\Phi_x(\mathbb{R})$. \square

Este lema explica por qué caracterizar variedades transitivas es equivalente a caracterizar conjuntos ω -límites con interior no vacío generados por órbitas recurrentes. En efecto, cualquiera de estos conjuntos ω -límite es, según el lema precedente, la clausura del interior del conjunto ω -límite, siendo este interior claramente una variedad transitiva. Además es trivial el recíproco.

El problema de encontrar flujos transitivos sobre variedades tiene una larga tradición (como ejemplo del interés que han suscitado se pueden consultar los artículos [Ano74], [OU41], [ST88a], [ST88b], [Bir31] y [Woc84] y [Bas02]). En el caso de variedades de dimensión 1, la caracterización de variedades transitivas es sencilla puesto que cualquier variedad de dimensión 1 conexa debe ser homeomorfa a una de las siguientes:

1. \mathbb{S}^1 ,
2. $[0, 1]$,
3. $(0, 1]$,
4. $(0, 1)$.

Es claro pues que cualquier variedad de dimensión 1 transitiva debe ser homeomorfa al círculo y por lo tanto la clasificación de variedades transitivas de dimensión 1 es trivial. Sin embargo, cuando subimos una dimensión el problema se complica.

Es bien conocido que el toro \mathbb{T}^2 es una superficie transitiva y que por el contrario \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 no lo son puesto que no admiten órbitas recurrentes no triviales (ver el teorema 1.4.6). Además, mediante una serie de argumentos geométricos sencillos se puede ver que el resto de superficies compactas y conexas sí que son transitivas (ver [ST88b]), sin embargo para caracterizar los conjuntos ω -límites con interior no vacío (en superficies compactas y conexas) se necesita dar una clasificación de superficies transitivas en general. Esta clasificación la hemos obtenido en [JS04d] y la vamos a presentar en este capítulo de la tesis.

Conviene recordar aquí que el concepto de minimalidad implica el de transitividad. En otras palabras, si una superficie es minimal entonces admite un flujo definido sobre ella de forma que tiene todas sus órbitas densas en la superficie. Sin embargo para que la superficies sea transitiva sólo se necesita que una de las órbitas sea densa en la superficie. No obstante la existencia de una órbita densa implica la existencia de una gran cantidad de órbitas densas, en concreto un conjunto G_δ denso de puntos cuyas órbitas son densas en la superficie. Veamos la prueba de este resultado que la haremos para espacios metrizables localmente compactos.

Lema 4.1.2. *Sea X un espacio metrizable localmente compacto y $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un flujo continuo. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Hay un punto $x \in X$ cuya órbita es densa en X .*
2. *Hay un conjunto G_δ denso de puntos en X , cada uno de los cuales tiene a X como su conjunto ω -límite y su α -límite.*

Demostración. Es claro que la única implicación no trivial es $1 \Rightarrow 2$. Veamos su justificación.

Como X es un espacio de Baire [Mun75, p. 299], sólo tenemos que encontrar conjuntos abiertos y densos $\{O_n\}_{n=1}^\infty$ en X tales que $\alpha_\Phi(y) = \omega_\Phi(y) = X$ para cada $y \in \bigcap_{n=1}^\infty O_n$.

Obsérvese que X es conexo y por lo tanto tiene una base numerable $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ de conjuntos abiertos. Tomemos $x \in X$ con $\text{Cl } \Phi_x(\mathbb{R}) = X$ y fijemos cualquier par, U_m y U_n , de estos conjuntos.

Puesto que $\text{Cl } \Phi_x(\mathbb{R}) = X$ existen puntos $a = a_{m,n}$ y $z = z_{m,n}$ en $\Phi_x(\mathbb{R}) \cap U_m$ y números $t_a < -n$ y $t_z > n$ tales que:

$$\Phi_a(t_a) \in U_n \quad \text{y} \quad \Phi_z(t_z) \in U_n.$$

Además, por la continuidad de Φ se tiene que $\Phi_u(t_a) \in U_n$ y $\Phi_v(t_z) \in U_n$ para cada $u \in W_a$ y $v \in W_z$, siendo W_a y W_z pequeños entornos de a y z respectivamente. Ahora es suficiente con tomar

$$O_n = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} W_{a,m,n} \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} W_{z,m,n} \right).$$

□

Después de este lema es conveniente introducir el concepto de transitividad fuerte que se usa en [ST88a].

Definición 4.1.3 (transitividad fuerte). Un flujo Φ sobre una variedad M se dice que es fuertemente transitivo cuando existe un subconjunto $N \subset M$ que es G_δ denso en M tal que para cada punto $p \in N$ se tiene que $\omega_\Phi(p) = M$.

Así que en vista del lema anteriormente enunciado y probado se tiene que la transitividad y transitividad fuerte son conceptos equivalentes. En cambio la minimalidad sí que no es equivalente a la transitividad, como muestra de ello se puede poner que todas las superficies compactas y conexas diferentes de \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{B}^2 son transitivas (ver por ejemplo [ST88b]), sin embargo la única superficie compacta y conexa minimal es el toro (ver [Sch63]).

Como hemos comentado anteriormente, nuestro objetivo es clasificar las superficies transitivas en general, cabe comentar que otro problema que se ha planteado en la literatura es el de clasificar las superficies minimales. En este sentido es importante mencionar que Benièrre probó en su tesis doctoral (ver [Ben98]) una caracterización de superficies orientables minimales. En concreto probó que una superficie orientable es minimal si y sólo si es de género mayor que cero. En cambio no quedaron caracterizadas allí las superficies minimales no orientables.

Para acabar la introducción de este capítulo enunciamos el teorema de clasificación de superficies transitivas, previamente se introduce la noción precisa de círculos cortándose (transversalmente) en un punto.

Definición 4.1.4 (curvas de Jordan cruzadas). Dos curvas de Jordan α y β sobre una superficie S *intersecan o se cortan transversalmente en x* si:

1. $x \in \alpha \cap \beta$ y

2. hay un disco D , $x \in D$, tal que tanto $\gamma = \alpha \cap D$ como $\delta = \beta \cap D$ son arcos abiertos que descomponen a D en dos discos D_1^γ, D_2^γ y D_1^δ, D_2^δ respectivamente.

Los arcos γ y δ se descomponen por x en dos arcos abiertos γ_1, γ_2 y δ_1, δ_2 respectivamente. Además $\delta_i \subset D_i^\gamma$ y $\gamma_i \subset D_i^\delta$ para $i = 1, 2$.

Cuando dos curvas de Jordan orientables intersecan (transversalmente) en un único punto entonces nos referimos a ellas como dos *curvas de Jordan cruzadas*. También diremos que ambas curvas *se cruzan*.

Teorema 4.1.A. *Sea S una superficie conexa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) S es transitiva para un flujo suave;
- (ii) S es transitiva;
- (iii) S no es homeomorfa a \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 , ni a ninguna superficie contenida en \mathbb{B}^2 ;
- (iv) S tiene dos círculos que se cruzan.

Este teorema admite una versión simplificada si sólo tenemos en cuenta superficies orientables:

Teorema 4.1.B (versión orientable). *Sea S una superficie conexa y orientable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) S es transitiva para un flujo suave;
- (ii) S es transitiva;
- (iii) S no es homeomorfa a ninguna superficie contenida en \mathbb{S}^2 ;
- (iv) S tiene dos círculos que se cruzan.

Naturalmente el teorema 4.1.B sigue del resultado de Benièrre sobre superficies minimales. Este resultado está enunciado en el libro de Nikolaev y Zhuzhoma [NZ99, ver teorema 11.7.1, p. 252], pero la prueba presentada sólo es válida para superficies orientables de género finito. Además se requieren herramientas bastante fuertes (resultados de Falconer sobre medidas de Hausdorff y transformaciones del intervalo) que en la prueba de nuestros teoremas no son necesarias.

4.2. Prueba de la caracterización de superficies transitivas (teoremas 4.1.A y 4.1.B)

Antes de entrar en los detalles de la demostración es necesario recordar algunos resultados topológicos sobre la esfera que se necesitarán, los recogemos en el enunciado del siguiente teorema. En los argumentos que siguen se usarán estos resultados, que son intuitivamente obvios aunque bastante difíciles de probar.

- Teorema 4.2.1.**
1. *Cualquier curva de Jordan sobre la esfera la descompone en dos discos, cada uno de los cuales tiene a la curva de Jordan como frontera (teorema de la curva de Jordan).*
 2. *Cualquier homeomorfismo entre dos círculos de una esfera se puede extender a un homeomorfismo sobre toda la esfera (teorema de Schönflies).*
 3. *Si quitamos los interiores de dos discos cerrados de la esfera entonces el espacio resultante es un anillo cerrado (teorema del anillo en dimensión 2).*
 4. *Ningún arco descompone a la esfera en más de una componente conexa.*

Demostración. Una referencia adecuada para ver este tipo de resultados geométricos es [Kur68, capítulo 10]. □

4.2.1. Simplificaciones previas

Para empezar es importante darse cuenta que es suficiente con realizar la prueba bajo la condición adicional $\partial S = \emptyset$. Esto se debe a que si el teorema es cierto para superficies sin frontera entonces sigue siendo cierto para superficies arbitrarias debido a que una superficie S satisface (i) (respectivamente (ii), (iii) o (iv)) si y sólo si $R = S \setminus \partial S$ satisface (i) (respectivamente (ii), (iii) o (iv)). Veámoslo.

Para las propiedades (i) y (ii) nuestra afirmación sigue del lema 1.3.A, y para la propiedad (iv) la observación también es cierta porque si S tiene dos curvas de Jordan que se cruzan, entonces pueden ser fácilmente modificadas (usando por ejemplo que, de acuerdo con el *teorema del collar*, ver páginas 113 y 114 de [Hir88], existe un embebimiento $e : \partial S \times [0, 1) \rightarrow S$ con $e(x, 0) = x$ para cualquier $x \in \partial S$) para conseguir dos curvas de Jordan que se cruzan en R .

Se necesita llevar un poco más de cuidado en la propiedad (iii). Claramente, es suficiente con mostrar que si R se puede embeber en \mathbb{B}^2 (respectivamente en \mathbb{S}^2) entonces S se embebe en \mathbb{B}^2 (respectivamente en \mathbb{S}^2) también. Para llevar a cabo esto usamos de nuevo el teorema del collar para embeber S en una superficie sin frontera combinatoria T (que es orientable si S es orientable) tal que $T \setminus S \cong \partial S \times (0, 1)$.

Es sencillo comprobar que si α y β son dos curvas de Jordan que se cruzan en T entonces ambas deben intersectar a R y por lo tanto se pueden modificar para conseguir dos curvas de Jordan que se cruzan en R . Puesto que R no puede tener dos curvas de Jordan cruzándose (recordamos que estamos asumiendo que el teorema 4.1.A es cierto en el caso de frontera vacía), T tampoco puede tenerlas y podemos aplicar el teorema 4.1.A a (la superficie sin frontera) T para concluir que se puede embeber en \mathbb{B}^2 (resp. en \mathbb{S}^2). Por lo tanto S se puede embeber en \mathbb{B}^2 (resp. en \mathbb{S}^2) como queríamos probar.

Así que hemos reducido nuestro problema a probar el teorema 4.1.A bajo la condición adicional $\partial S = \emptyset$.

4.2.2. Implicaciones (i) \Rightarrow (ii) y (ii) \Rightarrow (iii)

La implicación (i) \Rightarrow (ii) es trivial, y la demostración de (ii) \Rightarrow (iii) sigue del teorema 1.4.6, que nos dice que en \mathbb{S}^2 , \mathbb{B}^2 y \mathbb{P}^2 no existen órbitas recurrentes no triviales.

4.2.3. Demostración de la implicación (iii) \Rightarrow (iv)

Procedemos con la implicación (iii) \Rightarrow (iv). Aquí vamos a demostrar que si S no tiene curvas de Jordan cruzándose en un punto entonces es homeomorfa a \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 o una región de \mathbb{B}^2 (o, si S es orientable, a una región de \mathbb{S}^2).

Consideremos el embebimiento $e : S \rightarrow \mathbb{S}_\Sigma^2$ del teorema 1.5.17. La no existencia de curvas de Jordan que se cruzan implica que $i(\Sigma) = 0$ y $j(\Sigma) \leq 2$. Vemos la demostración de esta afirmación por reducción al absurdo.

Asumamos que $i(\Sigma) \neq 0$ y que $\{\alpha_1, \beta_1\} \subseteq \Sigma$ (revisar la notación 1.5.12 en la página 51). Tomamos un conjunto totalmente desconexo y cerrado $C \subset \mathbb{S}^2 \setminus (\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Cl } D_\sigma)$ para el que $S \cong \mathbb{S}_\Sigma^2 \setminus [C]_\Sigma$. Además, puesto que C es totalmente desconexo y no puede separar a la esfera \mathbb{S}^2 (útese por ejemplo [Kur68, p. 189 y p. 539, Th. 5]) y existe un arco $\delta \subset \mathbb{S}^2$ que tiene sus extremos en α_1 y β_1 respectivamente y que no interseca a ningún otro punto de $C \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Cl } D_\sigma$.

Debido a que α_1 y β_1 tienen orientaciones opuestas, $[\delta]_\Sigma$ y $[\alpha_1]_\Sigma = [\beta_1]_\Sigma$ son curvas de Jordan que se cruzan en un punto en $\mathbb{S}_\Sigma^2 \setminus [C]_\Sigma$, por lo tanto S tiene dos curvas de Jordan cruzándose y llegamos a una contradicción, así que $i(\Sigma) = 0$.

Ahora probamos que $j(\Sigma) \leq 2$ (observemos que si S es orientable entonces automáticamente se tiene $j(\Sigma) = 0$ y S es embebible en \mathbb{S}^2 como se quería). Procedemos de nuevo razonando por reducción al absurdo suponiendo que $j(\Sigma) > 2$. Entonces en S hay tres curvas de Jordan no orientables, por ejemplo δ , ϕ_1 y ϕ_2 (ver la figura 4.1).

Tomamos un círculo orientable ζ que encierre a δ y dos curvas de Jordan no orientables δ_1 y δ_2 cerca de δ (y por lo tanto disjuntas de ϕ_1 y ϕ_2) intersecándose transversalmente en un punto $x \in \delta$. Además existen discos cerrados disjuntos dos a dos en S , K_1 y K_2 , tales que $K_l \cap \delta_l = \mu_l$ y $K_l \cap \phi_l = \rho_l$ son arcos contenidos en $\text{Bd } K_l$ para $l = 1, 2$.

Pongamos que $\text{Bd } K_l = \mu_l \cup \tau_{l,1} \cup \rho_l \cup \tau_{l,2}$ para arcos (minimales) adecuados $\tau_{l,1}, \tau_{l,2}$. Entonces, para $l = 1$ y $l = 2$, los arcos $(\delta_l \setminus \mu_l) \cup \tau_{l,1} \cup (\phi_l \setminus \rho_l) \cup \tau_{l,2}$ son círculos orientables cruzándose exactamente en x y llegamos así a una contradicción, por lo que $j(\Sigma) \leq 2$.

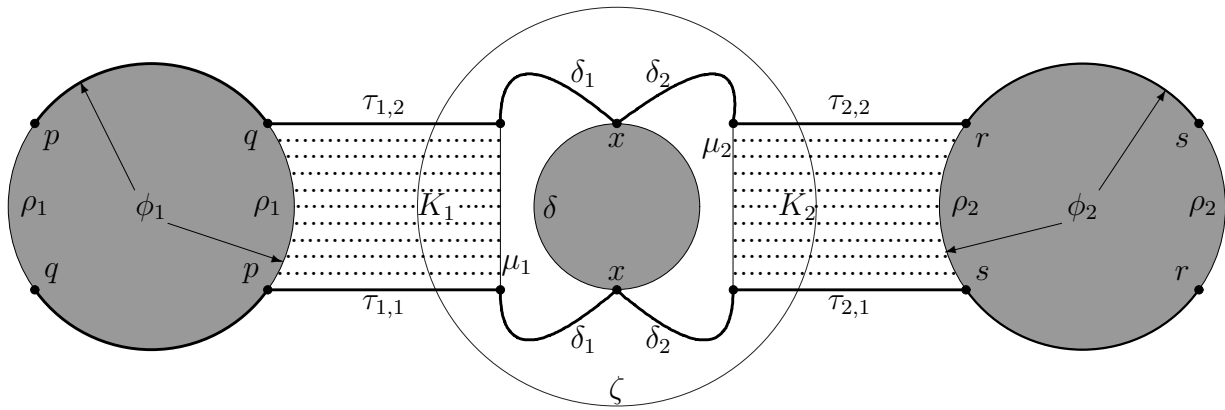


Figura 4.1: Ilustración de la prueba del caso $j(\Sigma) \leq 2$. δ , ϕ_1 y ϕ_2 son curvas de Jordan no orientables por lo que hay que identificar cada punto con su simétrico

Hemos probado que $i(\Sigma) = 0$ y $j(\Sigma) \leq 2$. Esto significa que S es embebible en \mathbb{S}^2 , \mathbb{P}^2 o \mathbb{B}^2 . Además, si no es homeomorfa a ninguna de las dos primeras superficies, como cualquier región propia de \mathbb{S}^2 o \mathbb{P}^2 se puede embeber en \mathbb{B}^2 (ver el lema 2.2.4(i)), sería también embebible en \mathbb{B}^2 . Esto concluye la prueba de la implicación (iii) \Rightarrow (iv).

4.2.4. Demostración de la implicación (iv) \Rightarrow (i)

Para acabar la demostración del teorema 4.1.A queda por ver finalmente que (iv) \Rightarrow (i). Procederemos en este caso dividiendo la prueba según el siguiente esquema:

- 1°. Se prueba que hay una región densa, $O \subset S$, que tiene dos curvas de Jordan cruzándose, y que se puede embeber en \mathbb{T}^2 .
- 2°. Vemos que O es homeomorfa a $\mathbb{T}^2 \setminus A$, siendo A un conjunto totalmente conexo e incluido en un arco de pendiente irracional constante.
- 3°. Finalmente modificamos el flujo irracional correspondiente sobre \mathbb{T}^2 de tal manera que A sea el conjunto de puntos singulares del nuevo flujo que, en concreto, tiene una órbita densa en $\mathbb{T}^2 \setminus A$. Después se aplica el teorema 1.5.3 para llevar este flujo a un flujo transitivo y suave sobre O , y usamos el lema 1.3.A para conseguir el flujo transitivo deseado en S .

Antes de empezar la demostración de cada uno de los pasos damos una descripción geométrica de la superficie no orientable de género 3, N_3 .

Lema 4.2.2. *Sea M_2 una superficie orientable de género 2 contenida en \mathbb{R}^3 y elegida de tal manera que si $x \in M_2$ entonces $-x \in M_2$. Denotemos por “ \approx ” la relación de equivalencia en M_2 que identifica x y $-x$ para todo $x \in M_2$ y denotemos por $\pi : M_2 \rightarrow M_2/\approx$ a la aplicación cociente. Entonces M_2/\approx es homeomorfa a N_3 .*

Demostración. Es claro que M_2/\approx es una superficie compacta, veamos que además es no orientable y tiene característica de Euler igual a -1 .

Para probar que es no orientable fijamos puntos x y $-x$ de M_2 y construimos un arco α en W que tenga a x y $-x$ como extremos. No es restrictivo suponer que α no contiene ningún otro par de puntos simétricos (en otro caso elegiríamos un arco abierto $\beta \subset \alpha$, suficientemente pequeño y que no tenga tales pares y lo incluiríamos en un arco abierto maximal $\gamma \subset \alpha$ con la misma propiedad y reemplazaríamos α por la clausura de γ).

Claramente, hay un homeomorfismo $h : [-1, 1] \times (-1, 1) \rightarrow U \subset M_2$ tal que $h([-1, 1] \times \{0\}) = \alpha$ y $h(-1, t) = -h(1, -t)$ para cada $t \in [-1, 1]$. Entonces $\pi(\alpha)$ es una curva de Jordan en M_2/\approx que tiene a $\pi(U)$ (una banda de Möbius) como entorno y por lo tanto $\pi(\alpha)$ no es orientable y tampoco M_2/\approx .

Por último construimos una triangulación de M_2 tal que si K es cualquiera de sus caras, aristas o vértices entonces $-K = \{-x : x \in K\}$ es también una cara, una arista o un vértice de la triangulación. Así que:

$$\chi(M_2/\approx) = \frac{\chi(M_2)}{2} = -1 = \chi(N_3)$$

y por lo tanto la superficie M_2/\approx es homeomorfa a N_3 . \square

Primer paso: búsqueda de la región O

Como en la prueba de (iii) \Rightarrow (iv) consideramos el embebimiento $e : S \rightarrow \mathbb{S}_\Sigma^2$ que, de acuerdo con el razonamiento de dicha prueba y el lema 2.2.4, debe ser de tal forma que $i(\Sigma) \neq 0$ o $j(\Sigma) \geq 3$.

Si nos centramos primero en el caso $i(\Sigma) \neq 0$ entonces es suficiente con quitar de S todas las curvas de Jordan que van a parar por e a los círculos $[\alpha_i] = [\beta_i]$ ($i \neq 1$) y $[\gamma_j]$ para obtener el conjunto O . Tomemos un arco δ con puntos finales en α_1 y β_1 relacionados con la relación \sim que da lugar a \mathbb{S}_Σ^2 . Ahora se tiene que $e^{-1}([\delta])$ y $e^{-1}([\alpha_1])$ son curvas de Jordan que se cruzan en O . Además O se puede embeber trivialmente en $\mathbb{S}_{\Sigma'}^2$, con $\Sigma' = \{\alpha_1, \beta_1\}$, y es obvio que $\mathbb{S}_{\Sigma'}^2$ es homeomorfo a \mathbb{T}^2 . Por lo tanto hemos obtenido la región O deseada.

El caso $j(\Sigma) \geq 3$ requiere un argumento más extenso. Fijándonos en la sección 4.2.3 se puede proceder para encontrar una región O' , densa en S , embebible en N_3 y que tiene dos curvas de Jordan cruzándose. Ahora vamos a mostrar cómo quitar una circunferencia no orientable de O' de manera que la región que resulte O (que sigue siendo densa en S) todavía tenga dos curvas de Jordan cruzándose pero que pueda ser embebida en \mathbb{T}^2 .

Para encontrar la región O usaremos la descripción de N_3 dada en el lema 4.2.2, es decir $O' \subset N_3 = M_2/\approx$.

Recordamos que $\pi : M_2 \rightarrow M_2/\approx$ denota la aplicación cociente y mostramos seguidamente que $\pi^{-1}(O')$ es conexo. Para ver esto probamos una observación previa.

Observación 4.2.1. Si $V \subset N_3$ es una región arbitraria y U es una de las componentes de $\pi^{-1}(V)$ entonces $\pi|_U$ es sobreyectiva.

Demostración de la observación. Para probar la sobreyectividad de $\pi|_U$ se hace un argumento por reducción al absurdo. Si $\pi|_U$ no es sobreyectiva existe un punto b de la frontera de $\pi(U)$ en V (porque V es conexo). Obsérvese que, debido a que

$\pi(U)$ es abierto (porque π es una aplicación abierta), $b \notin \pi(U)$. Encontramos una sucesión de puntos $(y_n)_n$ de $\pi(V)$ que converjan a b y tomemos puntos x_n en U con $\pi(x_n) = y_n$; no es restrictivo suponer que $(x_n)_n$ converge, digamos que a a . Puesto que $\pi(a) = b$ entonces $a \notin U$. Ahora es suficiente con tomar un entorno conexo, U_a de a , y observar que $\pi(U \cup U_a) \subset V$, lo que contradice la definición de U . Por lo tanto $\pi|_U$ es sobreyectiva. \square

En vista de la observación, una de las dos posibilidades siguientes ocurre:

1. $\pi^{-1}(O')$ es conexo o
2. $\pi^{-1}(O')$ tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales homeomorfas a O' y simétricas una de otra.

La existencia de curvas no orientables implica que la primera posibilidad es la que tiene lugar, es decir $\pi^{-1}(O')$ es conexo.

Ahora es fácil probar que si σ y τ son curvas de Jordan cruzadas en O' , entonces $\pi^{-1}(\sigma) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ y $\pi^{-1}(\tau) = \tau_1 \cup \tau_2$, donde σ_l y τ_l son curvas de Jordan cruzadas para $l = 1$ y $l = 2$, además $(\sigma_1 \cup \tau_1) \cap (\sigma_2 \cup \tau_2) = \emptyset$. Claramente $\pi^{-1}(O') \setminus (\sigma_1 \cup \tau_1 \cup \sigma_2 \cup \tau_2)$ es conexo, así que podemos construir un arco (minimal) δ cuyos extremos son dos puntos simétricos x y $-x$ de O' . Ahora $\alpha = \pi(\delta)$ es una curva de Jordan no orientable y las curvas σ y τ están contenidas en $O := O' \setminus \alpha$. Según el lema 2.2.4 (i), O se puede embeber en \mathbb{B}^2 o en \mathbb{T}^2 . La existencia de curvas de Jordan cruzadas en O excluye la primera posibilidad por el lema 2.2.4, apartados (ii) y (iii). Entonces O se puede embeber en \mathbb{T}^2 .

Segundo paso: construcción del homeomorfismo a $\mathbb{T}^2 \setminus A$

Apliquemos el teorema 1.5.17 a la superficie O para encontrar el embebimiento correspondiente $e'' : O \rightarrow \mathbb{S}_{\Sigma''}^2$. Puesto que O es orientable tenemos que $j(\Sigma'') = 0$. Además, debido a que O tiene dos curvas de Jordan cruzadas entonces $i(\Sigma'') \geq 1$ por el lema 2.2.4. Por otro lado, como O es embebible en el toro se tiene $i(\Sigma'') \leq 1$ (si no, O tendría dos pares de curvas de Jordan cruzadas y debido a que cada una de estas curvas es orientable y no homotópicamente nula, por el lema 2.2.3, aplicaríamos el lema 2.2.4(ii) para llegar a una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{S}_{\Sigma''}^2 \cong \mathbb{T}^2$ y se puede asumir que $O \subset \mathbb{T}^2$ y que $C = \mathbb{T}^2 \setminus O$ es totalmente desconexo (ver el teorema 1.5.17).

Denotemos por α y β a las curvas de Jordan que se cruzan en O . Fijemos un entorno anular de β , $B \subset O$, intersecando α exactamente en un pequeño arco abierto γ .

Usemos ahora el lema 2.2.4(ii) para encontrar un homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \setminus \alpha \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ tal que, si U es un anillo cerrado separado por α en dos anillos cerrados U_l , $l \in \{-1, 1\}$, entonces la restricción de f a $U_l \setminus \alpha$ se puede extender a un homeomorfismo $f_l : U_l \rightarrow f(U_l \setminus \alpha) \cup (\mathbb{S}^1 \times \{l\})$, $l \in \{-1, 1\}$.

Obsérvese que si fijamos una orientación de α y la inducimos mediante las aplicaciones f_l en $\mathbb{S}^1 \times \{l\} := \alpha_l$, entonces estos círculos tienen orientaciones compatibles¹ en la esfera $(\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)) \cup (\mathbb{D}^2 \times \{-1\}) \cup (\mathbb{D}^2 \times \{1\})$ (porque el disco $f(B \setminus \gamma)$ las conecta).

Ahora podemos construir un homeomorfismo q que aplique el anillo cerrado $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ sobre él mismo llevando un arco $\phi \supset f(C)$ (consultar [Kur68, página 189 y 539, teorema 5]) sobre un arco δ de pendiente irracional ρ , y tal que la primera coordenada de $(q \circ f_{-1} \circ \alpha)(t)$ y $(q \circ f_1 \circ \alpha)(t)$ coincide para cada $t \in \mathbb{S}^1$. Sea $A = (q \circ f)(C)$, entonces es claro que O es homeomorfo a $\mathbb{T}^2 \setminus A$ (estamos viendo $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ como un subconjunto de \mathbb{T}^2).

Tercer paso: final de la prueba

Consideremos el flujo irracional de pendiente ρ en \mathbb{T}^2 , tomemos una copia difeomorfa $M_1 \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbb{T}^2 y llevemos este flujo a un flujo suave sobre M_1 cuyo campo vectorial asociado es $F : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Multipliquemos F por una función suave no negativa $\lambda : M_1 \rightarrow [0, \infty)$ tal que el campo de vectores resultante tiene un flujo asociado que, una vez llevado a \mathbb{T}^2 , tiene a A como conjunto de puntos singulares. Usemos el teorema 1.5.3 para construir un flujo suave y transitivo sobre O y extenámoslo a un flujo suave Φ sobre toda la superficie S por medio del lema 1.3.A. Esto concluye la prueba de la implicación (iii) \Rightarrow (iv) y por lo tanto del teorema 4.1.A.

¹ Recordamos que dos círculos C_α y C_β sobre la esfera, con parametrizaciones α y β y acotando discos abiertos D_α y D_β , tienen *orientaciones compatibles* si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus (D_\alpha \cup D_\beta)$ tal que $h(t, -1) = \alpha(t)$ y $h(t, 1) = \beta(t)$

Capítulo 5

Variedades de dimensión n , $n \geq 3$

5.1. Introducción

En este capítulo abandonamos el estudio de flujos en superficies para pasar al estudio en variedades en general. El aumento de la dimensión de los espacios con los que vamos a trabajar traerá como consecuencia que los resultados que probemos sobre los conjuntos ω -límite sean menos descriptivos y más generales.

El estudio de los conjuntos ω -límite en dimensiones mayores o iguales a tres es una extensión natural del estudio que hemos llevado a cabo para superficies en los capítulos anteriores. No obstante, desvelar la estructura de estos conjuntos para dimensiones mayores tiene importancia en sí mismo, ya que existen muchos fenómenos físicos estudiados con ecuaciones diferenciales (y por lo tanto con flujos) sobre espacios de dimensiones altas.

Entre las ecuaciones diferenciales que nos llevan a estudiar flujos sobre variedades, las ecuaciones de Lorenz han tenido una importancia especial. Recordamos que las ecuaciones de Lorenz se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

para ciertas constantes reales σ , r y b . Estas ecuaciones describen varios fenómenos físicos de distinta naturaleza. Entre ellos, podemos citar:

1. Fenómenos meteorológicos.
2. El movimiento de un fluido acotado por dos placas calientes cuya temperatura es diferente.
3. El movimiento de una rueda de agua.
4. El comportamiento de un láser.
5. El comportamiento de una dinamo.

Para ver la descripción de los modelos citados y sus relaciones con las ecuaciones de Lorenz remitimos al lector a las referencias bibliográficas [Jac92, Spa82]. Estos ejemplos justifican el estudio de flujos sobre variedades no sólo como una generalización de la teoría desarrollada para superficies. Naturalmente, en este trabajo sólo nos ocuparemos de una parte muy limitada del estudio de flujos sobre variedades: el estudio de conjuntos ω -límite.

Recordemos que en el caso de superficies empezamos el estudio de los conjuntos ω -límite repasando el clásico teorema de Poincaré y Bendixson y estudiamos su validez en otras superficies. Vimos que tras la aportación de A. J. Schwartz, el teorema de Poincaré-Bendixson sigue siendo válido con algunas restricciones para cualquier superficie compacta y conexa (ver los teoremas 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.4). Un buen punto de partida para estudiar la estructura asintótica de órbitas sobre variedades sería plantearse la validez del teorema de Poincaré-Bendixson en espacios de dimensión mayor que dos. Aunque ahora sabemos la respuesta de este problema, ésta se estuvo buscando durante dos décadas. En concreto, en 1950 Seifert propuso la siguiente conjetura:

"Sea \mathbb{T}^3 el sólido tridimensional acotado por \mathbb{T}^2 y sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ un flujo de clase C^r , $r \geq 1$, sin puntos singulares. Entonces Φ tiene órbitas cerradas."

Veinticuatro años más tarde P. A. Schweitzer (ver [Sch74] y [ZTWZ98, pp. 415-418]) construyó un flujo de clase C^1 , $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, siendo todos los puntos de \mathbb{T}^3 regulares y sin órbitas periódicas. La búsqueda de contraejemplos a la conjetura

de Seifert ha dado lugar a una gran cantidad de artículos, entre ellos destacamos los trabajos de K. Kuperberg y G. Kuperberg [Kup94, KK96]. En el primero de ellos se da un contraejemplo de un flujo de clase C^∞ a la conjetura de Seifert y en el segundo, en 1996, se extiende este contraejemplo construyendo flujos analíticos en cualquier variedad de dimensión mayor que 2. Cabe destacar que también existen en la literatura contraejemplos con flujos hamiltonianos y ergódicos.

Una vez constatada la imposibilidad de extender el teorema de Poincaré-Bendixson, el siguiente paso es intentar dar teoremas del tipo de Vinograd en variedades de dimensión mayores a 2. Veremos en este capítulo que el teorema de Vinograd sigue siendo cierto para la esfera de dimensión n ($n \geq 3$) para conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes. Basicamente, este capítulo está dedicado a caracterizar conjuntos ω -límite de órbitas no recurrentes sobre variedades compactas y al estudio de variedades transitivas no necesariamente compactas.

Para finalizar esta sección introductoria describimos la estructura de las secciones restantes del capítulo. La sección 5.2 introduce la notación y resultados técnicos que se usarán posteriormente. El apartado 5.3 se ocupa del estudio de los conjuntos ω -límites de órbitas no recurrentes, prestando especial atención a los flujos definidos sobre S^m . La última sección se dedica al estudio de variedades transitivas.

5.2. Notación y resultados técnicos

En esta sección presentamos las nociones que se usarán en la prueba de los teoremas principales (teoremas 5.3.A, 5.3.B y 5.4.A) de este capítulo, así como los resultados técnicos necesarios. Empezamos con algunas definiciones, en ellas M denota una variedad de dimensión n .

Definición 5.2.1 (célula de dimensión n). Un conjunto $C \subset M$ es una *célula de dimensión n* si es homeomorfo a la bola \mathbb{D}_n . Recordamos que $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}_n(1)$ es la bola cerrada de diámetro 1 (ver el apartado 1.5.2 de notación).

Si adicionalmente $\theta : I \times \mathbb{D}_{n-1} \rightarrow C$ es un homeomorfismo ($I = [-1, 1]$), entonces llamaremos a (C, θ) una *célula parametrizada de dimensión n* .

Definición 5.2.2 (fibras abiertas y cerradas). Para cada $z \in \mathbb{D}_{n-1}$ el arco $\theta(I \times \{z\})$ recibe el nombre de *fibra cerrada* de C (con respecto a la *parametrización* θ) y el arco $\theta((-1, 1) \times \{z\})$ recibe el nombre de *fibra abierta* de C (también con respecto a la *parametrización* θ).

En todo el capítulo haremos las identificaciones siguientes:

1. $B(C) = B(C, \theta) = \theta(\{-1\} \times \mathbb{D}_{n-1})$,
2. $T(C) = T(C, \theta) = \theta(\{1\} \times \mathbb{D}_{n-1})$.

Además, si reemplazamos \mathbb{D}_{m-1} por \mathbb{O}_{m-1} obtenemos:

3. $B_O(C) = B_O(C, \theta) = \theta(\{-1\} \times \mathbb{O}_{n-1})$,
4. $T_O(C) = T_O(C, \theta) = \theta(\{1\} \times \mathbb{O}_{n-1})$.

Recordamos que un conjunto $C \subset M$ se dice que es una *esfera de dimensión n* si es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Obsérvese que si C es una célula de dimensión n en M y $h : \mathbb{D}_n \rightarrow C$ es un homeomorfismo entonces $h(\mathbb{O}_n) = \text{Int } C$ y $h(\mathbb{S}^n) = \text{Bd } C$, ya que, debido al teorema de invarianza del dominio (ver por ejemplo [Kur68, p. 475]), cualquier subconjunto de M que es homeomorfo a un conjunto abierto de \mathbb{R}^n es también abierto. Las próximas dos definiciones jugarán un papel importante en el desarrollo de este capítulo.

Definición 5.2.3 (torre). Sea $\{(B, \beta)\} \cup \{(F_i, \phi_i)\}_{i=1}^r \cup \{(S_j, \sigma_j)\}_{j=1}^s$ una colección finita de células parametrizadas sobre una variedad M de dimensión n , que si no hay confusión posible con las parametrizaciones de las células, identificaremos con la unión $T = B \cup \bigcup_{i=1}^r F_i \cup \bigcup_{j=1}^s S_j$.

Diremos que la colección de células anteriores es una *torre con base* $B = (B, \beta)$, *pisos* $F_i = (F_i, \phi_i)$ y *escaleras* $S_j = (S_j, \sigma_j)$ (nos referiremos genéricamente a B , F_i y S_j como los *bloques* de T) cuando para cada bloque C existe un entero no negativo $l(C)$, llamado el *nivel* de C , tal que se satisfacen los siguientes enunciados:

- (i) $l(B) = 0$ y $l(C) > 0$ para cualquier otro bloque C .
- (ii) Si F es un piso de nivel l entonces hay un piso F^* de nivel $l - 1$ tal que $F \cap F^* = B(F) \subset T_O(F^*)$ (si $l = 1$ entonces F^* es la base B). Además $F \cap C = \emptyset$ para cualquier otro bloque C con $l(C) \leq l$.
- (iii) Si S es una escalera de nivel l entonces $S \cap B = T(S) \subset B_O(B)$ y hay un piso F^* de nivel $l - 1$ tal que $S \cap F^* = B(S) \subset T_O(F^*)$ (si $l = 1$ entonces $F^* = B$ y $S \cap F^* = B(S) \cup T(S)$ con $T(S) \subset B_O(B)$ y $B(S) \subset T_O(B)$). Además $S \cap C = \emptyset$ para cualquier otro bloque C .

Definición 5.2.4 (torre regularizable). Una torre T se dice regularizable si además de verificar las condiciones de una torre existe un número real ϵ , $0 < \epsilon < 1$, tal que para cada bloque (C, θ) de T existe un embebimiento continuo (o, si M es suave, un embebimiento suave) que extiende a θ y que se denota por $e(\theta) : (-1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times \mathbb{O}_{n-1}(1 + \epsilon) \rightarrow M$.

Además, si $e(C) := e(\theta)((-1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times \mathbb{O}_{n-1}(1 + \epsilon))$ entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

(iv) Si C y C' son bloques disjuntos entonces $e(C)$ y $e(C')$ son también disjuntos.

(v) Si $F = (F, \phi)$ y $F^* = (F^*, \phi^*)$ son como en la propiedad (ii) de la definición de torre, entonces:

- $e(\phi)(\{-1\} \times \mathbb{O}_{n-1}(1 + \epsilon)) \subset T_O(F^*)$ y
- $e(\phi)(t, z) = e(\phi^*)(t + 2, z^*)$ para cada $t \in (-1 - \epsilon, -1 + \epsilon)$ cuando z y z^* son tales que $e(\phi)(-1, z) = e(\phi^*)(1, z^*)$.

(vi) Si $S = (S, \sigma)$ y $F^* = (F^*, \phi^*)$ son como en la propiedad (iii) de la definición de torre, entonces:

- $e(\sigma)(\{-1\} \times \mathbb{O}_{n-1}(1 + \epsilon)) \subset T_O(F^*)$,
- $e(\sigma)(t, z) = e(\phi^*)(t + 2, z^*)$ para cualquier $t \in (-1 - \epsilon, -1 + \epsilon)$ cuando z y z^* satisfacen $e(\sigma)(-1, z) = e(\phi^*)(1, z^*)$,
- $e(\sigma)(\{1\} \times \mathbb{D}_{n-1}(1 + \epsilon)) \subset B_O(B)$ y
- $e(\sigma)(t, w) = e(\beta)(t - 2, w^*)$ para cada $t \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ si w y w^* satisfacen $e(\sigma)(1, w) = e(\beta)(-1, w^*)$.

Escribiremos $e(T) = e(B) \cup \bigcup_{i=1}^r e(F_i) \cup \bigcup_{j=1}^s e(S_j)$.

Definición 5.2.5 (torre regularizable infinita). Diremos que T es una *torre regularizable infinita* si $T = \bigcup_{m=0}^{\infty} T_m$, donde cada T_m es una torre regularizable tal que $T_0 = \{(B, \beta)\}$ y, para cada $m \geq 1$, hay un bloque (C_m, θ_m) de T_m tal que $T_m = T_{m-1} \cup \{(C_m, \theta_m)\}$.

Ahora las *fibras* de T son los arcos conexos maximales de $\text{Int } T$ que resultan de uniones numerables de fibras abiertas o cerradas de cada uno de los bloques que componen las torres T_m .

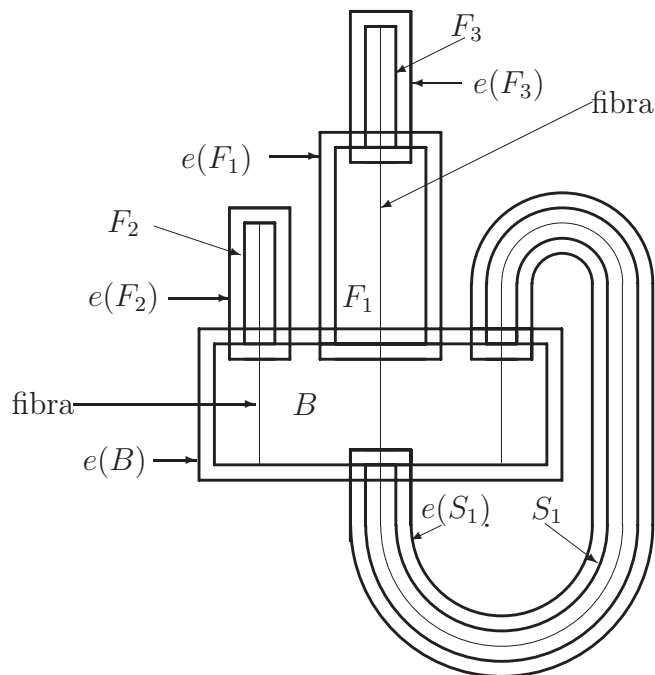


Figura 5.1: Torre regularizable con base B , pisos F_1 , F_2 y F_3 y escalera S_1 para la que $l(B) = 0$, $l(F_1) = l(F_2) = l(S_1) = 1$ y $l(F_3) = 2$

Seguidamente probamos un teorema importante acerca de torres regularizables. Este teorema será de utilidad en la construcción de los diferentes flujos necesarios en el capítulo de este trabajo.

Teorema 5.2.A. *Sea M una variedad de dimensión n , $O \subset M$ una región y T una torre regularizable con $e(T) \subset O$. Sea $x \in T_O(F)$ para algún piso F de T de nivel $l \geq 0$ (si $l = 0$ entonces $F = B$) y asumamos que $x \notin C$ para ningún otro bloque C de T .*

1. *Sea $y \in O \setminus T$. Entonces existe una torre regularizable $T^* = T \cup \{(F^*, \phi^*)\}$, con $e(T^*) \subset O$, para la que F^* es un piso de nivel $l + 1$ y tal que $x = \phi^*(-1, \mathbf{0})$, $y = \phi^*(1, \mathbf{0})$.*
2. *Sea $y \in B_O(B)$. Entonces hay una torre regularizable $T^* = T \cup \{(S^*, \sigma^*)\}$, con $e(T^*) \subset O$, para la que S^* es una escalera de nivel $l + 1$ y tal que $x = \sigma^*(-1, \mathbf{0})$, $y = \sigma^*(1, \mathbf{0})$.*

Dividiremos la prueba de este teorema en dos partes. Primero asumiremos, en el apartado 5.2.1, que M es sólo una variedad topológica y después haremos la prueba

cuando M es una variedad suave en el apartado 5.2.2.

5.2.1. Prueba del teorema 5.2.A en el caso continuo

Puesto que la torre T es regularizable y la dimensión de M es mayor o igual que 3 es fácil ver que $e(T) \setminus T$ es conexo y como $e(T)$ es un entorno abierto de T en la región O , se tiene que el conjunto $O \setminus T$ también es conexo. Usando la conexión del conjunto $O \setminus T$ construimos un arco A con puntos extremos x e y y tal que $A \setminus \{x, y\} \subset O \setminus T$.

Debido a que el arco A es compacto se deduce la existencia de un número $\delta > 0$, tal que si A' es un subarco de A con $\text{diam } A' < \delta$ entonces existe un conjunto abierto W que satisface:

- $A' \subset W$,
- W es homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Dividimos ahora la prueba dependiendo de que $\text{diam } A$ sea menor o mayor o igual que δ .

Primer caso: $\text{diam } A < \delta$

Empezamos fijando un conjunto W homeomorfo a \mathbb{R}^n que incluya a A y probaremos la parte 1 del teorema. Después haremos un comentario para la forma de proceder a la hora de demostrar la parte 2 del teorema. Para facilitar el seguimiento de esta demostración se pueden ver las figuras 5.2 y 5.3.

Construimos células de dimensión n disjuntas en $O \cap W$, C_x y C_y , conteniendo respectivamente los puntos x e y en sus fronteras, denotadas por B_x y B_y . En concreto tomaremos $C_x = e(\phi)([1, 1 + \mu] \times D)$ para un número suficientemente pequeño $\mu < \epsilon$ y una bola cerrada $D \subset \mathbb{O}_{n-1}$ y asumimos que $e(\phi)(1, a) = x$ para el centro, a , de D . Obsérvese que podemos suponer que B_x y B_y son esferas de dimensión $n - 1$ regularizables, es decir, existen entornos abiertos, O_x y O_y , de B_x y B_y respectivamente y homeomorfismos

$$h_x : (-1, 1) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow O_x \quad \text{y} \quad h_y : (-1, 1) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow O_y$$

tales que:

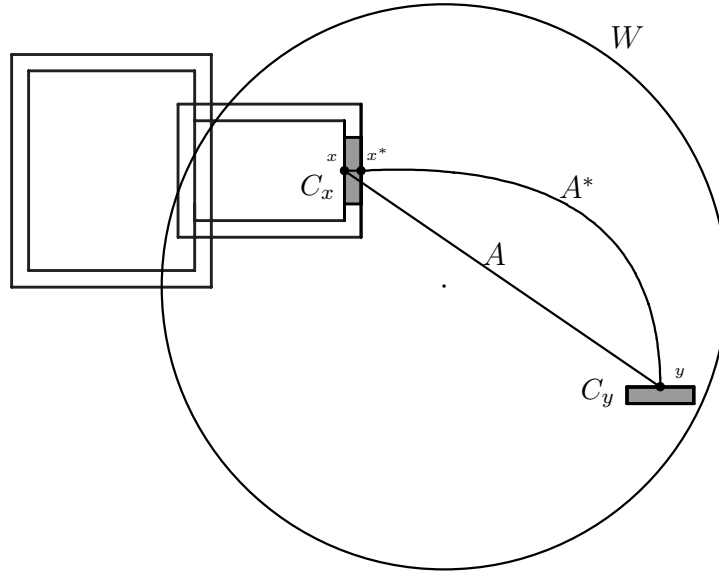


Figura 5.2: Ilustración sobre la demostración del primer caso

- $h_x(\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}) = B_x$,
- $h_y(\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}) = B_y$.

Ahora si $e(\phi)(1 + \mu, a) = x^*$ tomamos un arco $A^* \subset O \cap W$ conectando x^* e y de manera que A^* no contiene ningún otro punto de $C_x \cup C_y \cup T$.

Denotemos por $W_\infty := W \cup \{\infty\}$ la compactificación usual por un punto de W . Puesto que B_x y B_y son regularizables, el teorema del anillo, ver [Moi52, Kir69, Qui82], garantiza la existencia de un homeomorfismo

$$h : I \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow W_\infty \setminus \text{Int}(C_x \cup C_y),$$

tal que:

- $h(\{-1\} \times \mathbb{S}^{n-1}) = B_x$ y
- $h(\{1\} \times \mathbb{S}^{n-1}) = B_y$.

Ahora es fácil tomar células de dimensión $(n - 1)$, K_{x^*} y K_y , en B_x y B_y respectivamente. De hecho podemos tomar $K_{x^*} = e(\phi)(\{1 + \mu\} \times E)$ para alguna bola cerrada, $E \subset D$, centrada en a . Construimos, usando h , una célula parametrizada de dimensión n , (F^+, ϕ^+) , en $W \setminus \text{Int}(C_x \cup C_y)$, muy cercana a A^* y verificando:

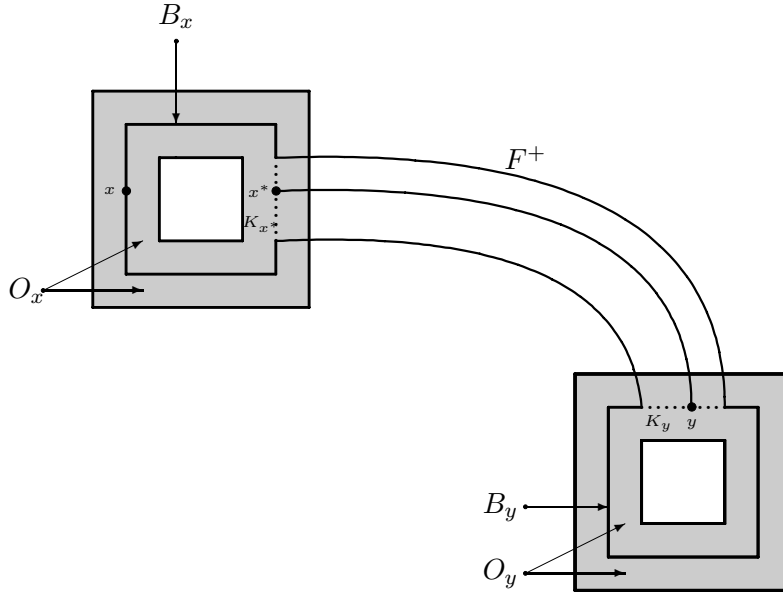


Figura 5.3: Ilustración sobre la demostración del primer caso

- $F^+ \subset O \setminus T$
- $F^+ \cap B_x = B(F^+) = K_{x^*}$,
- $F^+ \cap B_y = T(F^+) = K_y$,
- $\phi^+(-1, \mathbf{0}) = x^*$, $\phi^+(1, \mathbf{0}) = y$.

Ahora tomamos la célula $F^{++} := F^+ \cup e(\phi)([1, 1 + \mu] \times E)$ y la parametrizamos con una aplicación $\phi^{++} : [-1, 1] \times \mathbb{D}_{n-1} \rightarrow F^{++}$ tal que:

- $B(F^{++}) = K_x := e(\phi)(\{1\} \times E)$ y $T(F^{++}) = K_y$.
- Si $u \in K_{x^*}$ y $e(\phi)(1 + \mu, z) = u$ para algún $z \in E$ entonces hay un $z^{++} \in \mathbb{D}_{n-1}$ tal que $\phi^{++}(t, z^{++}) = e(\phi)(2 + t, z)$ para todo $t \in [-1, -1 + \mu]$.
- $\phi^{++}(-1, \mathbf{0}) = x$ y $\phi^{++}(1, \mathbf{0}) = y$.

Finalmente ponemos $F^* := \phi^{++}(I \times \mathbb{D}_{n-1}(\nu))$ para algún $\nu < 1$ y definimos $\phi^* : [-1, 1] \times \mathbb{D}_{n-1} \rightarrow F^*$ por $\phi^*(t, z) = \phi^{++}(t, \nu z)$. Obviamente $T^* = T \cup \{(F^*, \phi^*)\}$ es regularizable (obsérvese que podemos usar las mismas extensiones para los bloques de T restringiéndolos para un apropiado $\epsilon^+ < \epsilon$).

Esto concluye la prueba de la parte 1 del teorema bajo la hipótesis adicional que $\text{diam } A < \delta$. La prueba de la parte 2 del teorema no incluye dificultades especiales, basta con proceder de forma análoga con x e y , usando para y la base B de la torre T como lo hicimos previamente con x y el bloque de la torre que lo contiene.

Segundo caso: $\text{diam } A \geq \delta$

Como en el caso anterior haremos la prueba para la parte 1 del teorema, haciendo comentarios de cómo adaptar el argumento para la parte 2.

Empezamos eligiendo puntos $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ que descomponen el arco A en subarcos A_1, \dots, A_k con diámetros menores que δ . Se razona como en el caso anterior para construir una célula parametrizada de dimensión n , (F_1^*, ϕ_1^*) , con $x_0 = \phi_1^*(-1, \mathbf{0})$, $x_1 = \phi_1^*(1, \mathbf{0})$ y tal que:

- $T_1 = T \cup \{(F_1^*, \phi_1^*)\}$ es una torre regularizable,
- $e(T_1) \subset O$,
- F_1^* es un piso de nivel $l + 1$,
- $T_1 \cap (A_3 \cup \dots \cup A_k) = \emptyset$.

Reemplazando A_2 , si fuera necesario, por un arco cerrado con los mismos puntos extremos y que no interseque a la fibra cerrada de F_1^* que contiene a x_0 y x_1 . Y tomando también un bloque F_1^* más fino, no es restrictivo suponer que $(A_2 \setminus \{x_1\}) \cap T_1 = \emptyset$. Ahora se puede proceder como antes para extender T_1 con un piso (F_2^*, ϕ_2^*) de nivel $l + 2$ a una torre regularizable $T_2 = T_1 \cup \{(F_2^*, \phi_2^*)\}$ tal que:

- $x_1 = \phi_2^*(-1, \mathbf{0})$,
- $x_2 = \phi_2^*(1, \mathbf{0})$,
- $e(T_2) \subset O$.

Repitiendo el razonamiento un número finito de veces podemos construir en O una torre regularizable $T \cup \{(F_i^*, \phi_i^*)\}_{i=1}^k$ (si estamos en la parte 1 del teorema) o $T \cup \{(F_i^*, \phi_i^*)\}_{i=1}^{k-1} \cup \{(S^*, \sigma^*)\}$ (si estamos en la parte 2) tal que $x_{i-1} = \phi_i^*(-1, \mathbf{0})$, $x_i = \phi_i^*(1, \mathbf{0})$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ (donde $\phi_k^* = \sigma^*$ para la prueba de la parte 2 del teorema).

Ahora tomamos ν suficientemente pequeño y definimos $E_1 = \mathbb{D}_{n-1}(\nu)$ e, inductivamente, E_i para cada $1 < i \leq k$ por la propiedad $\phi_i^*(\{-1\} \times E_i) = \phi_{i-1}^*(\{1\} \times E_{i-1})$. Es claro que $\bigcup_{i=1}^k \phi_i^*(I \times E_i)$ es una elección apropiada para F^* o S^* (los ϕ^* o σ^* correspondientes se pueden definir fácilmente).

5.2.2. Prueba del teorema 5.2.A en el caso suave

Las ideas básicas de esta demostración son análogas a la usadas en la sección anterior para probar el teorema en su versión continua. Usaremos la misma notación que antes y procediendo como allí sólo hará falta tener cuidado para garantizar que, cuando $\text{diam } A < \delta$, tenemos que la extensión de la torre es diferenciable. Nos limitaremos a hacer la demostración de la primera parte del teorema, que como antes se puede adaptar de manera fácil a la prueba de la parte 2.

Obsérvese primero que si $W \subset M$ es el conjunto homeomorfo a \mathbb{R}^n tal que $A \subset W$, entonces podemos suponer que es difeomorfo a \mathbb{R}^n .

Recordemos que $\lambda := e(\theta) : (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times \mathbb{O}_{n-1}(1 + \epsilon) \rightarrow M$ es ahora un embebimiento suave y tomemos como antes $C_x = \lambda([1, 1 + \mu] \times D)$ para un número suficientemente pequeño $\mu < \epsilon$ y una bola cerrada $D \subset \mathbb{O}_{n-1}$ con $\lambda(1, a) = x$ siendo a el centro de D . Con el fin de utilizar una notación similar y para marcar las similitudes del argumento en el caso (b), podemos suponer que hay un embebimiento suave $\gamma : (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times \mathbb{O}_{n-1}(1 + \epsilon) \rightarrow M$ tal que $C_y := \gamma([-1 - \mu, -1] \times R)$ para una bola cerrada pequeña $R \subset \mathbb{O}_{n-1}$ cuyo centro, b , satisface $\gamma(-1, b) = y$. Asumiremos que tanto el radio de D como el de R es μ , que $\lambda([1 - \mu, 1 + \mu] \times D)$ y $\gamma([-1 - \mu, -1 + \mu] \times R)$ son conjuntos disjuntos y contenidos en $O \cap W$ y que $\gamma([-1 - \mu, -1 + \mu] \times R)$ no interseca a T . En lo que sigue identificaremos a W con \mathbb{R}^n (por lo tanto $O' := O \cap W$ y $T' := T \cap W$ serán vistos como subconjuntos de \mathbb{R}^n).

Consideremos las curvas $\alpha : [1 - \mu, 1 + \mu] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\eta : [-1 - \mu, -1 + \mu] \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente definidas por $\alpha(t) = \lambda(t, a)$ y $\eta(t) = \gamma(t, b)$. Observemos que, debido a que λ y γ son difeomorfismos, tenemos $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ y $\eta'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t . Ahora es sencillo conectarlos de forma diferenciable, es decir, hay una aplicación inyectiva suave $\kappa : [-1 - \mu, 1 + \mu] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface $\kappa'(t) \neq \mathbf{0}$ para cualquier t , $\kappa(t) = \alpha(t+2)$ para $t \in [-1 - \mu, -1 + \mu]$, y $\kappa(t) = \eta(t-2)$ para $t \in [1 - \mu, 1 + \mu]$. Podemos suponer

adicionalmente que $\kappa([-1 + \mu, 1 - \mu]) \subset O' \setminus T'$ y que

$$\begin{aligned} \kappa([-1 + \mu, 1 - \mu]) \cap \lambda([1 - \mu, 1 + \mu/2] \times D) &= \emptyset, \\ \kappa([-1 + \mu, 1 - \mu]) \cap \gamma([-1 - \mu/2, -1 + \mu] \times R) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

De [Hir88, página 69, Proposición 1.2]¹, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} F : [-1 - \mu, 1 + \mu] & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \\ t & \longrightarrow & F(t) = \frac{\kappa'(t)}{\|\kappa'(t)\|} \end{array}$$

no puede aplicar el intervalo $[-1 - \mu, 1 + \mu]$ sobre \mathbb{S}^n , es decir, hay un punto $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $F(t) = \frac{\kappa'(t)}{\|\kappa'(t)\|} \neq p$ para todo t . Fijemos un difeomorfismo $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{p\}$, y definamos $G_r : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq r \leq n-1$, por

$$G_r(q) = \frac{\partial g}{\partial z_r}(g^{-1}(q)),$$

donde z_r denota la r -ésima componente en \mathbb{R}^{n-1} .

Como todos los vectores $G_r(\frac{\kappa'(t)}{\|\kappa'(t)\|})$ son tangentes a \mathbb{S}^{n-1} entonces son ortogonales a $\kappa'(t)$. Además por ser g un difeomorfismo obtenemos que

$$\{\kappa'(t), G_1(\kappa'(t)/\|\kappa'(t)\|), \dots, G_{n-1}(\kappa'(t)/\|\kappa'(t)\|)\}$$

es una base para todo t y se puede asumir, tomando $\mu^* < \mu$ suficientemente pequeño, que la aplicación $\xi : (-1 - \mu, 1 + \mu) \times \mathbb{O}_{n-1}(\mu^*) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\xi(t, z_1, \dots, z_{n-1}) = \kappa(t) + z_1 G_1(\kappa'(t)/\|\kappa'(t)\|) + \dots + z_{n-1} G_{n-1}(\kappa'(t)/\|\kappa'(t)\|),$$

es un embebimiento tal que:

$$\begin{aligned} \xi([-1 + \mu/4, 1 - \mu/4] \times \mathbb{D}_{n-1}(\mu^*/2)) \cap \lambda([1 - \mu, 1 + \mu/8] \times D) &= \emptyset \quad \text{y} \\ \xi([-1 + \mu/4, 1 - \mu/4] \times \mathbb{D}_{n-1}(\mu^*/2)) \cap \gamma([-1 - \mu/8, -1 + \mu] \times R) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Sea $\rho_{c,d,s} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d > c > 0$, $s > 0$, una aplicación suave no negativa verificando $\rho_{c,d,s}(t, z) = 1$ para cada $(t, z) \in [-c, c] \times \mathbb{D}_{n-1}(s/2)$ y que se anula

¹**Nota por eliminar:** ¿Esta cita es referente al lema de Sard? En caso afirmativo, cítese

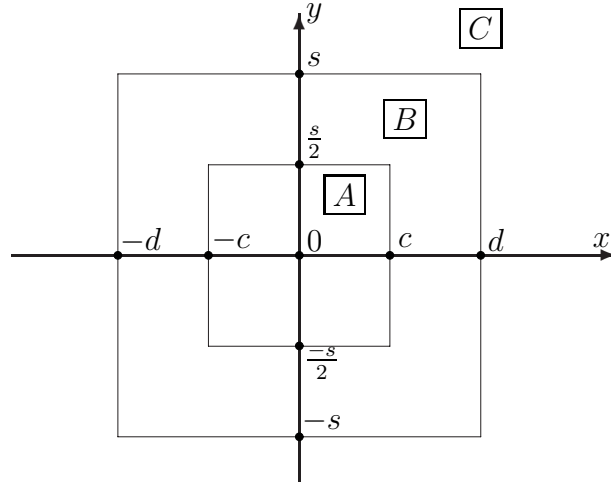


Figura 5.4: La función $\rho_{c,d,s}$ se anula en la región C , es igual a 1 en A y toma valores positivos en B

exactamente en $\mathbb{R}^n \setminus (-d, d) \times \mathbb{O}_{n-1}(s)$ (ver la figura 5.4), y construyamos en \mathbb{R}^n los campos de vectores definidos por:

$$\begin{aligned} X(\lambda(t, z)) &= \rho_{\mu/4, \mu/2, \mu}(t-1, z-a) \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t, z), \\ Y(\gamma(t, z)) &= \rho_{\mu/4, \mu/2, \mu}(t+1, z-b) \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t, z), \\ Z(\xi(t, z)) &= \rho_{1-\mu/2, 1-\mu/4, \mu^*/2}(t, z) \frac{\partial \xi}{\partial t}(t, z), \end{aligned}$$

siempre que las expresiones de arriba tengan sentido y cero en el resto. Claramente, todas están bien definidas y son suaves. Además, sea $H = X + Y + Z$. Como H se anula fuera de un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , su flujo asociado Φ está bien definido.

Obsérvese que, debido a (5.2.1), el arco $\kappa([-1-\mu, 1+\mu])$ está incluido en una de las órbitas de Φ y, por (5.2.2), tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \lambda(1, z)) &= \lambda(t+1, z), \quad \text{si } |t| \leq \mu/8 \quad \text{y } z \in D, \\ \Phi(t, \gamma(-1, z)) &= \gamma(t-1, z), \quad \text{si } |t| \leq \mu/8 \quad \text{y } z \in R. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Supongamos que $\Phi(t_x, x) = y$ (por lo que $\Phi_x([0, t_x]) = \kappa([-1, 1])$) y definamos $\varphi : \mathbb{R} \times \text{Int } D \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(t, z) = \Phi(t, \lambda(1, z))$. Entonces vamos a ver que $d\varphi(t, z)$ es regular (su determinante no se anula) para cada (t, z) . Las derivadas parciales de φ son:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_r}(t, z) = d\Phi_t(\lambda(1, z)) \frac{\partial \lambda}{\partial z_r}(1, z) \quad \text{para } 1 \leq r \leq n-1 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) &= d\Phi_t(\lambda(1, z)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, z) \\
&= d\Phi_t(\lambda(1, z)) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \lambda(1, z)) \\
&= d\Phi_t(\lambda(1, z)) H(\lambda(1, z)) \\
&= d\Phi_t(\lambda(1, z)) \frac{\partial \lambda}{\partial t}(1, z).
\end{aligned}$$

Debido a que λ y Φ_t son difeomorfismos entonces φ lo es.

Sea μ^{**} un número real suficientemente pequeño para que $\gamma^{-1} \circ \varphi$ esté bien definida sobre $(t_x - \mu^{**}, t_x + \mu^{**}) \times O^{**}$, siendo O^{**} el disco abierto de radio μ^{**} centrado en a , y denotemos por τ a la primera componente de γ^{-1} . Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\tau \circ \varphi)}{\partial t}(t_x, a) &= \nabla \tau(t_x, a) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_x, a) \\
&= \nabla \tau(t_x, a) \cdot H(\Phi(t_x, \lambda(1, a))) \\
&= \nabla \tau(y) \cdot H(y) \\
&= \nabla \tau(y) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}(-1, b) \\
&= 1
\end{aligned}$$

y (puesto que μ^{**} es suficientemente pequeño) se puede aplicar el teorema de la función implícita para obtener una aplicación suave $t = t(z)$ que satisfaga $t(a) = t_x$ y $\varphi(t(z), z) \in \gamma(-1, R)$ para cada $z \in O^{**}$.

Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones suaves y no decrecientes que satisfacen:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= t \quad \text{si } t \in (-\infty, \mu/8]; & f_2(t) &= 0 \quad \text{si } t \in (-\infty, 0]; \\
f_1(t) &= \mu/4 \quad \text{si } t \in [\mu/4, \infty); & f_2(t) &= 2 - \mu/2 \quad \text{si } t \in [1, \infty); \\
f_1'(t) &> 0 \quad \text{si } t \in (-\infty, \mu/4); & f_2'(t) &> 0 \quad \text{si } t \in (0, 1)
\end{aligned}$$

y definamos

$$f(t, z) = f_1(t) + f_2\left(\frac{t - \mu/8}{t(z) - \mu/4}\right) + \mu/4 - f_1(t(z) - t).$$

Como $\varphi(t, z)$ es un difeomorfismo local, es fácil comprobar (de nuevo si μ^{**} es suficientemente pequeño) que la aplicación $\varphi^* : (-\mu/8, 2 + \mu/8) \times O^{**} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\varphi^*(f(t, z), z) = \varphi(t, z)$$

es un difeomorfismo bien definido que verifica para todo $z \in O^{**}$:

$$\varphi^*(2, z) \in \gamma(\{-1\} \times R).$$

Ahora por 5.2.3:

$$\varphi^*(t, z) = \lambda(t - 1, z) \quad \text{para } |t| \leq \mu/8,$$

$$\varphi^*(t + 2, z) = \gamma(t - 1, w), \text{ si } z \text{ y } w \text{ son tales que } \varphi(2, z) = \gamma(-1, w) \text{ y } |t| \leq \mu/8.$$

Definiendo $\phi^*(t, z) = \varphi^*(t + 1, 2(z - a)/\mu^{**})$ y $F^* = \phi^*(I, \mathbb{D}_{n-1})$ hemos terminado, ya que podemos asumir naturalmente que $\phi^*((-1, 1] \times \mathbb{D}_{n-1}) \subset O' \setminus T'$.

5.3. Estudio de órbitas no recurrentes sobre variedades compactas: el teorema de Vinograd en \mathbb{S}^n con $n \geq 3$

5.3.1. Introducción

Esta sección está dedicada a extender el teorema de Vinograd a la esfera de dimensión n . Naturalmente, bajo la condición adicional de que la órbita de la que caracterizamos el conjunto ω -límite sea no recurrente. Esta generalización vendrá como corolario de la caracterización de los conjuntos ω -límites de órbitas no recurrentes en variedades compactas y de algunos resultados topológicos sobre la esfera de dimensión n .

Conviene hacer notar que en esta sección nos vamos a limitar a estudiar un tipo muy concreto de los conjuntos ω -límites que pueden aparecer sobre una variedad compacta en general. En efecto, del teorema de Sidorov se obtiene la existencia de órbitas no recurrentes y densas en cualquier conjunto conexo de \mathbb{R}^n con $n \geq 3$.

Teorema 5.3.1 (Sidorov). *Sea $O \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) un conjunto abierto y conexo. Entonces existe un flujo suave (para la estructura diferencial estándar de \mathbb{R}^n) $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un punto $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\omega_\Phi(u) = \text{Cl } O$.*

La prueba de este resultado se puede seguir en el artículo original (en ruso) de Sidorov, [Sid68]. Una versión traducida al español se puede encontrar en [Sol01b, p. 139].

Volviendo al teorema de Vinograd, nuestro objetivo es probar los siguientes resultados:

Teorema 5.3.A. *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ un flujo continuo sobre \mathbb{S}^n y sea $x \in \mathbb{S}^n$ un punto no recurrente del flujo. Entonces $\omega_\Phi(x)$ es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^n$, cuyo complementario es conexo.*

Recíprocamente, si Ω es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^n$, con complementario conexo, entonces existe un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ sobre \mathbb{S}^n y un punto no recurrente $x \in \mathbb{S}^n$ para el flujo Φ tal que $\Omega = \omega_\Phi(x)$.

Es conveniente observar que este teorema se probó en [JS03] pero, allí "suave" se refería sólo a la estructura diferencial estándar de \mathbb{S}^n . La prueba general se hizo en [Sol05] apoyándose en una caracterización de los conjuntos ω -límite no recurrentes sobre variedades compactas que introducimos a continuación después de una definición necesaria.

En lo que sigue $\text{dist} : M \times M \rightarrow [0, +\infty[$ denotará una distancia fija definida en la variedad M . Asociada a esta distancia podemos fijar la noción de *entorno de un conjunto* $A \subset M$ de amplitud $\epsilon > 0$ como:

$$C(A, \epsilon) = \{x \in M : \text{dist}(x, A) < \epsilon\}.$$

Definición 5.3.2 (conjuntos ω -conexos). Dada una variedad compacta y conexa y dado un conjunto conexo y abierto O de una variedad compacta y conexa de dimensión n se dice ω -conexo si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una región $O_\epsilon \subset O \cap C(\text{Bd } O, \epsilon)$ tal que $\text{Bd } O \subset \text{Bd } O_\epsilon$

Teorema 5.3.B. *Sea M una variedad topológica (respectivamente suave) compacta y conexa de dimensión m , entonces se verifican los siguientes resultados.*

1. *Dado un flujo continuo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ y un punto no recurrente $u \in M$, entonces $\omega_\Phi(u)$ es la frontera de un conjunto ω -conexo O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$.*
2. *Recíprocamente, si Ω es la frontera de un conjunto ω -conexo O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$, entonces existe un flujo continuo (respectivamente suave) $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ y un punto no recurrente $u \in M$ tal que $\Omega = \omega_\Phi(u)$.*

El resto de esta sección está dedicada a probar los resultados precedentes (teoremas 5.3.A y 5.3.B). Haremos primero la prueba del teorema 5.3.B, después se probará un lema topológico y con ambos resultados se obtendrá como un corolario el teorema 5.3.A.

5.3.2. Caracterización de conjuntos ω -límites de órbitas no recurrentes

En esta sección se trata de probar el teorema 5.3.B enunciado en la introducción anterior.

Prueba de la primera parte del teorema 5.3.B

Empezamos fijando la órbita $\gamma = \Phi_u(\mathbb{R})$, el conjunto $U = M \setminus \omega_\Phi(u)$ y su descomposición en componentes conexas: $U = \bigcup_{i \in I} O_i$. Puesto que u no es recurrente se tiene que $\gamma \cap \omega_\Phi(u) = \emptyset$ y por lo tanto $\gamma \subset O_j := O$ para algún $j \in I$.

O es un conjunto abierto y conexo por definición, probemos también que es ω -conexo. Tomamos para ello un $\epsilon > 0$ arbitrario y descomponemos $O \cap C(\text{Bd } O, \epsilon)$ en sus componentes $\{U_j^\epsilon\}_{j \in J}$. Usando la compacidad de M tenemos que existe $U_{j_\epsilon}^\epsilon$ y n_ϵ suficientemente grande para que $\Phi_u([n_\epsilon, \infty)) \subset U_{j_\epsilon}^\epsilon$. Pongamos $O_\epsilon := U_{j_\epsilon}^\epsilon$ y observemos que $\text{Bd } O_\epsilon \supset \text{Bd } O$ lo que prueba que O es un conjunto ω -conexo.

Por último mostramos que $\text{Bd } O = \omega_\Phi(u)$. Puesto que $\gamma \subset O$ y $\omega_\Phi(u) \cap O = \emptyset$ tenemos $\omega_\Phi(u) \subset \text{Bd } O$. Recíprocamente, $\text{Bd } O = \text{Bd } O_j = \text{Cl } O_j \setminus O_j \subset (O_j \cup \omega_\Phi(u)) \setminus O_j = \omega_\Phi(u)$.

Prueba de la segunda parte del teorema 5.3.B para variedades de dimensión m con $m \geq 3$

Nos ocupamos ahora de la prueba de la segunda parte del teorema para variedades de dimensión m con $m \geq 3$. Empezamos probando dos lemas.

Lema 5.3.3. *Si O es un conjunto ω -conexo, ϵ es un número real positivo arbitrario y $x \in \text{Bd } (C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O)$ entonces o bien $\text{dist}(x, \text{Bd } O) = 0$ o $\text{dist}(x, \text{Bd } O) = \epsilon$.*

Demostración. Por supuesto, si $x \in \text{Bd } (C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O)$ entonces $\text{dist}(x, \text{Bd } O) \leq \epsilon$. Asumamos que $0 < \text{dist}(x, \text{Bd } O) < \epsilon$, entonces $x \in \text{Cl } O$ pero $x \notin \text{Bd } O$ lo que significa que $x \in O$ y puesto que O es abierto tenemos que $x \in \text{Int } (C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O)$. Pero esto es una contradicción porque $x \in \text{Bd } (C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O)$. Así que $\text{dist}(x, \text{Bd } O) = 0$ o $\text{dist}(x, \text{Bd } O) = \epsilon$ para cada $x \in \text{Bd } (C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O)$. \square

Lema 5.3.4. *Si O es ω -conexo entonces $C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O$ se descompone en un número finito de componentes.*

Demostración. Nótese que $C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O$ no puede contener dos componentes conexas diferentes, U_1 y U_2 , cuyas fronteras estén completamente contenidas en $\text{Bd } O$. Asumamos lo contrario, entonces usamos la conexión por caminos de O para tomar un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow O$ tal que $\alpha(0) \in U_1$ y $\alpha(1) \in U_2$. Observemos que debido a que U_1 y U_2 son dos componentes conexas diferentes de $C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O$ y α es continua entonces existe un punto $p \in \alpha([0, 1]) \cap \text{Bd } U_1$, pero esto es una contradicción ya que $p \in \text{Bd } U_1 \cap O \subset \text{Bd } O \cap O = \emptyset$.

Ahora vemos que si $\{W_i\}_{i \in I}$ es el conjunto de componentes conexas de $C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O$ tales que $\text{Bd } W_i$ no está completamente contenida en $\text{Bd } O$ entonces I es finito. Asumamos lo contrario y tomemos para cada $i \in I$ un punto $w_i \in W_i$ tal que $\frac{\epsilon}{2} \leq \text{dist}(w_i, \text{Bd } O) \leq \frac{3\epsilon}{4}$.

Por la compacidad de M existe un punto de acumulación w de la sucesión $\{w_i\}_{i \in I}$, tomemos $(w_{i_l})_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $w = \lim_{l \rightarrow \infty} w_{i_l}$. Entonces por la continuidad de la función distancia tenemos que $\frac{\epsilon}{2} \leq \text{dist}(w, \text{Bd } O) \leq \frac{3\epsilon}{4}$, además w está contenido en O porque $w \in \text{Cl } O \setminus \text{Bd } O$ y por lo tanto w está contenido en una componente de $C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O$, W_j para algún $j \in I$ adecuado. Llegamos a una contradicción puesto que por un lado $C(\{w\}, \delta) \subset W_j$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, y por otro lado existe un entero positivo l_0 para el que $C(\{w\}, \delta) \cap W_{i_l} \neq \emptyset$ si $l \geq l_0$, ya que $w = \lim_{l \rightarrow \infty} w_{i_l}$.

□

Damos ahora la construcción de una familia de conjuntos abiertos $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisfacen para cada $n \in \mathbb{N}$ las siguientes propiedades:

- (A) O_n es una componente conexa de $C(\text{Bd } O, \frac{1}{n}) \cap O$,
- (B) $O_{n+1} \subset O_n$,
- (C) $\text{Bd } O \subset \text{Bd } O_n$,
- (D) para cada ϵ , $0 < \epsilon < \frac{1}{n}$, existe una componente conexa U_ϵ de $C(\text{Bd } O, \epsilon)$ contenida en O_n de manera que $\text{Bd } U_\epsilon \supset \text{Bd } O$.

La existencia de esta familia de conjuntos se prueba por inducción en n , observamos que para $n = 1$, gracias a que existe un número finito de componentes de $C(\text{Bd } O, 1) \cap O$ y puesto que O es un conjunto ω -conexo, podemos elegir una componente conexa O_1 de $C(\text{Bd } O, 1) \cap O$ tal que $\text{Bd } O \subset \text{Bd } O_1$ y además si $0 < \epsilon < 1$

existe una componente conexa U_ϵ de $C(\text{Bd } O, \epsilon) \cap O$, contenida en O_1 , cuya frontera contiene a $\text{Bd } O$. Asumamos ahora que hemos construido $\{O_1, O_2, \dots, O_k\}$ satisfaciendo las condiciones (A), (B), (C) y (D) y construyamos O_{k+1} de tal manera que se verifican las mismas propiedades para la nueva familia. Para hacerlo, usemos de nuevo que $C(\text{Bd } O, \frac{1}{k+1}) \cap O$ contiene sólo un número finito de componentes y la propiedad anterior (D) para encontrar una componente O_{k+1} de $C(\text{Bd } O, \frac{1}{k+1}) \cap O$ tal que el conjunto $\{O_1, O_2, \dots, O_k, O_{k+1}\}$ satisface las propiedades (A), (B) (C) y (D). Por último usamos el Principio de Inducción para obtener la familia $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

El siguiente paso de esta prueba consiste en construir una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de O tales que $\text{Cl}\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \setminus \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \text{Bd } O$. Para conseguir esto usamos la compacidad de $\text{Bd } O$ para encontrar para cada $n \in \mathbb{N}$ un cubrimiento finito de $\text{Bd } O$ formado por conjuntos abiertos de M , $\{U_i^n\}_{i=1}^{k_n}$, tales que $\text{diam } U_i^n < \frac{1}{n}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k_n\}$. Ahora tomamos para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, \dots, k_n\}$ un punto $z_i^n \in U_i^n \cap O_n$, obsérvese que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{k_n} \{z_i^n\}$ es un conjunto numerable de puntos y si definimos $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{k_n} \{z_i^n\}$, obtenemos la sucesión deseada $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Se trata ahora de construir por medio de la proposición 5.2.A una torre regularizable infinita $T = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ en O tal que:

- (T1) Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, T_i es un bloque de nivel i , $\{x_i, x_{i+1}\} \subset T_i$ y $x_j \notin T_i$ si $j \notin \{i, i+1\}$.
- (T2) Si n es el entero más grande para el que $\{x_i, x_{i+1}\} \subset O_n$ entonces $T_i \subset O_n$,
- (T3) Una de las fibras de T , ρ^* , contiene la sucesión de puntos $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

En consecuencia, usando las propiedades (T2) y (T3) se tiene que $\text{Bd } O = \text{Cl}\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \setminus \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{Cl } \rho^* \setminus \rho^*$. Además de (T2) se sigue que $\text{Cl } \rho^* \setminus \rho^* \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Cl } O_n \subset \text{Bd } O$, por lo tanto $\text{Cl } \rho^* \setminus \rho^* = \text{Bd } O$. El objetivo ahora es construir un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que ρ^* esté contenido en una de las órbitas.

Observemos que para cualquier fibra ρ de T y cualquier punto u de la fibra ρ , existe un intervalo abierto I_u que contiene a 0 y una biyección $\rho_u : I_u \rightarrow \rho$ tal que:

- (a) $\rho_u(0) = u$.
- (b) Si $v \in \rho \cap e(C)$ para algún bloque (C, ϕ) de T y $v = \rho_u(t^*) = e(\phi)(t^{**}, z)$, entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}$ tal que $e(\phi)(t + t^{**}, z)$ esté definido tenemos $\rho_u(t + t^*) = e(\phi)(t + t^{**}, z)$.

Definamos ahora $\Psi(t, u) := \rho_u(t)$, es claro que Ψ está definido en un subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R} \times M$ que, en general, es diferente de $\mathbb{R} \times M$. Sin embargo probaremos que Ψ es un flujo local y existirá entonces, en virtud del lema 1.3.A (página 35), un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ topológicamente equivalente a Ψ , de manera que las órbitas de Φ y Ψ y sus orientaciones coinciden.

Empezamos por probar que Λ es abierto y que Ψ es continuo. Tomemos para ello $(t, u) \in \Lambda$ y asumamos que $t > 0$ (se procede análogamente en el otro caso), entonces puesto que $\text{Im } \rho_u \subset \text{Int } T$ y $\rho_u([0, t])$ es compacto existe $t_1^* \in (-1, 1]$, $t_n^* \in [-1, 1)$, $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ y $\{z_i^* : z_i^* \in \mathbb{O}_{m-1}\}_{i=1}^n$ (el argumento para $n = 1$ se puede adaptar fácilmente) tales que:

$$(c) \quad \phi_1(t_1^*, z_1^*) = \rho_u(0) = u.$$

$$(d) \quad \begin{aligned} \phi_i(1, z_i^*) &= \phi_{i+1}(0, z_{i+1}^*) = \rho_u(t_1 + i - 1) \text{ para cualquier } i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \text{ y} \\ \phi_n(t_n^*, z_n^*) &= \rho_u(t) = \rho_u(t_1 + n - 2 + t_n^*) \text{ con } t_1 = 1 - t_1^*. \end{aligned}$$

$$(e) \quad \rho \subset \text{Int } \bigcup_{i=1}^n \phi_i([-1, 1] \times \mathbb{O}_{m-1}).$$

Ahora para cualquier $\epsilon > 0$ usamos la continuidad de los homeomorfismos $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ para escoger números reales positivos $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ tales que:

(C1) Si $\|z'_i - z_i^*\|_{m-1} < \delta_i$ entonces $\text{dist}(\phi_i(s, z'_i), \phi_i(s, z_i^*)) < \delta_{i+1}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s \in [-1, 1]$ y $\delta_{n+1} := \frac{\epsilon}{2}$, también asumimos que $\phi_i(1, z'_i) \in \phi_{i+1}(\{0\} \times \mathbb{O}_{m-1})$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

(C2) Existe un número real positivo δ_0 tal que si $\text{dist}(u, u') < \delta_0$ entonces $u' = \phi_1(s, w)$ para algún (s, w) adecuado que satisface $\|(s, w) - (t_1^*, z_1^*)\|_m < \delta_1$.

Finalmente usamos de nuevo la continuidad de ϕ_n para encontrar $\delta_{n+2} > 0$ para el que se tiene la siguiente condición.

(C3) Si $|t'_n - t_n^*| < \delta_{n+2}$ y $\|z'_n - z_n^*\|_{m-1} < \delta_{n+2}$ entonces $\text{dist}(\phi(t'_n, z'_n), \phi(t_n^*, z_n^*)) < \frac{\epsilon}{2}$. Obsérvese que no hay problema en tomar $\delta_1 < \frac{\delta_{n+2}}{2}$.

Por la propiedad (C2), si $v \in M$ y $t \in \mathbb{R}$ satisfacen que $\text{dist}(u, v) < \delta = \min\{\delta_0, \frac{\delta_{n+2}}{2}\}$ y $|s - t| < \delta$ entonces existe $(s_1^*, w_1^*) \in (-1, 1] \times \mathbb{O}_{m-1}$ tal que $v = \phi_1(s_1^*, w_1^*)$ y $\|(t_1^*, z_1^*) - (s_1^*, w_1^*)\|_m < \delta_1$. Usamos ahora la propiedad (C1) para ver que los puntos $\{w_i^* : w_i^* \in \mathbb{O}_{m-1}\}_{i=2}^n$ están bien definidos por las expresiones $\phi_i(1, w_i^*) =$

$\phi_{i+1}(0, w_{i+1}^*)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Además se satisface que $\|w_i^* - z_i^*\| < \delta_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\phi_i(0, w_i^*) = \rho_v(1 - s_1^* + i - 2)$ si $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Definiendo $s_n^* := s - (n - 1 - s_1^*)$ (recordemos que $t_n^* := t - (n - 1 - t_1^*)$), se tiene que $|s_n^* - t_n^*| = |s - t + s_1^* - t_1^*| < |s - t| + |s_1^* - t_1^*| < \delta_{n+2}$. Usamos (C2) y (C3) para obtener que $\text{dist}(\phi_n(s_n^*, w_n^*), \phi_n(t_n^*, z_n^*)) < \text{dist}(\phi_n(s_n^*, w_n^*), \phi_n(s_n^*, z_n^*)) + \text{dist}(\phi_n(s_n^*, z_n^*), \phi_n(t_n^*, z_n^*)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Ahora se tiene que $\Psi(s, v)$ está bien definido y es igual a $\rho_v(s) = \phi_n(s_n^*)$, además $\text{dist}(\Psi(s, v), \Psi(t, u)) = \text{dist}(\rho_v(s), \rho_u(t)) < \epsilon$ entonces la aplicación Ψ es continua y Λ es un conjunto abierto.

Lema 5.3.5. *Si $\Psi(t, u) = v$ entonces:*

(P1) $A := \{s : (s, v) \in \Lambda\} = \{r - t : (r, u) \in \Lambda\} := B$.

(P2) $\Psi(s + t, u) = \Psi(s, \Psi(t, u))$ cuando ambos miembros están bien definidos.

Demostración. Haremos la prueba para $t > 0$, el otro caso es similar. Tomemos la notación usada en la prueba del lema anterior para obtener $\Psi(t, u) = \rho_u(t) = \rho_u(t_1 + n - 2 + t_n^*) = \phi_n(t_n^*, z_n^*)$ y supongamos que $s \in A$, entonces $(s, v) \in \Lambda$ y existe $s_1^* \in (-1, 1]$, $s_l^* \in [-1, 1)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^l$ y $\{w_i^* : w_i^* \in \mathbb{O}_{m-1}\}_{i=1}^l$ (el caso $n = 1$ o $l = 1$ no supone ninguna dificultad adicional) tal que:

(c') $\psi_1(s_1^*, w_1^*) = \rho_v(0) = \phi_n(s_n^*, z_n^*)$ (en la mayoría de los casos, $\phi_n = \psi_1$).

(d') $\psi_i(1, w_i^*) = \psi_{i+1}(0, w_{i+1}^*) = \rho_v(s_1 + i - 1)$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ y $\psi_l(s_l^*, w_l^*) = \rho_v(s) = \rho_v(s_1 + l - 2 + s_1^*)$ con $s_1 = 1 - s_1^*$.

De (c') y (d') se deduce que $\psi_i(1, w_i^*) = \rho_v(s_1 + i - 1) = \rho_u(t + s_1 + i - 1)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ y $\psi_l(s_l^*, w_l^*) = \rho_v(s) = \rho_v(s_1 + l - 2 + s_1^*) = \rho_u(t + s_1 + l - 2 + s_n^*) = \rho_u(t + s)$, por lo tanto $(t + s, u) \in \Lambda$ y $\Psi(s, \Psi(t, u)) = \Psi(s + t, u)$. Si definimos $(t + s, u) := (r, u) \in \Lambda$ entonces $s = r - t$ y hemos obtenido que $s = r - t$ y por lo tanto $A \subseteq B$. De manera análoga se puede mostrar que $B \subseteq A$. Además, en este párrafo hemos probado también **(P2)** $\Psi(s + t, u) = \Psi(s, \Psi(t, u))$ cuando ambos miembros están bien definidos. \square

La aplicación Ψ es por lo tanto continua, está definida en el conjunto abierto Λ y satisface **(P1)** y **(P2)**, seguidamente se usa el lema 1.3.A para obtener un flujo continuo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\Phi(\mathbb{R} \times \{u\}) = \{u\}$ si $\mathbb{R} \times \{u\} \cap \Lambda = \emptyset$, en otro caso

$\Phi(\mathbb{R} \times \{u\}) = \Psi(\{(t, u) : (t, u) \in \Lambda\})$ y la orientación de ambas curvas inducidas por Φ y Ψ son las mismas. Por lo tanto $\omega_\Phi(v) = \text{Bd } O$ para cada $v \in \rho^*$, lo que concluye la prueba en el caso continuo y dimensión mayor o igual a 3.

Para la versión suave del teorema, hacemos notar en primer lugar que la discusión anterior es válida ahora y que las aplicaciones ϕ_i y las extensiones $e(\phi_i)$ se pueden elegir suaves. Obsérvese que en el razonamiento anterior hemos visto que si $(t, u) \in \Lambda$ existe un entorno donde Ψ está definida por $\Psi(t, u) = \rho_u(t) = \phi_n(t - (n - 1 - t_1^*(u)), z_n^*(u)) = e(\phi_n)(t - (n - 1 - t_1^*(u)), z_n^*(u))$. Denotemos por $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ las aplicaciones suaves (aquí por supuesto nos estamos refiriendo a la estructura diferencial estándar de \mathbb{R}^{m-1}) definidas por $\pi_1(t, z) = t$ y $\pi_2(t, z) = z$. Finalmente nótese que $t_1^*(u) = \pi_1 \circ e(\phi_1)^{-1}(u)$, $z_1^*(u) = \pi_2 \circ e(\phi_1)^{-1}(u)$ y $z_{i+1}^*(u) = \pi_2 \circ e(\phi_{i+1})^{-1} \circ e(\phi_i)(1, z_i^*(u))$, $i \in 1, 2, \dots, n - 1$, son aplicaciones suaves ya que son la composición de aplicaciones suaves. Por lo tanto Ψ es suave y aplicamos en este caso la versión suave del lema 1.5 de [JS04d] para obtener un flujo suave $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\Phi(\mathbb{R} \times \{u\}) = \{u\}$ si $\mathbb{R} \times \{u\} \cap \Lambda = \emptyset$, en otro caso $\Phi(\mathbb{R} \times \{u\}) = \Psi(\{(t, u) : (t, u) \in \Lambda\})$ y la orientación de ambas curvas inducidas por Φ y Ψ son las mismas. Por lo tanto $\omega_\Phi(v) = \text{Bd } O$ para cualquier $v \in \rho^*$ y hemos concluido la prueba en el caso suave para variedades de dimensión m con $m \geq 3$.

Prueba de la segunda parte del teorema 5.3.B para variedades de dimensión m con $m < 3$

Variedades de dimensión 1. Como cualquier variedad de dimensión 1 compacta y conexa es homeomorfa al círculo \mathbb{S}^1 y los ω -límites son invariantes topológicos, bastará con hacer la prueba en \mathbb{S}^1 . Por otro lado es importante tener en cuenta que sobre \mathbb{S}^1 los únicos conjuntos ω -límites de puntos no recurrentes son conjuntos unipuntuales. Así que sólo será necesario ver probar que en \mathbb{S}^1 la equivalencia entre conjuntos unipuntuales y conjuntos que son la frontera de un conjunto ω -conexo.

Tomemos para probar la equivalencia anunciada un punto $p \in \mathbb{S}^1$, este punto p es la frontera del conjunto $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ y éste es un conjunto ω -conexo. El recíproco también es cierto, esto es, la frontera de cualquier conjunto ω -conexo O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^1$, es un punto. Esto es cierto, ya que por la conexión de O se tiene que $O = \{e^{i\theta} : a < \theta < b\}$ para números reales adecuados $a, b \in \mathbb{R}$ con $b - a \leq 2\pi$. Además la propiedad de conexión por la frontera implica que $b - a = 2\pi$ y por lo tanto la frontera de O es sólo un punto.

Superficies. Probamos ahora la segunda parte del teorema 5.3.B para superficies compactas y conexas. No haremos una construcción directa del flujo Φ , sino que usaremos el teorema 2.3.A. Por lo tanto debemos probar que si $\Omega = \text{Bd } O$ para algún conjunto ω -conexo O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$, entonces Ω es una componente conexa de la frontera de un anillo regular $U \subset M$.

Esta parte de la prueba se realizará por inducción en el género de M , g . Empecemos con el caso $g = 0$, esto es $M = \mathbb{S}^2$. Hacemos notar que O es simplemente conexo, si no existiría una curva de Jordan no homotópicamente nula $\gamma \subset O$ acotando un disco D de tal forma que tanto D como $\mathbb{S}^2 \setminus D$ contienen puntos de $\text{Bd } O$, pero esto contradice que O sea un conjunto ω -conexo. Tenemos por otro lado que $\text{Bd } O$ es también una componente de la frontera de $U := O_*$ y aplicamos el lema 2.2.2 a O para obtener que U es un anillo regular.

Asumimos ahora que el resultado es cierto para todas las superficies que tienen género menor que g y que O es simplemente conexo y procedemos como en el caso de género 0 y se obtiene la prueba del resultado. Si O no es simplemente conexo entonces debe incluir al menos una curva de Jordan no homotópicamente nula γ , que no encierra un disco y al que le podemos aplicar (i), (ii) o (iii) del lema 2.2.4. Asumimos (se procede similarmente con el resto de posibilidades) que γ es orientable, $M = N_g$ y $S \setminus \gamma \cong N_{g-2, **}$, entonces fijamos puntos $x_1, x_2 \in N_{g-2}$ y, gracias al lema citado, un homeomorfismo $h : S \setminus \gamma \rightarrow N_{g-2} \setminus \{x_1, x_2\}$. Puesto que h es un homeomorfismo y O es un conjunto ω -conexo se tiene que $h(O \setminus \gamma) \cup \{x_1, x_2\}$ es también un conjunto ω -conexo en N_{g-2} y aplicamos la hipótesis de inducción para obtener un anillo regular $U' \subset N_{g-2}$ tal que $\text{Bd } (h(O \setminus \gamma) \cup \{x_1, x_2\}) = h(\text{Bd } O) = U'_1$ donde U'_1 es una de las dos componentes de $\text{Bd } U'$. Si x_1 y x_2 no están contenidos en $\text{Cl } U'$ entonces $U = h^{-1}(U')$ es también un anillo regular en M tal que $\text{Bd } h^{-1}(U'_1) = \text{Bd } O$ es una de las dos componentes de la frontera de U y obtenemos la prueba en este caso.

Por último asumimos que $\text{Cl } U'$ contiene los puntos x_1 y x_2 (si sólo contiene uno de ellos el argumento se puede adaptar fácilmente) y fijamos un homeomorfismo $g : \mathbb{O}_2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow U'$ tal que $\text{Bd } g(\mathbb{O}_2 \setminus \text{Cl } \mathbb{O}_2(1/2))$ interseca $\text{Bd } U'$ exactamente en U'_1 . Tomemos ahora r , $0 < r < 1$, suficientemente grande para tener que $\mathbb{O}_2(r)$ contiene a $\{g^{-1}(x_1), g^{-1}(x_2)\}$, entonces $U'' = g(\mathbb{O}_2 \setminus \text{Cl } \mathbb{O}_2(r))$ es un anillo regular que no contiene ni a x_1 ni a x_2 y además una de las dos componentes de $\text{Bd } U''$ es igual a U'_1 . Ahora acabamos la prueba tomando $U = h^{-1}(U'')$.

5.3.3. Resultados topológicos sobre \mathbb{S}^n

El propósito de esta sección es mostrar que si A es un conjunto conexo de \mathbb{S}^n ($n \geq 2$) y $\mathbb{S}^n \setminus A$ también es conexo entonces existen entornos de $\text{Bd } A$ tan próximos a $\text{Bd } A$ como se quiera, de tal forma que la intersecciones de estos entornos con A son conjuntos conexos. Aunque este resultado es obvio intuitivamente, no es trivial de demostrar y por otro lado no hemos encontrado una prueba de él en la bibliografía utilizada. Es importante darse cuenta que cuando $n = 1$ el resultado no es cierto, para ello basta con tomar un arco como conjunto A , de tal forma que su clausura no sea \mathbb{S}^1 . Este resultado topológico es imprescindible a la hora de extender el teorema de Vinograd en \mathbb{S}^2 a \mathbb{S}^n para órbitas no recurrentes.

La parte central del argumento para probar este resultado está recogida en el lema siguiente. En lo que sigue d_2 denota la distancia euclídea y para un conjunto $A \subset \mathbb{S}^n$ identificaremos $C_2(A, \epsilon) = \{x \in \mathbb{S}^n : d_2(x, A) < \epsilon\}$.

Lema 5.3.6. *Sea $A \subset \mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, tal que tanto A como $\mathbb{S}^n \setminus A$ son conjuntos conexos. Entonces $\text{Bd } A$ es conexo.*

Demostración. Si $\text{Int } A = \emptyset$ entonces $\text{Bd } A$ es trivialmente conexo y el resultado es cierto. Por lo tanto asumiremos que $\text{Int } A \neq \emptyset$. Además, si identificamos \mathbb{S}^n con \mathbb{R}_∞^n podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\infty \in \text{Int } A$ y entonces $\text{Bd } A$ es acotado en \mathbb{R}^n .

Asumamos que $\text{Bd } A$ no es un conjunto conexo y tomemos conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos A_1, A_2 tales que $\text{Bd } A = A_1 \cup A_2$. Definamos $\delta := d_2(A_1, A_2) > 0$ y para todo $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ consideremos los cubos

$$C(z_1, \dots, z_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : z_i \frac{\delta}{\sqrt{n}} \leq x_i \leq (z_i + 1) \frac{\delta}{\sqrt{n}}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Usaremos también la letra \mathcal{C} para denotar a la familia de cubos $C(z_1, \dots, z_n)$ que intersecan a A_1 .

Fijemos una de las componentes B , de $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, y observemos que si ponemos

$$B_1 = \text{Bd } A \cap B \quad \text{y} \quad B_2 = \text{Bd } A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$$

entonces tanto B_1 como B_2 son conjuntos cerrados no vacíos con $\text{Bd } A = B_1 \cup B_2$.

Tomamos $\epsilon = d_2(B, B_2) > 0$, hacemos una triangulación de $C_2(B, \epsilon)$ [RS45, p. 12], construimos el poliedro formado por los símlices de dimensión n de la triangulación que intersecan a B y tomamos un entorno regular suave M de este poliedro

en $C_2(B, \epsilon)$ como se hace en [Hir62], ver también [RS45, pp. 31–34]. En particular, M es una subvariedad suave de dimensión n de \mathbb{R}^n con frontera y tal que:

1. $B_1 \subset \text{Int } M$ y
2. $M \subset C_2(B, \epsilon)$ por lo que $B_2 \cap M = \emptyset$.

Recalcamos que $P := \partial M = \text{Bd } M$ (ya que en \mathbb{R}^n cualquier conjunto homeomorfo a un conjunto abierto debe ser también abierto, ver por ejemplo [Kur68, p. 475]). También tenemos que:

3. P es una subvariedad suave (no necesariamente conexa) de dimensión $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n [GP74, p. 59–60].
4. P tiene un número finito de componentes.
5. P tiene un entorno tubular en \mathbb{R}^n , esto es, existe un homeomorfismo (de hecho un difeomorfismo) h de $P \times (-1, 1)$ sobre un entorno abierto de P en \mathbb{R}^n tal que $h(x, 0) = x$ para todo $x \in P$ [GP74, p. 71–72]. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $h(P \times (-1, 0)) \subset \text{Int } M$ y $h(P \times (0, 1)) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$.
6. Puesto que M es conexa, $\text{Int } M$ es también un conjunto conexo porque cualquier camino en M uniendo dos puntos de $\text{Int } M$ se puede modificar fácilmente en $h(P \times (-1, 0))$ para incluirlo en $\text{Int } M$.

Sean P_1, \dots, P_k las componentes de P . Al ser cada P_i una subvariedad suave de dimensión $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n aplicamos el teorema de Jordan-Brouwer (ver por ejemplo [GP74, pp. 85–89]) y obtenemos que P_i descompone \mathbb{R}^n en dos regiones V_i y U_i . Definimos V_i de forma que es acotada y U_i no acotada. Además se tiene que $\text{Bd } V_i = \text{Bd } U_i = P_i$ (aquí se necesita $n \geq 2$).

Ahora se debe describir la posición relativa de las componentes P_i . Para empezar, descompongamos la familia P_1, \dots, P_k en familias disjuntas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{P}_j = \{P_{i(j,r)} : 1 \leq r \leq r_j\},$$

con las propiedades:

7. $P_{i(j,r)} \subset V_{i(j,1)}$ para cualesquiera j y $r > 1$,

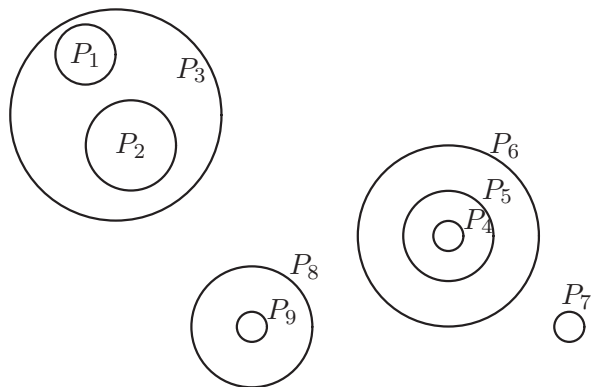


Figura 5.5: Para esta familia $\{P_i\}_{i=1}^9$ se tiene la descomposición $\mathcal{P}_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $\mathcal{P}_2 = \{P_4, P_5, P_6\}$, $\mathcal{P}_3 = \{P_7\}$, $\mathcal{P}_4 = \{P_8, P_9\}$

8. $P_{i(j,1)} \subset U_{i(j',1)}$ para cada $j \neq j'$ (observar la figura 5.5 para ver una descomposición concreta de una familia de conjuntos P_i).

De hecho, debido a que $\text{Int } M$ es un conjunto conexo y $P = \text{Bd}(\text{Int } M)$, se tiene que ocurre una de las dos posibilidades que siguen:

- (a) $l = 1$
 (b) $l > 1$ y $r_j = 1$ para todo $j = 1, \dots, l$.

La posibilidad (b) no puede ocurrir ya que la conexión de $\text{Int } M$ forzaría a que $M \subset \mathbb{R}^n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_l)$, $V_j := V_{i(j,1)}$, y entonces $h(P \times (0, 1)) \subset V_1 \cup \dots \cup V_l$. Esto significa que podemos modificar en M cualquier camino en $\mathbb{R}^n \setminus V_1$ uniendo dos puntos de $\mathbb{R}^n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_l)$ en un camino que une todavía los mismos puntos pero que no interseca a ninguno de los conjuntos V_j . En concreto, $\mathbb{R}^n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_l)$ es conexo y como tiene la misma frontera que M entonces $M = \mathbb{R}^n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_l)$. Pero esto es una contradicción porque M es acotado.

Así que debe ocurrir (a) y tenemos que $P_i \subset V_1$ para cualquier $i > 1$ y $P_i \subset U_j$ para cualquier $i \neq j$ con $i > 1$ y $j > 1$. Razonando de forma análoga al párrafo superior, obtenemos $\text{Int } M = V_1 \setminus \text{Cl}(V_2 \cup \dots \cup V_k)$ (si $k = 1$ lo que esto quiere decir es $V_2 \cup \dots \cup V_k = \emptyset$).

Recordemos ahora que B_2 no interseca a M , así que debe intersecar alguno de los conjuntos U_1, V_2, \dots, V_l , pongamos por ejemplo U_1 . Como $B_1 \subset \text{Int } M$ y tanto

$E_1 = A \setminus \{\infty\}$ como $E_2 = \mathbb{R}_\infty^n \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus E_1$ son conexos, P_1 debe intersecarlos. Además, $\text{Bd } A \cap P = \emptyset$ implica que $\text{Bd } A \cap E_1$ y $\text{Bd } A \cap E_2$ son conjuntos abiertos en P_1 , pero esto es una contradicción ya que P_1 es conexo. \square

Proposición 5.3.7. *Sea $A \subset \mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, tal que tanto A como $\mathbb{S}^n \setminus A$ son conexos. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, hay un entorno abierto U de $\text{Bd } A$ tal que $U \subset C(\text{Bd } A, \epsilon)$ y $U \cap A$ es conexo.*

Demostración. Durante esta demostración denotaremos por $\text{dist} : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \rightarrow [0, +\infty[$ a una distancia fija en \mathbb{S}^n y, para cada $A \subset \mathbb{S}^n$ y $\epsilon > 0$ recordamos que $C(A, \epsilon)$ representa al conjunto $\{x \in \mathbb{S}^n : \text{dist}(x, A) < \epsilon\}$. Como en el lema previo, no es restrictivo suponer que $\infty \in \text{Int } A \neq \emptyset$. Entonces será suficiente con ver que, para cualquier número fijo $\epsilon > 0$, el conjunto $C = C_2(\text{Bd } A, \epsilon) \cap A$ es conexo.

Descompongamos C y $D = A \setminus C$ en sus componentes, $C = \bigcup_{i \in I} C_i$, $D = \bigcup_{j \in J} D_j$. Para cada $i \in I$, sea $J_i \subset J$ el conjunto de índices j que satisfacen que C_i tiene algún punto de acumulación en D_j . También, para cada i , definamos $A_i = \text{Bd } A \setminus (\text{Bd } A \cap C_i)$ y $E_i = C_i \cup \bigcup_{j \in J_i} D_j$.

Observemos que cada C_i debe tener algún punto de acumulación en $\text{Bd } A$ ya que, si no, $d_2(x, \text{Bd } A) = \epsilon$ para cualquier $x \in \text{Bd } C_i$. Pero esto es imposible porque si $y \in C_i$ y dibujamos una línea recta conectándolo con su punto más cercano en $\text{Bd } A$, entonces $\text{Cl } C_i \cap \text{Bd } A = \emptyset$ implica que esta línea debe intersecar a $\text{Bd } C_i$ en algún punto z y se tiene que $d_2(z, \text{Bd } A) < \epsilon$.

Por otro lado hacemos notar que si $i' \neq i$ entonces todos los puntos de acumulación de $C_{i'}$ en $\text{Bd } A$ están en A_i (porque los conjuntos C_i son las componentes de C). Finalmente, observemos que si $j \in J \setminus J_i$ entonces $\bigcup_{i' \in I, i' \neq i} C_{i'}$ tiene puntos de acumulación en D_j porque $d(x, \text{Bd } A) = \epsilon$ para cualquier $x \in \text{Bd } D_j$. Todo esto, junto con la hipótesis, implica que

$$(\mathbb{S}^n \setminus A) \cup A_i \cup \left(\bigcup_{i' \in I, i' \neq i} C_{i'} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J \setminus J_i} D_j \right) = \mathbb{S}^n \setminus E_i$$

es conexo.

Como E_i es conexo también, el lema anterior implica que $\text{Bd } E_i$ es conexo. Puesto que el conjunto C_i tiene puntos de acumulación en $\text{Bd } A$ y $d(x, \text{Bd } A) \in \{0, \epsilon\}$ para cada $x \in \text{Bd } E_i$, la continuidad de la aplicación distancia y la conexión de $\text{Bd } E_i$ dan $\text{Bd } E_i \subset \text{Bd } A$. En concreto, esto implica que si $i \neq i'$ entonces $J_i \cap J_{i'} = \emptyset$ y que $J = \bigcup_{i \in I} J_i$. Por lo tanto $A = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Ahora, si C no es conexo, podemos dividir I en dos conjuntos vacíos disjuntos I_1 y I_2 tales que $\bigcup_{i \in I_1} C_i$ y $\bigcup_{i \in I_2} C_i$ son abiertos en A . Entonces claramente tenemos que $\bigcup_{i \in I_1} E_i$ y $\bigcup_{i \in I_2} E_i$ son disjuntos y abiertos en A , lo que es una contradicción porque A es conexo. \square

5.3.4. El teorema de Vinograd generalizado para órbitas no recurrentes

Enunciamos en la introducción de esta sección que el teorema de Vinograd sigue siendo válido en la esfera de dimensión mayor que 2 si sólo tenemos en consideración órbitas no recurrentes (teorema 5.3.A). Escribimos de nuevo este teorema, que se deduce fácilmente de los resultados anteriores.

Teorema. 5.3.A. *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ un flujo continuo sobre \mathbb{S}^n y sea $x \in \mathbb{S}^n$ un punto no recurrente del flujo. Entonces $\omega_\Phi(x)$ es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^n$, cuyo complementario es conexo.*

Recíprocamente, si Ω es la frontera de una región O , $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^n$, con complementario conexo, entonces existe un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ sobre \mathbb{S}^n y un punto no recurrente $x \in \mathbb{S}^n$ para el flujo Φ tal que $\Omega = \omega_\Phi(x)$.

Demostración. Como hemos dicho la prueba se hace usando los resultados anteriores, ya que, por la proposición 5.3.7 se tiene que en \mathbb{S}^n , ($n \geq 2$), los abiertos conexos con complementario conexo son abiertos ω -conexos. Así que aplicando el teorema 5.3.B se obtiene la prueba de esta generalización del teorema de Vinograd. \square

5.4. Transitividad en variedades de dimensión n para valores $n \geq 3$.

Aunque esta sección es corta, es una parte importante del artículo [JS04d]. En este trabajo hemos preferido, sin embargo, separar los resultados técnicos acerca de torres regularizables (sección 5.2) del resultado principal sobre variedades transitivas de [JS04d]. La razón de hacerlo así es que los resultados sobre torres regularizables han ayudado a simplificar las pruebas de los teoremas previos sobre conjuntos ω -límites de órbitas no recurrentes. En este apartado nos limitamos a caracterizar las variedades transitivas ya que el trabajo técnico ha sido desarrollado anteriormente.

La caracterización de variedades transitivas supondrá una generalización del teorema de Sidorov y se probará en los siguientes términos.

Teorema 5.4.A. *Sea M una variedad conexa de dimensión n (respectivamente una variedad conexa de dimensión n y suave), $n \geq 3$. Entonces M es transitiva (respectivamente transitiva de clase C^∞).*

Es conveniente señalar aquí algunos estudios previos acerca de variedades transitivas en el caso multidimensional. Algunos son anteriores al trabajo de Sidorov, entre ellos destacamos el trabajo de Oxtoby y Ulam que probaron en 1941 que todos los poliedros de dimensión n compactos y conexos admiten flujos continuos transitivos, ver [OU41]. Después del trabajo de Sidorov, Anosov [Ano74] probó la existencia de flujos ergódicos, y por lo tanto transitivos, sobre cualquier variedad compacta, conexa y suave de dimensión n .

Este problema de caracterizar variedades transitivas se propuso en el artículo de Smith y Thomas en [ST88a]. El siguiente apartado está dedicado a la demostración del teorema que hemos enunciado para caracterizar las variedades transitivas.

Prueba del teorema 5.4.A

La prueba de este teorema consiste en construir, usando la proposición 5.2.A, una torre regularizable infinita T en $O = \text{Int } \Omega$ con la propiedad adicional que una de sus fibras, ϱ^* , es densa en O . Es conveniente observar que este procedimiento no entraña dificultad si se sigue la construcción realizada entre las páginas 151 y 154 para la demostración del teorema 5.3.B.

Otra vez siguiendo la prueba del teorema 5.3.B se ve que si ϱ es una fibra de T y $u \in \varrho$ entonces existe un intervalo abierto $0 \in I_u$ y una biyección $\varrho_u : I_u \rightarrow \varrho$ tales que:

1. $\varrho_u(0) = u$,
2. si $v \in \varrho \cap e(C)$ para algún bloque (C, ϕ) en T , $v = \varrho_u(t^*) = e(\phi)(t^{**}, z)$, existe un número real $\epsilon_v > 0$ tal que $\varrho_u(t + t^*) = e(\phi)(t + t^{**}, z)$ para los números t que satisfacen $|t| < \epsilon_v$.

No es difícil ver² que $\Phi(t, u) := \varrho_u(t)$ es un flujo local bien definido sobre O

²De nuevo se pueden ajustar estos detalles como en la demostración del teorema 5.3.B, ver página 152

(que es diferenciable el caso suave). Además, si $u \in \varrho^*$ entonces tiene la semiórbita positiva completamente definida y $\omega_\Phi(u) = \Omega$. Ahora se aplica el lema 1.3.A (página 35) y terminamos la prueba.

Observación 5.4.1 (prueba alternativa del teorema 5.4.A). Dada una variedad topológica (respectivamente suave) de dimensión n , M , usando la proposición 5.2.A se puede construir una torre regularizable infinita T densa en O y cuyo interior es homeomorfo (respectivamente difeomorfo) a un conjunto conexo y abierto $O \subset \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, puesto que cada región de \mathbb{R}^n es transitiva por el teorema de Sidorov (teorema 5.3.1), se puede construir un flujo suave $\Psi : \mathbb{R} \times O \rightarrow O$ para el que hay un punto $y \in O$ con $\omega_\Psi(y) = \text{Cl } O$.

Sea $h : \text{Int } T \rightarrow O$ el homeomorfismo (respectivamente el difeomorfismo) entre $\text{Int } T$ y O y $\Phi : \mathbb{R} \times \text{Int } T \rightarrow \text{Int } T$ el flujo continuo (respectivamente suave) $\Phi : \mathbb{R} \times \text{Int } T \rightarrow \text{Int } T$ definido por $\Phi(t, x) = h^{-1}(\Psi(t, h(x)))$ con $\omega_\Phi(h^{-1}(y)) = \text{Cl } O$.

Extendamos por último, aplicando el lema 1.3.A (página 35), Φ a un flujo continuo (respectivamente suave) sobre M , y que todavía denotamos por Φ . Entonces $\omega_\Phi(u) = \text{Cl } O$ para $u = h^{-1}(y)$.

Observación 5.4.2 (respuesta a un problema planteado por P. Nykos). En 1998 P. Nykos en la “Spring Topology Conference” planteó la siguiente cuestión ¿Contiene toda variedad conexa de dimensión n un subconjunto denso homeomorfo a \mathbb{R}^n ?

En 2003 A. Shibakov respondió afirmativamente a esta cuestión en el artículo [Shi03]. Usando la proposición 5.2.A es fácil construir una torre regularizable infinita T , densa en O , y cuyo interior es homeomorfo a \mathbb{R}^n . Por lo tanto nuestro artículo [JS04d] da también una respuesta positiva al problema planteado por P. Nykos, alternativa y anterior a la de Shibakov.

Índice alfabético

- $B(C)$, 136
- $B_O(C)$, 136
- M_k , 53
- N_k , 53
- $T(C)$, 136
- $T_O(C)$, 136
- $\mathbb{B}^2, \mathbb{M}^2, \mathbb{P}^2, \mathbb{T}^2$, 47
- $\mathbb{D}^1, \mathbb{E}^1, \mathbb{O}^1, \mathbb{S}^1$, 50
- $\mathbb{D}^n(\rho), \mathbb{O}^n(\rho), \mathbb{S}^n(\rho)$, 47
- \mathbb{S}^n , 23
- \cong , 47

- Anillo, 47, 48
 - cerrado, 47
 - regular, 48
- Aplicación
 - de clase C^r , 28
 - diferenciable, 28
 - suave, 28
- Aplicación diferenciable
 - en variedades, 28
- Aplicación directa
 - de Gutiérrez, 95
 - de Poincaré, 94
- Aplicación inversa
 - de Gutiérrez, 95
 - de Poincaré, 95
- Arco, 47, 48
 - directamente consistente, 96
 - distancia de Fréchet, 89
 - distancia de Hausdorff, 89
 - inversamente consistente, 96
 - orientado, 48
 - puntos finales, 88
 - puntos interiores, 88
 - regularizable, 99
- Atlas, 22
 - de clase C^r , 22
- Banda de Möbius, 47, 48
- Base, 136
- Bloque, 136
 - nivel de un, 136
- Bola, 47
 - abierta, 47
 - cerrada, 47
- Botella de Klein, 47, 48
- Círculo, 47
- Célula, 135
 - parametrizada, 135
- Campo de vectores, 33
- Cantor
 - conjunto de, 99
 - partición, 99
 - refinamiento, 99
- Carta, 22
 - adaptada, 28
- Conjunto
 - α -límite, 38
 - ω -límite, 38

- realizable, 59
- de Cantor, 99
 - partición, 99
 - refinamiento, 99
- minimal, 42
 - existencia, 43
 - no trivial, 43
 - trivial, 43
- transitivo, 45
- Curva, 48
 - de Jordan
 - no orientable, 49
 - orientable, 49
 - de Jordan, 48
 - orientada, 48
 - puntos finales de una, 88
 - puntos interiores de una, 88
- Derivada en variedades, 29
- Difeomorfismo, 29
- Dimensión, 22
- Disco, 47
 - abierto, 47, 48
 - cerrado, 47, 48
- Ecuación diferencial, 31
 - autónoma, 33
 - solución, 33
- Embebimiento, 29
- Entorno
 - regular de Whitney, 89
- Entorno paralelizable, 94
- Escalera, 136
- Esfera, 47, 136
- Espacio
 - de fases, 31
 - de tiempos, 31
- Espacio tangente, 26
- Familia
 - casi regular, 98
- Familia realizable, 91
- Fibra
 - abierta, 135
 - cerrada, 135
- Flujo, 31
- Gutiérrez
 - aplicación inversa, 95
- Gutiérrez⁵
 - aplicación directa, 95
- Inmersión, 29
- Minimal
 - conjunto, 42
 - variedad, 44
- Modelos
 - de superficies, 52
- Modelos de
 - 1-variedades, 51
- Orbita, 38
 - cerrada, 40
 - directa completa, 96
 - inversa completa, 96
 - periódica, 40
 - recurrente, 40
 - no trivial, 41
 - trivial, 41
- Orientable
 - círculo, 49
 - curva de Jordan, 49
- Parametrización, 48
- Piso, 136

- Plano proyectivo, 47, 48
- Poincaré
 - aplicación directa, 94
 - aplicación inversa, 95
- Pseudoflujo, 31
 - equivalente, 34
- Pseudosuperficie, 52
- Punto
 - recurrente, 40
 - singular, 40
- Realizable
 - conjunto, 59
- Representación local
 - de una aplicación, 28
- Semiflujo, 32
- Sistema de coordenadas, 22
- Sistema dinámico
 - continuo, 31
- Submersión, 29
- Superficie
 - no orientable, 50
 - orientable, 50
 - alrededor de un círculo, 90
 - simplemente conexa, 50
- Teorema de
 - la curva de Jordan, 126
 - Schönflies, 126
- Teorema del
 - anillo, 126
 - collar, 126
- Toro, 47, 48
- Torre, 136
 - regularizable, 137
 - regularizable infinita, 137
- Transitividad, 45
 - fuerte, 124
- Trivial
 - conjunto minimal no, 43
- Variedad
 - suave, 23
 - con frontera, 25
 - diferenciable, 23
 - minimal, 44
 - sin frontera, 25
 - topológica, 21
 - transitiva, 45
 - transitiva de clase C^∞ , 45
- Vector tangente, 26
- Whitney
 - entorno regular de, 89

Bibliografía

- [ABZ96] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, and E. V. Zhuzhoma. *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*. Math. Monogr. AMS, Providence, Rhode Island, 1996.
- [AD02] D. Aubin and A. D. Dalmedico. Writing the history of dynamical systems and chaos: longue durée and revolution, disciplines and cultures. *Historia Mathematica*, **29**:273–339, 2002.
- [AL73] A. Andronov and E. Leontovich. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. John Wiley And Sons, Nueva York, 1973.
- [Ano74] D. V. Anosov. Existence of smooth ergodic flows on smooth manifolds. *Math. USSR-Izv.*, **8**:525–552, 1974.
- [Ano95] D. V. Anosov. Flows on closed surfaces and behavior of trajectories lifted to the universal covering plane. *J. Dynam. Control Systems*, **1**:125–138, 1995.
- [Ara69] S. K. Aranson. Trajectories on two-dimensional nonorientable manifolds. *Mat. Sb. (N. S.)*, **80 (122)**:314–333, 1969.
- [Bas02] W. Basener. Global cross sections and minimal flows. *Topology Appl.*, **121**:415–442, 2002.
- [Beb39] M. Bebutov. On the representation of trajectories of a dynamical system as a family of parallel lines. *Bull. Math. Univ. Moscow*, **2**:1–22, 1939. En ruso.
- [Ben01] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des Équations différentielles. *Acta Math.*, **24**:1–88, 1901.

- [Ben98] J.-C. Beniére. *Feuilletage minimaux et sans minimaux sur les surfaces non compactes*, Ph.D. Thesis. Université de Lyon, Lyon, 1998.
- [BF52] H. Bohr and W. Fenchel. *Ein satz über stabile bewegungen in der ebene*, volume II. Harald Bohr Collected Mathematical Works, Copenhagen, 1952.
- [BH70] N. P. Bhatia and O. Hajek. *Local semi-dynamical systems*. Lecture Notes in Mathematics, **90**. Springer Verlag, Berlín, 1970.
- [Bir27] G. Birkhoff. *Dynamical Systems*. 1927. Providence, Rhode Island.
- [Bir31] G. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. USA*, **17**:650–660, 1931.
- [BJ98] F. Balibrea Gallego and V. Jiménez López. A characterization of the ω -limit sets of planar continuous dynamical systems. *J. Differential Equations*, **145**:469–488, 1998.
- [BM99] J.-C. Beniére and G. Meigniez. Flows without minimal set. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **19**:21–30, 1999.
- [Bro62] M. Brown. Locally flat embeddings of topological manifolds. *Annals of Math.*, **75**:331–340, 1962.
- [BS70] N. P. Bhatia and B. P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Springer Verlag, Nueva York, 1970.
- [Bur79] R. B. Burckel. *An introduction to classical complex analysis*, volume I. Birkhäuser, Basel, 1979.
- [Che37] T. M. Cherry. Topological properties of the solutions of ordinary differential equations. *Amer. J. Math.*, **59**:957–982, 1937.
- [Cie01] K. Ciesielski. On the poincaré-bendixson theorem. *IMUJ preprint*, **19**:1–19, 2001.
- [Con93] L. Conlon. *Differentiable manifolds. A first course*. Birkäuser, Boston, 1993.
- [dC76a] M. P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

- [dC76b] M. P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, Madrid, 1976.
- [Den32] A. Denjoy. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures Appl.*, **11**:333–375, 1932.
- [ES92] R. Engelking and K. Sieklucki. *Topology. A geometric approach*. Heldermann Verlag Berlín, Berlín, 1992.
- [Fer92] J. A. Fernández Viña. *Análisis matemático II*. Tecnos, Madrid, 1992.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1974.
- [Gut78] C. Gutiérrez. Structural stability for flows on the torus with a cross-cap. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **241**:311–320, 1978.
- [Gut86] C. Gutiérrez. Smoothing continuous flows on two manifolds and recurrences. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6**:17–44, 1986.
- [Haa53] F. Haas. On the global behavior of differential equations on two-dimensional manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:630–636, 1953.
- [Haa54] F. Haas. Poincaré-Bendixson type theorems for two dimensional manifolds different from the torus. *Ann. of Math.*, **59**:292–299, 1954.
- [Haj65a] O. Hajek. Sections of dynamical systems in e^2 . *Czechoslovak Math. J.*, **15 (90)**:205–211, 1965.
- [Haj65b] O. Hajek. Structure of dynamical systems. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **6**:53–72, 1965.
- [Haj68] O. Hajek. *Dynamical systems in the plane*. Academic Press, ?????, 1968.
- [Hir62] M. W. Hirsch. Smooth regular neighborhoods. *Ann. of Math.*, **76**:524–530, 1962.
- [Hir88] M. W. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, Nueva York, 1988.
- [HW48] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension theory*. Princeton University Press, Princeton, 1948.

- [Ina99] T. Inaba. An example of a flow on a non compact surface without minimal set. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **19**:31–33, 1999.
- [Jac92] E. A. Jackson. *Perspectives of nonlinear dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Jim00] V. Jiménez López. *Ecuaciones diferenciales*. Universidad de Murcia, Murcia, 2000.
- [JS01] V. Jiménez López and G. Soler López. A topological characterization of ω -limit sets for continuous flows on the projective plane. *Discrete Contin. Dynam. Systems, Added Volume*:254–258, 2001.
- [JS03] V. Jiménez López and G. Soler López. A characterization of ω -limit sets of non recurrent orbits in \mathbb{S}^n . *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **13**:1727–1732, 2003.
- [JS04a] V. Jiménez López and G. Soler López. Accumulation points of nonrecurrent orbits of surface flows. *Topology Appl.*, 137:187–194, 2004.
- [JS04b] V. Jiménez López and G. Soler López. A characterization of ω -limit sets for continuous flows on surfaces. *Universidad de Murcia*, Preprint, 2004.
- [JS04c] V. Jiménez López and G. Soler López. Empty interior recurrence for continuous flows on surfaces. *Universidad de Murcia*, Preprint, 2004.
- [JS04d] V. Jiménez López and G. Soler López. Transitive flows on manifolds. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 20:107–130, 2004.
- [Ker60] M. Kervaire. A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, **34**:304–312, 1960.
- [Kin93] L. C. Kinsey. *Topology of surfaces*. Springer-Verlag, Nueva York, 1993.
- [Kir69] R. C. Kirby. Stable homeomorphisms and the annulus conjecture. *Ann. of Math.*, **89**:579–582, 1969.
- [KK96] G. Kuperberg and K. Kuperberg. Generalized counterexamples to the seifert conjecture. *Ann. of Math.*, **144**:239–268, 1996.
- [Kne23] H. Kneser. Reguläre kurvenscharen auf ringflächen. *Math. Ann.*, **91**:135–154, 1923.

- [Knu71] G. W. Knutson. A note on the universal covering space of a surface. *Amer. Math. Monthly*, **78**:505–509, 1971.
- [Kup94] K. Kuperberg. A smooth counterexample to the seifert conjecture. *Ann. of Math.*, **140**:723–732, 1994.
- [Kur66] K. Kuratowski. *Topology*, volume I. Academic Press, Nueva York, 1966.
- [Kur68] K. Kuratowski. *Topology*, volume II. Academic Press, Nueva York, 1968.
- [Mai39] A. G. Maier. Structurally stable transformations of the circle into the circle. *Uchen. Zap. Gor'kov. Gos. Univ*, **12**:215–229, 1939. En ruso.
- [Mai43] A.G. Maier. Trajectories on the closed orientable surfaces. *Mat. Sb.*, **12**:71–84, 1943. En ruso.
- [Mar31] A. A. Markov. Sur une propriété generale des ensembles minimaux de m. birkhoff. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **193**:823–825, 1931.
- [Mar54] L. Markus. Global structure of ordinary differential equations in the plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76**:127–148, 1954.
- [Mar66] N. G. Markley. The structure of flows on two-dimensional manifolds. Dissertation. *Yale University*, 1966.
- [Mar69a] N. G. Markley. On the number of recurrent orbit closures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**:413–416, 1969.
- [Mar69b] N. G. Markley. The Poincaré-Bendixson theorem for the klein bottle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135**:159–165, 1969.
- [Mar78] N. G. Markley. Invariant simple closed curves on the torus. *Michigan Math. J.*, **25**:45–52, 1978.
- [Moi52] E. E. Moise. Affine structures in 3-manifolds. v. the triangulation theorem and hauptvermutung. *Ann. of Math.*, **56**:96–114, 1952.
- [Mun75] J. R. Munkres. *Topology, a first course*. Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1975.
- [Neu75] D. Neumann. Classification of continuous flows on 2-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48**:73–81, 1975.

- [Nik01] I. Nikolaev. *Foliations on surfaces*, volume 41 of *A series of modern surveys in mathematics*. Springer-Verlag, Berlín, 2001.
- [NS60] V. Nemytskii and V. Stepanov. *Qualitative theory of differential equations*. Princeton University Press, Princeton, 1960. (versión original en ruso, Moscú, 1949).
- [NZ99] I. Nikolaev and E. Zhuzhoma. *Flows on 2-dimensional manifolds*, volume 1705 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlín, 1999.
- [Oda89] K. Odani. Nontrivial recurrent orbits of flows on surfaces. *Japan J. Math.*, **15**:205–211, 1989.
- [OU41] J. C. Oxtoby and S. M. Ulam. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. of Math.*, **42**:874–920, 1941.
- [Pei62] M. M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, **1**:101–120, 1962.
- [PM82] J. Palis and W. De Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New-York, 1982.
- [Poi81] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle i. *J. Math. Pures Appl.*, **7**:375–422, 1881.
- [Poi82] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle ii. *J. Math. Pures Appl.*, **8**:251–286, 1882.
- [Poi85] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle iii. *J. Math. Pures Appl.*, **1**:167–244, 1885.
- [Poi86] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle iv. *J. Math. Pures Appl.*, **2**:151–217, 1886.
- [Qui82] F. Quinn. Ends of maps. iii. dimensions 4 and 5. *J. Differential Geom.*, **17**:503–521, 1982.
- [Ric63] I. Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106**:259–269, 1963.

- [RS45] C. P. Rourke and B. J. Sanderson. *Introduction to piecewise-linear topology*. Springer-Verlag, Berlín, 1945.
- [Sch63] A. J. Schwartz. A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *Amer. J. Math.*, **85**:453–458, 1963.
- [Sch74] P. A. Schweitzer. Counterexamples to the seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *Ann. of Math.*, **100**:386–400, 1974.
- [Sei50] H. Seifert. Proc. amer. math. soc. *Ann. of Math.*, **1**:287–302, 1950.
- [Shi03] A. Shibakov. Dense r^n 's in n -manifolds. *Topology Proc.*, **27**:291–298, 2003.
- [Sid68] Ye. A. Sidorov. Smooth topologically transitive dynamical systems. *Mat. Zametki*, **4**:751–759, 1968. En ruso.
- [Sma61] S. Smale. Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Math.*, **74**:391–406, 1961.
- [Sol45] Iu. K. Solntzev. On the asymptotic behavior of integral curves of a system of differential equations. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **9**:233–240, 1945. En ruso.
- [Sol01a] G. Soler López. Flows equivalences. *Appl. Gen. Topology*, **2**:113–118, 2001.
- [Sol01b] G. Soler López. ω -límites de sistemas dinámicos continuos. Dpto. de Matemáticas. Universidad de Murcia, Murcia, 2001.
- [Sol01c] G. Soler López. ω -límites de sistemas dinámicos continuos. *Proceedings of XVII CEDYA- VII CMA*, 2001.
- [Sol03a] G. Soler López. Accumulation points of flows on the klein bottle. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **9**:497–503, 2003.
- [Sol03b] G. Soler López. Estudio asintótico de órbitas no recurrentes. *Proceedings of XVIII CEDYA- VIII CMA*, 2003.
- [Sol05] G. Soler López. ω -limit sets from nonrecurrent points of flows on manifolds. *Topology Appl.*, To appear, 2005.

- [Sot79] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto De Matemática Pura E Aplicada., Ríó de Janeiro, 1979.
- [Spa82] C. Sparrow. *The Lorenz equations*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, Nueva York, 1982.
- [Spi79] M. Spivak. *Differential geometry*. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1979.
- [ST88a] R. A. Smith and S. Thomas. Some examples of transitive smooth flows on differentiable manifolds. *J. London Math. Soc.*, **37**:552–568, 1988.
- [ST88b] R. A. Smith and S. Thomas. Transitive flows on two-dimensional manifolds. *J. London Math. Soc.*, **37**:569–576, 1988.
- [Tho79] J. A. Thorpe. *Elementary topics in differential geometry*. Springer-Verlag, Nueva York, 1979.
- [Thu97] W. P. Thurston. *Three dimensional geometry and topology*, volume **35** of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1997.
- [Vin52] R. E. Vinograd. On the limiting behavior of an unbounded integral curve. *Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. 155, Mat.*, **5**:94–136, 1952. En ruso.
- [Whi32a] H. Whitney. Regular families of curves i. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **18**:275–278, 1932.
- [Whi32b] H. Whitney. Regular families of curves i. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **18**:340–342, 1932.
- [Whi33] H. Whitney. Regular families of curves. *Ann. of Math.*, **34**:244–270, 1933.
- [Whi41] H. Whitney. On regular families of curves. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**:145–147, 1941.
- [Woc84] M. D. Wochele. The equicontinuous structure relation of a unicoherent point-transitive flow. *Fund. Math.*, **121**:179–188, 1984.

-
- [ZTWZ98] Z. Zhi-fen, D. Tong-ren, H. Wen-zao, and D. Zhen-xi. *Qualitative theory of Differential equations*, volume **23** of *Selected monographies*. Collaage press. University of Pekín, Pekín, 1998.