Capítulo 1

Un Examen Resuelto

Se presenta a continuación un examen resuelto que se puso en la convocatoria de febrero del curso 2000/2001. Durante este curso se impartieron todos los temas del temario excepto el último. Es por ello que no aparecen en el examen preguntas correspondientes a este tema. De 33 alumnos que se presentaron al examen aprobaron 16.

El examen consta de dos partes: una primera de preguntas y cuestiones breves de tipo teórico (es obligatorio responder a todas las preguntas de esta parte) y una de problemas (de los cuatro problemas propuestos el alumno deberá elegir y responder a tres de ellos).

Teoría y Cuestiones

1. **(1 Pto) Escribe el modelo matemático que describe el movimiento de vibración transversal de una cuerda elástica de longitud $l > 0$, cuyos extremos están fijos, suponiendo que es posible determinar la posición y velocidad de la cuerda en el instante inicial. Explica el significado físico de todos los elementos que aparecen en dicho modelo.**

   El modelo matemático para este problema se escribe como

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,x) = f(x)\ ;\ u_t(0,x) = g(x) & 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 & t \geq 0 \end{array} \right.$$

   La constante c que aparece en la ecuación recoge las propiedades físicas de la cuerda. Las condiciones iniciales $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = g(x)$ representan la posición y velocidad iniciales de la cuerda, respectivamente. Las condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,l) = 0$ significan físicamente que la cuerda está sujeta en los extremos y permanece así durante todo el tiempo.

2. **(1 Pto) Consideremos el siguiente problema con condiciones de contorno homogéneas para la ecuación de Klein-Gordon**

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(t,x) = 1.23\ u_{xx}(t,x) + 0.25\ u(t,x) & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 & t > 0 \end{array} \right. \tag{K-G}$$

   Si la función $\phi(t,x)$ es una solución de (K-G) verificando la condición inicial $u(0,x) = \sin x$, y si la función $\psi(t,x)$ es otra solución de (K-G) que satisface la condición inicial $u(0,x) = \cos x$, determina una solución de (K-G) que verifique la condición inicial

$$u(0,x) = -0.89 \sin x + \pi^2 \cos x.$$

La solución buscada es la función

$$u(t,x) = -0.89\ \phi(t,x) + \pi^2 \psi(t,x).$$

Es inmediato comprobar que efectivamente esta función es solución de nuestro problema, es decir, que se verifica tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales y de contorno.

3. **(0.5 Ptos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R})$. ¿Cómo se define la transformada de Fourier de f? ¿Y la transformada inversa de Fourier de f? ¿Bajo qué hipótesis se tiene la identidad $f = \left(\widehat{f}\right)^{\vee}$?**

   La transformada de Fourier de f se define como

   $$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\ dx.$$

   La transformada inversa de f se define como

   $$\overset{\vee}{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(\xi)\ d\xi.$$

   La identidad $f = \left(\widehat{f}\right)^{\vee}$ es cierta siempre que f y $\widehat{f}$ estén en $L^1(\mathbb{R})$ (es lo que afirma el Teorema de Inversión de Fourier).

4. **(0.5 Ptos) La transformada de Fourier es una operación definida sobre el espacio $L^1(\mathbb{R})$, y en particular, sobre $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. ¿Se puede extender esta operación a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$? En caso afirmativo, enuncia de manera precisa el resultado que garantiza que esta extensión es posible.**

   La respuesta es afirmativa. Es lo que afirma el Teorema de Plancharel, cuyo enunciado es el siguiente: La transformada de Fourier, definida en principio sobre $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se extiende de manera única a una aplicación de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo. Además, esta aplicación es biyectiva y se satisface la identidad

   $$\left\| \widehat{f} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2.$$

5. **(1 Pto) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ una función continua a trozos y supongamos que $\widehat{f}(\omega) = 0$ para todo $|\omega| > L$, con $L > 0$ (es decir, $f = f(t)$ es una señal de energía finita y limitada en banda). Demuestra que**

   $$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-in\pi\omega/L} \quad \text{para todo } |\omega| < L.$$

   Indicación: recuerda que la serie de Fourier compleja asociada a cualquier función $g = g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ se escribe en la forma

   $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} e^{-in\pi x/L}$$

donde

$$c_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \, e^{in\pi x/L} \, dt.$$

Como consecuencia del Teorema de Plancharel se tiene que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, ya que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Por tanto, podemos calcular la serie de Fourier asociada a $\widehat{f}$, la cual viene dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} e^{-in\pi\omega/L},$$

con

$$c_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \widehat{f}(\omega) \, e^{in\pi\omega/L} \, d\omega.$$

Nos planteamos ahora la validez de la identidad

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} e^{-in\pi\omega/L} \quad \text{para todo } |\omega| < L.$$

Para que dicha igualdad sea válida es suficiente con que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Convergencia Puntual para series de Fourier. Por tanto, hemos de probar que $\widehat{f}$ es diferenciable a trozos y continua en el intervalo $]-L, L[$. La diferenciabilidad a trozos es consecuencia de ser f continua a trozos y la continuidad de $\widehat{f}$ es consecuencia del Lema de Riemann-Lebesgue (nótese que $f \in L^1(\mathbb{R})$). Finalmente hemos de probar que

$$c_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \widehat{f}(\omega) \, e^{in\pi\omega/L} \, d\omega = \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right).$$

Ésto es consecuencia del Teorema de Inversión de Fourier ya que

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \widehat{f}(\omega) \, e^{in\pi\omega/L} \, d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \, e^{in\pi\omega/L} \, d\omega \\
&= \left(\widehat{f}\right)^{\vee} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \\
&= f\left(\frac{n\pi}{L}\right).
\end{aligned}$$

Nótese que se verifican las hipótesis del Teorema de Inversión ya que $f \in L^1(\mathbb{R})$, por hipótesis, y que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, ya que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f}(\omega) = 0$ para todo $|\omega| > L$ y $\widehat{f}$ es continua.

Problemas

1. **(2 Ptos) Al describir el comportamiento de un fluido isentrópico unidimensional usando las ecuaciones de Euler, si suponemos conocido el cociente $-p_x/\rho = x + p_0 \cos t$ $(p_0 \in \mathbb{R})$ y la velocidad inicial del fluido en cada punto, se obtiene el problema de Cauchy**

$$\begin{cases} u_t(t,x) + u(t,x) \, u_x(t,x) = x + p_0 \cos t & t, x > 0 \\ u(0,x) = u_0 & x > 0 \end{cases}$$

Resuélvelo usando el método de las características.

Consideremos la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\gamma(s) = (0, s)$. Es evidente que el problema consiste en encontrar la solución de la ecuación en derivadas parciales que sobre la curva γ es constante e igual a u_0. Veamos en primer lugar que se satisface la condición de transversalidad. En efecto:

$$\det \begin{bmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u_0) & \gamma_1'(s) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u_0) & \gamma_2'(s) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u_0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

El sistema característico asociado a este problema es

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = u(s) \\ u'(s) = x(s) + p_0 \cos(t(s)) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} t(0) = 0 \\ x(0) = s \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De la primera ecuación y de la condición inicial sobre t fácilmente se deduce que $t(s) = s$. Por otra parte, derivando en la segunda ecuación del sistema y sustituyendo en la tercera se obtiene la ecuación diferencial de orden dos

$$x''(s) - x(s) = p_0 \cos s$$

cuya solución general es

$$x(s) = c_1 e^s + c_2 e^{-s} - \frac{p_0}{2} \cos s.$$

Por tanto,

$$u(s) = c_1 e^s - c_2 e^{-s} + \frac{p_0}{2} \sin s.$$

Al imponer las otras dos condiciones iniciales obtenemos las constantes c_1 y c_2. En concreto,

$$c_1 = \frac{s + u_0}{2} + \frac{p_0}{4} \quad , \; c_2 = \frac{s - u_0}{2} + \frac{p_0}{4}.$$

En resumen, la solución del sistema característico es

$$\begin{cases} t(s) = s \\ x(s) = \left(\frac{s+u_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) e^s + \left(\frac{s-u_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) e^{-s} - \frac{p_0}{2} \cos s \\ u(s) = \left(\frac{s+u_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) e^s - \left(\frac{qsu_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) e^{-s} - \frac{p_0}{2} \sin s \end{cases}$$

Despejando de la segunda de las ecuaciones el valor de s y sustituyendo en la tercera este valor y el de t obtenemos la solución de nuestro problema

$$u(t, x) = \frac{e^t}{e^t + e^{-t}} \left(\psi(t, x) + \frac{u_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) - \frac{e^t}{e^t + e^{-t}} \left(\psi(t, x) - \frac{u_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) + p_0 \sin t$$

donde

$$\psi(t, x) = x + \frac{p_0}{2} \cos t - \left(\frac{u_0}{2} + \frac{p_0}{4}\right) e^t + \left(\frac{u_0}{2} - \frac{p_0}{4}\right) e^{-t}.$$

2. **(2 Ptos) Consideremos el problema de la transmisión del calor en una barra acotada el cual se modeliza por medio de la ecuación**

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) \quad , \ t>0 \ , \ 0<x<l. \tag{Ec}$$

Al tener en cuenta la ley de enfriamiento de Newton sobre los extremos de la barra y suponiendo que la temperatura en el exterior de la misma es constante e igual a cero se obtienen las condiciones de contorno

$$u(t,0) + u_x(t,0) = 0 \quad , \quad u(t,l) + u_x(t,l) = 0 \quad (t>0). \tag{Cc}$$

Aplica el método de separación de variables para resolver la ecuación (Ec) teniendo en cuenta las condiciones de contorno (Cc) y la condición inicial

$$u(0,x) = u_0(x) \quad (x>0).$$

Como siempre en el método de separación de variables proponemos una solución del tipo

$$u(t,x) = T(t)\, X(x).$$

Derivando y sustituyendo en (Ec) se tiene que

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = cte.$$

Las condiciones de contorno (Cc) se transforman en

$$X(0) + X'(0) = 0 \quad \text{y} \quad X(l) + X'(l) = 0.$$

Con todo ello se obtiene el problema de Sturm-Liovillle con condiciones separadas

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) + X'(0) = 0 \ ; \ X(l) + X'(l) = 0 \end{cases}$$

Los autovalores y autofunciones de este problema son

$$\lambda_0 = -1, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad , X_0(x) = e^{-x}, \quad X_n(x) = -\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (n \geq 1).$$

Por el Teorema de Sturm-Liouville sabemos además que la familia de funciones

$$\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

es una base ortogonal de $L^2(0,l)$.

Hemos de resolver ahora las ecuaciones diferenciales

$$T_0'(t) - a^2 T_0(t) = 0, \quad T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones son

$$T_0(t) = a_0 e^{a^2 t}, \quad T_n(t) = a_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right] \quad (n \geq 1).$$

Finalmente se propone como solución formal del problema la función

$$u(t,x) = a_0 e^{a^2 t} e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right]\left(-\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Al imponer la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$ se tiene la identidad

$$u_0(x) = a_0 e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|_2^2}\int_0^l u_0(x) X_n(x)\ dx \quad (n \geq 0).$$

3. **(2 Ptos) Estudiar el problema de la difusión de calor en el recinto**

$$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq b\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

suponiendo que la temperatura inicial es conocida y que el borde está aislado, esto es, obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_t(r,\theta) = a^2\left(u_{rr}(r,\theta) + r^{-1}u_r(r,\theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r,\theta)\right) & t > 0,\ 0 \leq r < b,\ 0 \leq \theta < \pi/2 \\ u(0,r,\theta) = u_0(r,\theta) & 0 \leq r < b,\ 0 \leq \theta < \pi/2 \\ u_\theta(t,r,0) = u_\theta(t,r,\pi/2) = u_r(t,b,\theta) = 0 & t > 0,\ 0 \leq r < b,\ 0 < \theta < \pi/2 \end{cases}$$

Como siempre en el método de separación de variables proponemos una solución de la forma

$$u(t,r,\theta) = T(t) R(r) \Theta(\theta).$$

Al derivar y sustituir en la ecuación del calor se obtiene la ecuación

$$T'(t) + a^2\mu^2 T(t) = 0 \tag{1.1}$$

y los problemas de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \nu^2\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi/2) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

y singular

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + \left(\mu^2 r^2 - \nu^2\right) R(r) = 0 \\ R'(b) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Nótese que las condiciones de contorno del problema regular de Sturm-Liouville para la función Θ proceden de las condiciones de contorno $u_\theta(t,r,0) = u_\theta(t,r,\pi/2) = 0$, y que la condición $R'(b) = 0$ procede de la condición $u_r(t,b,\theta) = 0$. Nótese también que en el problema singular de Sturm-Liouville para la función R está implícita la condición de regularidad de existir y ser finito el $\lim_{r\to 0} R(r)$. Los autovalores y autofunciones correspondientes al problema (1.2) son

$$\nu_n = 2n \quad , \quad \Theta_n(\theta) = \cos(2n\theta) \quad (n \geq 0).$$

Por su parte, los autovalores del problema (1.3) son los números

$$\mu_{k,n} = \frac{\lambda_{k,n}}{b}$$

donde $\lambda_{k,n}$ son las soluciones positivas de la ecuación

$$J'_{2n}(x) = 0.$$

Las correspondientes autofunciones del problema (1.3) son las funciones de Bessel de primera especie

$$J_{2n}\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}r\right) \quad (k \geq 1)$$

ya que la condición de regularidad de existir y ser finito el $\lim_{r\to 0} R(r)$ elimina a las funciones de Bessel de segunda especie. Finalmente, la solución general de la ecuación (1.1) es

$$T(t) = a_{kn} e^{-\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}a\right)^2 t}.$$

Con todo ello, la solución formal del problema es

$$u(t,r,\theta) = a_{01} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} e^{-\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}a\right)^2 t} \cos(2n\theta)\, J_{2n}\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}r\right)$$

donde los coeficientes a_{kn} se calculan al imponer la condición inicial $u(0,r,\theta) = u_0(r,\theta)$.

4. **(2 Ptos) Consideremos la ecuación lineal del transporte,**

$$u_t(t,x) + 2u_x(t,x) = 0,$$

que modeliza la evolución de la concentración de un contaminante en suspensión en el seno de un fluido que atraviesa una conducción de sección simétrica y constante a lo largo del eje X. Supongamos que la concentración inicial es $u(0,x) = 5$ para todo $x \geq 0$, y que no se producen nuevas aportaciones desde el origen de la conducción, esto es, $u(t,0) = 0$ para todo $t > 0$. Aplica la transformada de Laplace para resolver este problema, es decir, calcula, usando la transformada de Laplace la solución del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) + 2u_x(t,x) = 0 & t > 0,\ x > 0 \\ u(0,x) = 5 & x \geq 0 \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos la EDP por e^{-tz} e integramos en $[0,+\infty[$ respecto a la variable temporal t se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\ dt + 2\int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\ dt = 0.$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de la transformada de Laplace respecto a la derivación y usando *formalmente* el teorema de derivación para integrales paramétricas se obtiene que

$$-u(0,x) + zU(z,x) + 2U_x(z,x) = 0,$$

donde

$$U(z,x) = \mathcal{L}(u(\cdot,x))(z).$$

Por este procedimiento hemos transformada la EDP original en la EDO

$$U(z,x) + \frac{2}{z}U_x(z,x) = 5.$$

Por otra parte, la transformada de Laplace de la condición de contorno $u(t,0)=0$ es $U(z,0)=0$. Con todo ello obtenemos el problema transformado

$$\begin{cases} U(z,x)+\frac{2}{z}U_x(z,x)=5 & x>0 \\ U(z,0)=0 \end{cases}$$

La solución de este problema es

$$U(z,x)=\frac{5}{z}\left(1-e^{-\frac{x}{2}z}\right).$$

La solución de problema original se obtiene como la transformada de Laplace inversa de esta función. Para calcular esta antitransformada es suficiente recordar que

$$\mathcal{L}\left(e^{\omega t}\right)=\frac{1}{z-\omega} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-az}F(z)\right)(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t\leq a \\ \mathcal{L}^{-1}(F)(t-a) & \text{si} \quad t>a \end{cases}$$

Combinando ambas propiedades se tiene que

$$u(t,x)=\mathcal{L}^{-1}(U(\cdot,x))(t)=\begin{cases} 5 & \text{si} \quad t\leq x/2 \\ 0 & \text{si} \quad t>x/2 \end{cases}$$