Capítulo 2

El Problema de Cauchy para EDPs de Primer Orden

Este capítulo está dedicado al estudio de EDPs de primer orden, esto es, ecuaciones en las que sólo aparecen derivadas parciales de a lo sumo orden uno de la función incógnita. La ecuación de conservación del momento para un fluido no viscoso (en dimensión 1) constituye un ejemplo destacado de ecuación de primer orden. El estudio de este tipo de ecuaciones se inició en la segunda mitad del siglo XVIII a raíz de los trabajos de Clairaut, Lagrange, Charpit, Monge y Cauchy dentro del campo de la Geometría y de la Óptica Geométrica.

En este capítulo estudiaremos el método de las características para resolver EDPs de primer orden lineales y cuasilineales. Veremos que dicho método reduce el estudio de una EDP a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.1 Ecuaciones Lineales

Consideremos la ecuación

$$Lu\left(\mathbf{x}\right) \equiv \sum_{j=1}^{3} a_j\left(\mathbf{x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\left(\mathbf{x}\right) + b\left(\mathbf{x}\right) u\left(\mathbf{x}\right) = f\left(\mathbf{x}\right)$$

donde $a_j, b, f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^1\left(\Omega\right)$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

Sea ahora $S \subset \Omega$ una superficie regular que suponemos (por simplicidad) parametrizada por una única carta

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Supongamos también que sobre S tenemos definida una función $u_0 : S \to \mathbb{R}$ de clase C^1, esto es, que $u \circ \Phi \in C^1\left(U\right)$. Con todos estos datos, el problema de Cauchy (también llamado de valor inicial) para el operador L se formula en los siguientes términos:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in C^1\left(\Omega_0\right), \text{ siendo } S \subset \Omega_0 \subset \Omega \text{ un abierto, tal que} \\ Lu = f \text{ en } \Omega_0 \\ u\left(\mathbf{x}\right) = u_0\left(\mathbf{x}\right) \text{ para todo } \mathbf{x} \in S. \end{cases} \tag{2.1}$$

La función u que satisface las propiedades anteriores se denomina solución (clásica) del problema (2.1). Vamos a analizar ahora qué condiciones hemos de imponer sobre la superficie S para garantizar la existencia de solución. Para este fin introducimos en primer lugar el plano característico asociado a la ecuación anterior (también se dice plano característico asociado al operador L) en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ como

$$Car_{\mathbf{x}}(L) = \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 :< (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x})), (v_1, v_2, v_3) >= 0 \right\}$$

donde $<,>$ denota el producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^3$.

Diremos que S es una *superficie característica* para el operador L si el vector

$$A(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x}))$$

pertenece al plano tangente a la superficie S en todo punto $\mathbf{x} \in S$. Recordemos que esto es equivalente a decir que el determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) & a_1(\Phi(u_0, v_0)) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) & a_2(\Phi(u_0, v_0)) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) & a_3(\Phi(u_0, v_0)) \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \ (u_0, v_0) \in U.$$

Nótese también que lo anterior es equivalente a decir que el vector $\Phi_u \times \Phi_v \in Car_{\mathbf{x}}(L)$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

Veamos ahora que no hay esperanza de encontrar solución para el problema (2.1) en caso de ser S una superficie característica para el operador L. En efecto, sea $\mathbf{x}_0 = \Phi(u_0, v_0) \in S$. Si S es característica para L, entonces existen dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $A(\Phi(u_0, v_0)) = \alpha \Phi_u(u_0, v_0) + \beta \Phi_v(u_0, v_0)$. Por lo tanto, si existe solución para el problema (2.1) necesariamente se ha de cumplir que

$$\begin{aligned} f(\Phi(u_0, v_0)) &= \sum_{j=1}^{3} a_j(\Phi(u_0, v_0)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Phi(u_0, v_0)) + b(\Phi(u_0, v_0))\, u(\Phi(u_0, v_0)) \\ &= < \alpha \Phi_u(u_0, v_0) + \beta \Phi_v(u_0, v_0), \nabla u(\Phi(u_0, v_0)) > + b(\Phi(u_0, v_0))\, u(\Phi(u_0, v_0)) \\ &= < \alpha \Phi_u(u_0, v_0) + \beta \Phi_v(u_0, v_0), \nabla u_0(\Phi(u_0, v_0)) > + b(\Phi(u_0, v_0))\, u_0(\Phi(u_0, v_0)). \end{aligned}$$

La expresión anterior prueba que la función f está unívocamente determinada por la condición inicial u_0. De ello se deduce que el problema (2.1) no tiene solución para una $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, función de clase C^1 arbitraria.

Este hecho nos lleva a imponer sobre S la llamada *condición de transversalidad*, la cual se reduce a decir que S ha de ser no característica, o dicho de forma analítica que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) & a_1(\Phi(u_0, v_0)) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) & a_2(\Phi(u_0, v_0)) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) & a_3(\Phi(u_0, v_0)) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall \ (u_0, v_0) \in U. \tag{2.2}$$

Recordemos que esto significa geométricamente que *el vector $A(\Phi(u_0, v_0))$ no está en el plano tangente a la superficie S en el punto $\Phi(u_0, v_0)$*. De ahí el nombre de condición de transversalidad.

Veamos ahora que si se cumple la condición de transversalidad (2.2), entonces el problema (2.1) tiene una única solución que además podemos calcular explícitamente. Para ello vamos a definir las *curvas características* de la ecuación (2.1) como las líneas de flujo del campo vectorial A, es decir, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (que se suele llamar sistema característico)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) = A(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in S \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Si $\mathbf{x}(t) = (x_1(t; u_0, v_0), x_2(t; u_0, v_0), x_3(t; u_0, v_0))$ es la solución de la ecuación anterior que pasa por el punto $\mathbf{x}_0 = \Phi(u_0, v_0) \in S$ en el instante cero, esto es , $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, y si suponemos que el problema (2.1) tiene una solución que denotamos por u, entonces aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dt}[u(\mathbf{x}(t))] + b(\mathbf{x}(t))\, u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t))\, x_j'(t) + b(\mathbf{x}(t))\, u(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x}(t)),$$

es decir, la función $y(t) = u(\mathbf{x}(t))$ es solución del problema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) + b(\mathbf{x}(t))\, y(t) = f(\mathbf{x}(t)) \\ y(0) = u_0(\mathbf{x}_0) \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Nótese que el problema de Cauchy (2.3) tiene una única solución. Esto implica que las curvas características no se cortan. Por tanto, debido a la condición de transversalidad, estas curvas características cubren un entorno $\Omega_0 \supset S$ a medida que $\mathbf{x}_0$ recorre S. Entonces, dado un punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \Omega_0$, el valor que hemos de adjudicar a la solución de (2.1) es el valor que toma en t la solución del problema (2.4), es decir, $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$. Por tanto, para obtener la solución evaluada en el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ hemos de obtener $t = t(x_1, x_2, x_3)$, $u_0 = u_0(x_1, x_2, x_3)$ y $v_0 = v_0(x_1, x_2, x_3)$ para lo cual aplicaremos el teorema de la función inversa (o el de la función implícita, que igual da en este caso) al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t, u_0, v_0) - x_1 = 0 \\ x_2(t, u_0, v_0) - x_2 = 0 \\ x_3(t, u_0, v_0) - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Recuérdese que la condición básica para poder aplicar el teorema de la función inversa es que

$$\det\left[\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t, u_0, v_0)}(0, u_0, v_0)\right] \neq 0,$$

pero ésto es precisamente la condición de transversalidad (2.2). Nótese también que estamos usando el teorema de derivabilidad respecto a condiciones iniciales y parámetros de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las hipótesis de regularidad de las funciones a_j, b y f son las que garantizan la regularidad C^1 de las soluciones del sistema característico y del problema (2.4). Esto es a su vez básico para poder conseguir que u sea también C^1.

Veamos ahora todo lo anterior en un ejemplo concreto.

Ejemplo 2.1.1 *Sea* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z > 0\right\}$. *Estudiaremos el problema de encontrar una función* $u = u(x, y, z)$ *de clase* $C^1(\Omega_0)$ *(siendo* $\Omega_0 \supset S$ *un abierto de* $\mathbb{R}^3$*) de modo que*

$$\left\{ \begin{array}{lll} y u_x - x u_y + u_z = 0 & \text{en} & \Omega_0 \\ u(x, y, z) = x & \text{sobre} & S \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Una carta que parametriza la superficie S es la función

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \ U \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \rightsquigarrow & \Phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \end{array}$$

siendo $U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\right\}$. *Veamos en primer lugar que S no es característica. En efecto, dado que en este caso* $A(x,y,z) = (y,-x,1)$, *se tiene que*

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_0 \\ 0 & 1 & -u_0 \\ -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} & -\frac{v_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \forall \ (u_0, v_0) \in U.$$

El sistema característico asociado al problema (2.5) es

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \\ z'(t) = 1 \\ x(0) = u_0 \ ; \ y(0) = v_0 \ ; \ z(0) = \sqrt{1-u_0^2-v_0^2} \end{cases}$$

cuya solución son las curvas características

$$\begin{cases} x(t) = u_0 \cos t + v_0 \sin t \\ y(t) = -u_0 \sin t + v_0 \cos t \\ z(t) = t + \sqrt{1-u_0^2-v_0^2} \end{cases}$$

La solución de nuestro problema (2.5) la obtenemos ahora como solución del problema

$$\begin{cases} y'(t) = 0 \\ y(0) = u_0 \end{cases}$$

Por tanto, $y(t) = u(x(t), y(t), z(t)) = u_0$. *Finalmente, del sistema*

$$\begin{cases} u_0 \cos t + v_0 \sin t - x = 0 \\ -u_0 \sin t + v_0 \cos t - y = 0 \\ t + \sqrt{1-u_0^2-v_0^2} - z = 0 \end{cases}$$

despejamos t, u_0, v_0 *en función de* x, y, z *para obtener*

$$\begin{cases} t = z - \sqrt{1-x^2-y^2} \\ u_0 = x \cos t - y \sin t \\ v_0 = x \sin t + y \cos t \end{cases}$$

Con todo ello tenemos que la solución de nuestro problema es la función

$$u(x,y,z) = x \cos\left(z - \sqrt{1-x^2-y^2}\right) - y \sin\left(z - \sqrt{1-x^2-y^2}\right),$$

la cual está definida en el conjunto

$$\Omega_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\right\}.$$

Nota 2.1.1 Aunque el desarrollo anterior lo hemos hecho para funciones que dependen de tres variables independientes, un desarrollo similar vale para el caso en que la función incógnita depende de dos variables independientes. En este caso, el dato del problema se da no sobre una superficie regular sino sobre una curva $\gamma = \gamma(t)$. La matriz en la que se expresa la condición de transversalidad se compone ahora de dos vectores que son: por un lado $\gamma'(t)$; y por otro los dos coeficientes de la EDP. El sistema característico es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos incógnitas. Todo lo demás funciona exactamente igual que en el caso de tres variables independientes.

2.2 Ecuaciones Cuasilineales

En esta sección estudiaremos la ecuación

$$Lu(x,y) \equiv a_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + a_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f(x,y,u)$$

donde $a_1, a_2, f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^1(\Omega)$, siendo Ω un abierto.

Sea ahora $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1. Fijada la función $u_0 :]a,b[\to \mathbb{R}$ de clase C^1, el problema de Cauchy para el operador L se formula como

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Hallar } u : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de clase } C^1 \text{ tal que} \\ \{(x,y,u(x,y)) : (x,y) \in G\} \subset \Omega, \\ Lu = f \text{ en } G, \\ \gamma(s) \in G \text{ para todo } s \in]a,b[\,,\ \text{y} \\ u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = u_0(s) \text{ para todo } s \in]a,b[\end{array}\right. \tag{2.6}$$

Se dice que la curva γ es característica para el operador L si se verifica que

$$\det\begin{bmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u_0(s)) & \gamma_1'(s) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u_0(s)) & \gamma_2'(s) \end{bmatrix} = 0 \quad \forall\, s \in]a,b[\,.$$

Al igual que en el caso lineal, si γ es característica y si el problema (2.6) tiene solución, entonces la función f está unívocamente determinada por el dato inicial u_0. Por tanto, a partir de ahora supondremos que se verifica la llamada *condición de transversalidad* la cual se expresa analíticamente diciendo que

$$\det\begin{bmatrix} a_1(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u_0(s)) & \gamma_1'(s) \\ a_2(\gamma_1(s), \gamma_2(s), u_0(s)) & \gamma_2'(s) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall\, s \in]a,b[\,.$$

Veamos ahora que si se satisface la condición de transversalidad, entonces el problema (2.6) tiene una única solución. Para ello consideremos el problema de Cauchy para el llamado *sistema característico*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a_1(x,y,u) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(x,y,u) \\ \frac{du}{dt} = f(x,y,u) \end{array}\right.$$

con condición inicial, para cada s fijo,

$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = \gamma_1(s) \\ y(0) = \gamma_2(s) \\ u(0) = u_0(s) \end{array}\right.$$

Nótese que en el problema anterior están recogidos los problemas (2.3) y (2.4) del caso lineal. La diferencia esencial con el caso lineal es que ahora las ecuaciones aparecen acopladas.

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias establece que el problema anterior tiene una única solución que denotamos por

$$\begin{cases} x = x\left(t, \gamma_1\left(s\right), \gamma_2\left(s\right), u_0\left(s\right)\right) \equiv X\left(t, s\right) \\ y = y\left(t, \gamma_1\left(s\right), \gamma_2\left(s\right), u_0\left(s\right)\right) \equiv Y\left(t, s\right) \\ u = u\left(t, \gamma_1\left(s\right), \gamma_2\left(s\right), u_0\left(s\right)\right) \equiv U\left(t, s\right) \end{cases}$$

Además, en un entorno del punto $(0, s)$ las funciones anteriores son diferenciables debido al teorema de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre la continuidad y diferenciabilidad respecto de condiciones iniciales y parámetros. Nótese también que gracias a la condición de transversalidad,

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}\left(0, s\right) & \frac{\partial y}{\partial s}\left(0, s\right) \\ \frac{\partial x}{\partial t}\left(0, s\right) & \frac{\partial y}{\partial t}\left(0, s\right) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \gamma_1'\left(s\right) & \gamma_2'\left(s\right) \\ a_1\left(\gamma_1\left(s\right), \gamma_2\left(s\right), u_0\left(s\right)\right) & a_2\left(\gamma_1\left(s\right), \gamma_2\left(s\right), u_0\left(s\right)\right) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Podemos entonces aplicar el teorema de la función inversa para concluir que en un entorno del punto $(0, s)$ la función $\left(X\left(t, s\right), Y\left(t, s\right)\right)$ tiene inversa continuamente derivable

$$\begin{cases} t = T\left(x, y\right) \\ s = S\left(x, y\right) \end{cases}.$$

La solución de nuestro problema (2.6) es ahora la función

$$u\left(x, y\right) = U\left(T\left(x, y\right), S\left(x, y\right)\right).$$

Se puede probar que efectivamente esta función es solución de nuestro problema y además que dicha solución es única, pero no entraremos en estos detalles en este curso.

Veamos todo esto en un ejemplo concreto.

Ejemplo 2.2.1 *Consideremos el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u\left(x, y\right) \frac{\partial u}{\partial x}\left(x, y\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(x, y\right) = 1 \\ u\left(x, x\right) = 0 \end{cases}$$

Nótese en primer lugar que la recta $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida como* $\gamma\left(s\right) = \left(s, s\right)$ *satisface la condición de transversalidad ya que*

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1.$$

Por tanto, nuestro problema tiene solución. Para calcularla resolvemos en primer lugar el sistema característico

$$\begin{cases} x'\left(t\right) = u\left(t\right) \\ y'\left(t\right) = 1 \\ u'\left(t\right) = 1 \\ x\left(0\right) = y\left(0\right) = s \ ; \ u\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x\left(t; s\right) = \frac{t^2}{2} + s \\ y\left(t; s\right) = t + s \\ u\left(t; s\right) = t \end{cases}$$

Despejando ahora (t, s) *en función de* (x, y) *se obtiene que*

$$u(x, y) = 1 \pm \sqrt{1 + 2(x - y)}.$$

El signo se determina fácilmente teniendo en cuenta que $u(x, x) = 0$, *y por tanto*

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{1 + 2(x - y)},$$

la cual está definida en el conjunto

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y - \frac{1}{2} \right\}.$$

2.3 Ejercicios

1. Probar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x(x, y) + y u_y(x, y) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tiene solución sí y sólo si $u_0(t) = t + cte.$

2. Estudiar y resolver, cuando sea posible, los siguientes problemas de Cauchy

$$(a) \begin{cases} x u_x + 2y u_y + u_z - 3u = 0 \\ u(x, y, 0) = \cos(xy) \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x u_x + 2y u_y + u_z - 3u = x \\ u(x, y, 0) = \sin(xy) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u_x + y u_y = 1 \\ u(x, y) = x^2 + y \quad \text{para} \quad x = 1,\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} 2u_t + 3u_x = 0 \\ u(0, x) = \sin x \end{cases}$$

3. Probar que la solución del siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Euler unidimensional

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

está dada de forma implícita por

$$u = h(x - ut).$$

Calcula la solución de manera explícita para el caso $h(x) = x$.

4. Estudiar y resolver, cuando sea posible, los siguientes problemas de Cauchy

$$(a) \begin{cases} u u_x + u_y = 1 \\ u(x, x) = 2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x u_x + u u_y = x \\ u(1, x) = x + 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u u_x + y u_y = x + y \\ u(x, 1) = x + 1 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} x u u_x - u_y = 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

2.4 Objetivos

- Entender cómo se formula el problema de Cauchy para una EDP de primer orden.
- Aprender a resolver dichos problemas por el método de las características para el caso de ecuaciones lineales y cuasilineales.

2.5 Comentarios sobre la Bibliografía

El estudio del problema de Cauchy para EDPs de primer orden que se presenta en este capítulo es una adaptación del libro de Casas [2, Cap. 8] en el caso lineal y del de Peral [17, Cap. 2] en el caso cuasilineal. También es interesante el libro de John [11, Ch. 1].