Capítulo 3

Espacios de Hilbert

Uno de los objetivos de este curso es presentar métodos generales que nos permitan resolver al menos las ecuaciones del calor, ondas y Laplace así como EDPs lineales de segundo orden con coeficientes constantes las cuales mediante cambios de coordenadas adecuados son equivalentes a aquellas.

Uno de los primeros métodos que se usó para resolver estas ecuaciones es el Método de Separación de Variables el cual, en una primera aproximación, esbozaremos en este capítulo. Como veremos enseguida, dicho método involucra el hecho de que tengamos que escribir una función dada como combinación lineal *infinita* de determinadas funciones, por ejemplo funciones trigonométricas, que forman la base de un cierto espacio vectorial. Ello hace que tengamos que extender la noción de base de un espacio vectorial de dimensión finita a la dimensión infinita. Todo ello se hace en el marco de lo que llamaremos un espacio de Hilbert. El estudio de estos espacios es el objetivo básico de este capítulo.

Pero si como hemos dicho anteriormente el Método de Separación de Variables fue el primer método que se usó para resolver un problema de EDPs, uno de los métodos más modernos que se usan actualmente de manera profesional en las empresas de ingeniería, a saber el Método de los Elementos Finitos, necesita de nuevo de manera esencial un conocimiento cuanto menos elemental de los espacios de Hilbert.

Todo ello justifica sobradamente el estudio abstracto de los espacios de Hilbert que nos proponemos desarrollar en este capítulo.

3.1 Una Primera Aproximación al Método de Separación de Variables

Para ilustrar este método (y también para justificar el estudio de algunos temas que abordaremos en los próximos capítulos) consideremos el problema de la difusión del calor en una barra acotada. Nos proponemos encontrar una función $u = u(t,x) \in C^2(]0,\infty[\times]0,l[) \cap C([0,\infty[\times[0,l])$ y que satisfaga la EDP y las condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

siendo $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ una función dada. En el método de separación de variables se supone que la solución de este problema se puede escribir en la forma

$$u(t,x) = T(t)\, X(x)$$

es decir, que la solución de (3.1) se puede expresar como producto de dos funciones, una de las cuales depende únicamente de una de las dos variables independientes, y la otra sólo de la otra variable independiente. Con ello se tiene que $u_t(t,x) = T'(t)X(x)$ y $u_{xx}(t,x) = T(t)X''(x)$. Por tanto, si sustituimos en la ecuación del calor se tiene que

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

Las variables de esta ecuación se pueden separar dividiendo por $a^2T(t)X(x)$ para obtener

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

El término de la izquierda de esta ecuación depende únicamente de la variable t mientras que el término de la derecha depende sólo de x; además ambos son iguales, con lo cual deben ser iguales a una constante, llamémosla $-\lambda$. Por tanto

$$T'(t) = -\lambda a^2 T(t) \tag{3.2}$$

y

$$X''(x) = -\lambda X(x). \tag{3.3}$$

La solución general de la ecuación diferencial ordinaria (3.2) es

$$T(t) = C_0 e^{-\lambda a^2 t},$$

siendo C_0 una constante arbitraria, y la solución de (3.3) es

$$X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) \tag{3.4}$$

siendo C_1 y C_2 dos constantes arbitrarias, y suponiendo que λ es positivo. Nótese que si λ es negativo, entonces

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

y al imponer las condiciones de contorno $X(0) = X(l) = 0$ (las cuales provienen de $u(t,0) = u(t,l) = 0$) se obtiene que $X = 0$ y por tanto $u = 0$. También se obtiene la solución nula si $\lambda = 0$. Descartamos esta solución porque estamos buscando soluciones *no triviales.* Además, la solución $u = 0$ no verifica la condición inicial $u(0,x) = f(x)$ a menos que $f = 0$; pero éste es un caso trivial que no tiene interés físico alguno.

Por tanto nos centraremos en la solución dada en (3.4). Como hemos dicho anteriormente, las condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,l) = 0$ se traducen en que $X(0) = X(l) = 0$. La condición $X(0) = 0$ implica que $C_1 = 0$ mientras que la condición $X(l) = 0$ fuerza a que $C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, l\right) = 0$. Si tomamos $C_2 = 0$ obtenemos que $X(x) = 0$ lo que a su vez implica que u es idénticamente nula. Por tanto, si tomamos $C_2 \neq 0$ se ha de verificar que $\sin\left(\sqrt{\lambda}\, l\right) = 0$ y así

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

para algún número entero n. (Podemos tomar n positivo ya que si $n = 0$ se obtiene la solución nula y si n es negativo el cambio n por $-n$ únicamente produce el cambio C_2 por $-C_2$, con lo cual se obtiene la misma solución).

En resumen, para cada entero positivo n hemos obtenido una solución u_n de la ecuación del calor que se escribe en la forma

$$u_n(t,x) = e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

(Hemos tomado $C_0 = C_2 = 1$. Otras elecciones de C_0 y C_2 proporcionan múltiplos de u_n). Sin embargo, esta función no satisface la condición inicial $u(0,x) = f(x)$ a menos que $f(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$. ¿Cómo solucionar ésto? Como la ecuación del calor (así como todas las ecuaciones que estudiaremos en este curso) es lineal, cualquier combinación lineal finita de u_n también proporciona una solución de la ecuación del calor, esto es, la función

$$u_N(t,x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{3.5}$$

también es solución de la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$. Nos encontramos de nuevo con que esta función satisface la condición inicial $u(0,x) = f(x)$ únicamente si f se puede escribir como combinación lineal finita de funciones seno. Con el fin de solventar este problema obtamos finalmente por pasar al límite en (3.5) cuando $N \to \infty$ para obtener *formalmente* la solución

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{3.6}$$

El significado de la palabra *formalmente* que acabamos de mencionar hace referencia a que no nos hemos planteado (hasta ahora) si la serie en cuestión es convergente, ni tampoco si la función que define dicha serie es solución clásica de nuestra ecuación. Por tanto, hasta ahora sólo podemos hablar de *solución formal.*

Finalmente, hemos de imponer en nuestro esquema de separación de variables la condición inicial $u(0,x) = f(x)$. Sustituyendo esta condición en (3.6) obtenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{3.7}$$

Esta condición nos permitirá, bajo ciertas hipótesis sobre la función f, determinar de manera unívoca los coeficientes a_k y obtener de esta forma *una única solución clásica* (de momento sólo solución formal) de la ecuación del calor.

A modo de resumen: si repasamos todo lo que hemos visto en esta sección, para llevar a cabo el esquema de separación de variables hemos de:

- *Averiguar qué funciones pueden ser desarrolladas en series infinitas de senos y/o cosenos*, es decir, series del tipo (3.7). Para aquellas funciones para las que la respuesta sea afirmativa hemos de preguntarnos seguidamente *cómo calcular los coeficientes* a_k que aparecen en (3.7) y *entender bien el significado del signo = en la fórmula (3.7).* Este tipo de series se denominan *series de Fourier* y su estudio se engloba dentro del marco de los espacios de Hilbert.

- *Estudiar propiedades de convergencia y de derivabilidad de series infinitas del tipo (3.6)* con el fin de poder averiguar si las soluciones formales que obtenemos por medio del método de separación de variables son de hecho soluciones clásicas.

- *Resolver uno (o dos) problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos.* Recordemos que las condiciones de contorno del problema para la ecuación del calor se transforman en condiciones de contorno para la EDO (3.3). Este tipo de problemas se conocen con el nombre de *problemas de Sturm-Liouville*.

Daremos cumplida respuesta a cada una de estas tres cuestiones en este capítulo y en los dos siguientes.

3.2 Espacios Prehilbertianos

Como hemos visto en la sección anterior, la identidad (3.7) nos dice que la función f es *combinación lineal infinita* de las funciones seno, las cuales tienen el aspecto de ser la base de un cierto espacio vectorial. Esta sección es un primer paso hacia el concepto de base en un espacio vectorial de dimensión infinita.

Definición 3.2.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (o sobre $\mathbb{R}$). Se llama norma sobre X a toda aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \rightsquigarrow & \|\mathbf{x}\| \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \ \forall \ \mathbf{x} \in X$ *y* $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

(ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\| \ \forall \ \mathbf{x} \in X$ *y* $\forall \ \alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \ \forall \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Al par $(X, \|\cdot\|)$ se le llama espacio vectorial normado.

Por supuesto, en un mismo espacio vectorial se pueden definir diferentes normas.

Definición 3.2.2 *Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (eventualmente sobre $\mathbb{R}$). Llamaremos producto interior o escalar sobre H a toda aplicación*

$$\begin{array}{rccc} <\,,\,>: & H \times H & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \rightsquigarrow & <\mathbf{x}, \mathbf{y}> \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

(i) $<\mathbf{x}, \mathbf{x}> \geq 0 \ \forall \ \mathbf{x} \in H$ *y* $<\mathbf{x}, \mathbf{x}> = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

(ii) $<\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}> = \alpha <\mathbf{x}, \mathbf{z}> + \beta <\mathbf{y}, \mathbf{z}> \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y* $\forall \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$.

(iii) $\overline{<\mathbf{x}, \mathbf{y}>} = <\mathbf{y}, \mathbf{x}> \ \forall \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$.

Nota 3.2.1 Nótese que como consecuencia de (ii) y (iii) se verifica que

$$<\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}> = \overline{\alpha} <\mathbf{x}, \mathbf{y}> + \overline{\beta} <\mathbf{x}, \mathbf{z}> .$$

Definición 3.2.3 (Espacio prehilbertiano) *Se llama espacio prehilbertiano al par formado por un espacio vectorial y un producto interior. Lo denotaremos por $(H, <,>)$.*

En los espacios prehilbertianos se puede definir una norma a partir del producto interior del siguiente modo:

$$\|\mathbf{x}\| = +\sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}. \tag{3.8}$$

Es inmediato comprobar que (3.8) satisface las tres propiedades exigidas en la Definición 3.2.1. A lo largo de este capítulo, siempre que hablemos de norma en un espacio prehilbertiano entenderemos que esta norma es la asociada al producto interior del espacio mediante la fórmula (3.8). Algunos ejemplos importantes de espacios prehilbertianos son los siguientes:

Ejemplo 3.2.1 $\mathbb{R}^n$ *dotado del producto interior*

$$\begin{array}{rccl} <\,,\,>: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \rightsquigarrow & <\mathbf{x},\mathbf{y}>:=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *las coordenadas de los vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *en la base canónica de* $\mathbb{R}^n$*, es un espacio prehilbertiano. Obsérvese que la norma asociada a través del producto interior es la norma euclídea.*

Ejemplo 3.2.2 *Sea*

$$L^2([a,b];\mathbb{C}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 \; dx < \infty \right\}$$

Dicho espacio, dotado del producto interior

$$\begin{array}{rccl} <\,,\,>: & L^2 \times L^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \rightsquigarrow & <f,g>:= \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\, dx \end{array}$$

también es un espacio prehilbertiano. Nótese que debido a que

$$st \leq \frac{1}{2}\left(s^2 + t^2\right) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

(ya que $s^2 + t^2 - 2st = (s-t)^2 \geq 0$*) , entonces*

$$\left| f(x)\,\overline{g(x)} \right| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \right)$$

y por tanto, la integral mediante la cual se define el producto interior en L^2 *es convergente. La norma asociada a este producto escalar está dada por*

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \; dx \right)^{1/2}.$$

Nos ocuparemos más adelante de este espacio que juega un papel esencial en el mundo de las EDPs. A lo largo de esta sección $(H, <,>)$ *será un espacio prehilbertiano.*

Definición 3.2.4 *Se dice que* $\mathbf{x}$ *es ortogonal a* $\mathbf{y}$ *si se cumple que* $<\mathbf{x},\mathbf{y}>= 0$*. Nótese que debido a la propiedad (iii) en la definición de producto interior se tiene que si* $\mathbf{x}$ *es ortogonal a* $\mathbf{y}$ *entonces* $\mathbf{y}$ *también es ortogonal a* $\mathbf{x}$*. Por ello hablaremos siempre de que un par de vectores es o no ortogonal.*

Proposición 3.2.1

(a) ***(Teorema de Pitágoras)*** *Si* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n \in H$ *son ortogonales dos a dos, entonces*

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|^2$$

(b) ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)***

$$|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \ \ \forall \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H.$$

(c) ***(Desigualdad Triangular)***

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \ \ \forall \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H.$$

El Teorema de Pitágoras es consecuencia inmediata de la definición de producto interior. Haremos a continuación la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwartz debido a la importancia de este resultado.

Si $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0$ el resultado es obvio. Por tanto, supondremos que $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >\neq 0$. Sean

$$\alpha = \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|} \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \alpha \mathbf{y}.$$

Para todo número real t se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq < \mathbf{x} - t\mathbf{z}, \mathbf{x} - t\mathbf{z} > \\
&= < \mathbf{x}, \mathbf{x} - t\mathbf{z} > -t < \mathbf{z}, \mathbf{x} - t\mathbf{z} > \\
&= < \mathbf{x}, \mathbf{x} > -t < \mathbf{x}, \mathbf{z} > -t < \mathbf{z}, \mathbf{x} > +t^2 < \mathbf{z}, \mathbf{z} > \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - t \left(< \mathbf{x}, \mathbf{z} > + \overline{< \mathbf{x}, \mathbf{z} >}\right) + t^2 < \alpha \mathbf{y}, \alpha \mathbf{y} > \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2t \operatorname{Re} < \mathbf{x}, \mathbf{z} > +t^2 \alpha \overline{\alpha} < \mathbf{y}, \mathbf{y} > \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2t \operatorname{Re} < \mathbf{x}, \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|} \mathbf{y} > +t^2 |\alpha|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2t \operatorname{Re} \frac{\overline{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}}{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|} < \mathbf{x}, \mathbf{y} > +t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2t |< \mathbf{x}, \mathbf{y} >| + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 .
\end{aligned}$$

Consideremos la función $g(t) = \|\mathbf{x}\|^2 - 2t |< \mathbf{x}, \mathbf{y} >| + t^2 \|\mathbf{y}\|^2$, la cual acabamos de ver es no negativa. El mínimo de la función g se alcanza en el punto $t_0 = \frac{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Por tanto

$$g\left(\frac{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|}{\|\mathbf{y}\|^2}\right) \leq g(t) \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

y como g es no negativa, $g\left(\frac{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|}{\|\mathbf{y}\|^2}\right) \geq 0$, es decir,

$$\|\mathbf{x}\|^2 - 2\frac{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq 0$$

de donde se obtiene la desigualdad buscada.

Finalmente, demostraremos la desigualdad triangular. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= <\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}> \\
&= <\mathbf{x}, \mathbf{x}> + <\mathbf{x}, \mathbf{y}> + <\mathbf{y}, \mathbf{x}> + <\mathbf{y}, \mathbf{y}> \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + <\mathbf{x}, \mathbf{y}> + \overline{<\mathbf{x}, \mathbf{y}>} + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\mathrm{Re} <\mathbf{x}, \mathbf{y}> + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,|<\mathbf{x}, \mathbf{y}>| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\,,
\end{aligned}$$

la última desigualdad siendo consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ■

Definición 3.2.5 *Sea* $\{\mathbf{x}_i : i \in I\} \subset H$ *un conjunto (finito o infinito) de vectores. Se dice que* $\{\mathbf{x}_i : i \in I\}$ *es un sistema ortogonal si* $<\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j>= 0\ \forall i \neq j$. *Si además* $<\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i>= 1\ \forall i \in I$, *entonces se dice que* $\{\mathbf{x}_i : i \in I\}$ *es un sistema ortonormal.*

Ejemplo 3.2.3 *Consideremos en* $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ *el sistema*

$$S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}\,.$$

Veamos que se trata de un sistema ortogonal. En efecto: para cada $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$< 1, \cos nx >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ dx = 0$$

y

$$< 1, \sin nx >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\ dx = 0.$$

Si $n \neq m$, *entonces*

$$< \cos nx, \cos mx >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\ dx = 0,$$

$$< \sin nx, \sin mx >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\ dx = 0$$

y para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$< \cos nx, \sin mx >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\ dx = 0.$$

Además,

$$< 1, 1 >= \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$< \cos nx, \cos nx >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\ dx = \pi$$

y

$$< \sin nx, \sin nx >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\ dx = \pi.$$

Para efectuar el cálculo de cada una de las integrales anteriores es suficiente con tener en cuenta las fórmulas trigonométricas

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\,,$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

y

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\,.$$

Por tanto, el sistema

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

es un sistema ortonormal en $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$.

Los resultados que siguen a continuación son un primer paso hacia la teoría de aproximación en espacios prehilbertianos.

Definición 3.2.6 *Sea S un subespacio vectorial de un espacio prehilbertiano H. Un elemento $\mathbf{x} \in H$ se dice ortogonal a S si $<\mathbf{x},\mathbf{y}>= 0$ para todo $\mathbf{y} \in S$. Se llama complemento ortogonal a S, denotado por $S^\perp$ al conjunto*

$$S^\perp = \{\mathbf{y} \in H : \ \mathbf{y} \text{ es ortogonal a } S\}$$

No es difícil comprobar que $S^\perp$ es un subespacio vectorial (ver ejercicio 5).

Teorema 3.2.1 ***(de la proyección)*** *Sea S un subespacio vectorial de dimensión finita m de un espacio prehilbertiano $(H,<,>)$. Sea $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m\}$ una base ortonormal de S. Entonces todo vector $\mathbf{x} \in H$ se expresa de modo único como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)$ donde $\mathbf{x}_s \in S$ y $\mathbf{x}-\mathbf{x}_s \in S^\perp$. El elemento $\mathbf{x}_s$ está dado por $\mathbf{x}_s = \sum_{1\le i\le m} <\mathbf{x},\mathbf{x}_i> \mathbf{x}_i$ y se le llama proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre S. Además,*

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\| < \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \quad \forall\ \mathbf{y} \in S \text{ con } \mathbf{y} \neq \mathbf{x}_s \tag{3.9}$$

es decir, $\mathbf{x}_s$ es la mejor aproximación de $\mathbf{x}$ por elementos de S.

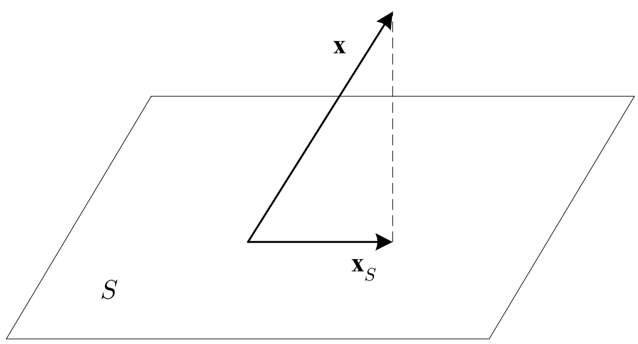

Figura 3.1: Proyección del vector $\mathbf{x}$ sobre el espacio S.

Se trata de una demostración constructiva y por tanto resulta interesante hacerla. La unicidad se obtiene del siguiente modo: supongamos que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_s) \ \text{ con } \mathbf{x}_s \in S \text{ y } \mathbf{x}-\mathbf{x}_s \in S^\perp$$

y que también

$$\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{x}}_s + (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}_s) \text{ con } \widehat{\mathbf{x}}_s \in S \text{ y } \mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}_s \in S^{\perp}.$$

Hemos de probar que $\mathbf{x}_s = \widehat{\mathbf{x}}_s$. Debido a que tanto S como $S^{\perp}$ son subespacios vectoriales de H se tiene que $\mathbf{x}_s - \widehat{\mathbf{x}}_s \in S$ y $(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}_s) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_s - \widehat{\mathbf{x}}_s \in S^{\perp}$. Por tanto,

$$0 =< \mathbf{x}_s - \widehat{\mathbf{x}}_s, \mathbf{x}_s - \widehat{\mathbf{x}}_s >= \|\mathbf{x}_s - \widehat{\mathbf{x}}_s\|^2$$

lo que implica que $\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{x}}_s$.

Veamos ahora la existencia. Sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}$ una base ortonormal de S. Entonces el elemento

$$\mathbf{x}_s = \sum_{i=1}^{m} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_i > \mathbf{x}_i \in S.$$

Veamos que $\mathbf{x} - \mathbf{x}_s \in S^{\perp}$. Es evidente que es suficiente con demostrar que $\mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ es ortogonal a todos los elementos de la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}$. Para cada $1 \leq j \leq m$ se tiene que

$$\begin{aligned}
< \quad & \mathbf{x} - \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_j >=< \mathbf{x}, \mathbf{x}_j > - < \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_j > \\
= \quad & < \mathbf{x}, \mathbf{x}_j > - \sum_{i=1}^{m} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_i >< \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j > \\
= \quad & < \mathbf{x}, \mathbf{x}_j > - < \mathbf{x}, \mathbf{x}_j > \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

debido a la ortogonalidad de la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}$.

Finalmente, veamos que se satisface (3.9). Sea $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_s$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + (\mathbf{x}_s - \mathbf{y})\|^2 \\
&= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|^2 + \|\mathbf{x}_s - \mathbf{y}\|^2 \\
&> \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|^2
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe al teorema de Pitágoras. ■

Concluimos esta sección con uno de los resultados más importantes de la teoría de espacios prehilbertianos, la desigualdad de Bessel.

Teorema 3.2.2 *Sea* $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *un sistema ortonormal en* H. *Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_n >|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall\, \mathbf{x} \in H. \quad \textit{\textbf{(Desigualdad de Bessel)}} \tag{3.10}$$

A los números $< \mathbf{x}, \mathbf{x}_n >$ *se les llama coeficientes de Fourier de* $\mathbf{x}$ *respecto al sistema* $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3.3 Espacios de Hilbert. Definición y Propiedades Básicas

En esta sección, $(X, \|\cdot\|)$ será un espacio vectorial normado.

Definición 3.3.1 *Sea* $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *una sucesión.*

(a) *Se dice que* $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si existe un* $\mathbf{x} \in X$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *verificando que si* $n \geq n_0$*, entonces* $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$*. El elemento* $\mathbf{x}$ *se denomina límite de la sucesión* $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y no es difícil comprobar que dicho elemento, caso de existir, es único.*

(b) *Se dice que* $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m \geq n_0$*, entonces* $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$*.*

No es difícil demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy. El recíproco no es, en general, cierto, es decir, existen espacios vectoriales normados que poseen sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Aquellos espacios vectoriales normados para los cuales toda sucesión de Cauchy es convergente se denominan espacios completos o también se dice que son espacios de Banach. Un tipo particularmente importante de espacios de Banach son aquellos donde la norma procede de un producto escalar. Son los llamados espacios de Hilbert.

Definición 3.3.2 (Espacio de Hilbert) *Sea* $(H, <,>)$ *un espacio prehilbertiano. Se dice que* $(H, <,>)$ *es un espacio de Hilbert si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en* H *converge (respecto a la norma asociada al producto interior) a un elemento* $\mathbf{x} \in H$*.*

Los ejemplos más destacados de espacios de Banach son los espacios $L^p([a,b];\mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$. Dichos espacios se definen del siguiente modo. Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$L^p([a,b];\mathbb{C}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

y

$$L^\infty([a,b];\mathbb{C}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \text{existe } M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ c.t.p. } x \in [a,b] \}.$$

El símbolo c.t.p. (en inglés se suele escribir a.e., almost everywhere) significa casi por todas partes, es decir, en todos los puntos de $[a,b]$ salvo en un conjunto de medida cero.

Se puede demostrar que los espacios $L^p([a,b];\mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, equipados con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ c.t.p. } x \in [a,b] \}$$

son espacios de Banach.

Además, en el caso $p = 2$, la norma $\|\cdot\|_2$ es la norma asociada al producto interior

$$< f, g >= \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad \forall\, f, g \in L^2$$

con lo cual $L^2([a,b];\mathbb{C})$ *es un espacio de Hilbert.*

Nota 3.3.1 La demostración de la completitud de L^2 no es sencilla, pero si que es una propiedad importante, y por tanto, es algo que debemos guardar en mente: $L^2([a,b];\mathbb{C})$ *es un espacio de Hilbert.* En la sección Comentarios sobre el Capítulo volveremos sobre esta cuestión.

Ya estamos en condiciones de poder enunciar y estudiar algunas propiedades del concepto de *base de Hilbert.*

Definición 3.3.3 (Base de Hilbert) *Un sistema ortonormal* $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *en un espacio de Hilbert* H *se dice que es una base ortonormal o base de Hilbert si es un sistema ortonormal maximal, es decir, si no existe ningún otro sistema ortonormal que contiene estrictamente a* $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Las bases de Hilbert se pueden caracterizar del siguiente modo.

Teorema 3.3.1 *Sea* $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert* H. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una base de Hilbert.*

(ii) *Si existe un* $\mathbf{x} \in H$ *tal que* $< \mathbf{x}, \mathbf{x}_n >= 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathbf{x} = 0$.

(iii) *Para todo* $\mathbf{x} \in H$ *se verifica que*

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_n > \mathbf{x}_n. \tag{3.11}$$

(iv) *Para todo* $\mathbf{x} \in H$ *se cumple*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_n >|^2 . \quad \textbf{\textit{(Identidad de Parseval)}} \tag{3.12}$$

Esbozamos a continuación la demostración de este resultado.

(i)⇒(ii) Supongamos que existe un $\mathbf{x} \in H$, $\mathbf{x} \neq 0$, y que satisface que $< \mathbf{x}, \mathbf{x}_n >= 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Debemos probar que entonces $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es una base de Hilbert. Sea $\overline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Dicho elemento es unitario y ortogonal a todo elemento del sistema $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, el sistema

$$\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{\mathbf{x}}\}$$

es un sistema ortonormal que contiene estrictamente a $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ con lo cual este sistema no es una base de Hilbert.

(ii)⇒(iii) Fijado $\mathbf{x} \in H$, consideremos la sucesión

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_k > \mathbf{x}_k.$$

Veamos que $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, con $n < m$, un sencillo calculo muestra que

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >|^2 .$$

Recordemos que, por la desigualdad de Bessel, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >|^2$$

es convergente y por tanto,

$$\lim_{n,m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >|^2 = 0.$$

Sea $\mathbf{y} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m$ y veamos que $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. En virtud de (ii), únicamente debemos probar que

$$< \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}_n >= 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Para ello observemos en primer lugar que

$$< \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_n >= \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >< \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_n >=< \mathbf{x}, \mathbf{x}_n > & \text{si} \quad m \geq n \\ \\ 0 & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} < \quad & \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}_n >=< \mathbf{x} - \lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_n > \\ = \quad & < \mathbf{x}, \mathbf{x}_n > - \lim_{m\to\infty} < \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_n > \\ = \quad & < \mathbf{x}, \mathbf{x}_n > - < \mathbf{x}, \mathbf{x}_n > \\ = \quad & 0, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debida a la linealidad del producto interior y a la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Siendo

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_k > \mathbf{x}_k$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_n\|^2 &= < \mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_k > \mathbf{x}_k, \mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_k > \mathbf{x}_k > \\ &= < \mathbf{x}, \mathbf{x} > -2 \sum_{k=1}^{n} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >|^2 + \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_k > \overline{< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >} < \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k > \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >|^2 \end{aligned}$$

y tomando límites cuando $n \to \infty$,

$$0 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |< \mathbf{x}, \mathbf{x}_k >|^2 .$$

(iv)$\Rightarrow$(i) Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que existe un sistema ortonormal S que contiene estrictamente a $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathbf{z} \in S$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por la identidad de Parseval se tiene que

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |< \mathbf{z}, \mathbf{x}_k >|^2 = 0$$

debido a que $< \mathbf{z}, \mathbf{x}_k >= 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mathbf{z} = 0$ lo que es un absurdo ya que $\mathbf{z}$ ha de ser un vector unitario. ■

Nota 3.3.2 Nótese que la equivalencia (iii) es la que generaliza al caso infinito dimensional una de las dos propiedades exigidas en la definición de base en un espacio vectorial de dimensión finita: la de ser un sistema generador. Por supuesto, todo sistema finito y ortogonal de vectores es libre (ver ejercicio 2). También es importante tener presente que la identidad (3.11) significa que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_n > \mathbf{x}_n$$

converge en norma al elemento $\mathbf{x}$.

Anteriormente hemos visto que el sistema

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

es un sistema ortonormal en $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$. Se puede demostrar, aunque esto tampoco es fácil (ver [8, Th. 3.5, p. 78]), que *dicho sistema es una base de Hilbert de* $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$. Por tanto, para toda función $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned} f &= < f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(< f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} > \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + < f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} > \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (3.13) \end{aligned}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \quad , \; n \geq 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \quad , \; n \geq 1.$$

es decir, *toda función de* $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ *admite un desarrollo en serie trigonométrica de senos y cosenos la cual es convergente en* L^2 *(también se dice en media cuadrática) a la función* f. En el próximo capítulo nos dedicaremos a estudiar más en detalle estas series.

3.4 Comentarios sobre el Capítulo

Es importante señalar que la completitud de L^2 se establece en el marco de una teoría de integración más general que la de Riemann. En concreto, en el marco de la integral de Lebesgue. Por tanto, para ser absolutamente precisos, al definir L^2 (y también L^p, $1 \leq p < \infty$) deberíamos haber dicho que este espacio está formado por funciones *medibles* de modo que la integral (de Lebesgue claro está) del módulo al cuadrado (o elevado a p en caso de L^p) de la función es finito. No debe, sin embargo, asustarse el lector por este hecho. En efecto, si denotamos por $PC([a, b])$ al conjunto de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ que son continuas a trozos, es decir, continuas en todo el intervalo $[a, b]$ salvo a lo sumo en un número finito de puntos donde tienen discontinuidades de salto finito, entonces este espacio PC es “prácticamente igual” a L^2. Para ser más precisos, el término “prácticamente igual” significa que PC es denso en L^2, es decir, que cualquier función de L^2 puede ser aproximada por funciones de PC. Por ello, algunos libros de EDPs para ingenieros, como el de Pinkus-Zafrany, prefieren trabajar en el espacio PC. De esta forma se evita tener que hablar de la integral de Lebesgue, pues, de hecho, para funciones del espacio PC coinciden los conceptos de integral de Riemann y de Lebesgue. El problema está en que el espacio PC, equipado de la norma $\|\cdot\|_2$, no es completo. Una prueba de la completitud de L^2 (en general de L^p) puede encontrarse en [1, Teorema IV.8, p.57]).

Por el contrario, otros autores como de la Rosa, Folland y Marcellán-Casasús Zarzo, prefieren hablar directamente de L^2 pese a que la integral de Lebesgue es en este punto un acto de fe. Esta es la opción que también hemos adoptado en este capítulo.

Respecto de la integral de Lebesgue, una presentación muy directa y sencilla sobre este tema puede encontrarse en [3, 5] y en [10]. En este curso no entraremos en el estudio de dicha integral. Es algo que excede el nivel de este curso. No obstante, señalaremos a continuación algunas de las diferencias más significativas entre la integral de Riemann y la de Lebesgue.

- Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue si y sólo si $|f|$ lo es. En integración Riemann esta propiedad es falsa. Por ejemplo, la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  no es integrable Riemann, y sin embargo $|f|$ si que lo es.

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue y si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es igual casi por todas partes a f, es decir en todo punto de $[a, b]$ excepto en un conjunto de medida cero, entonces g es integrable Lebesgue y además $\int f = \int g$. Esta propiedad tampoco se cumple en integración Riemann. Las funciones f y $|f|$ consideradas en el punto anterior son un claro ejemplo de este hecho. Por tanto, mientras la integración Riemann es invariante por conjuntos de contenido nulo, la integración Lebesgue lo es por conjuntos de medida nula. Por ello, dos funciones de L^p que son iguales c.t.p. se dice que son iguales en L^p.

- Otra de las diferencias importantes entre ambos conceptos de integración es su comportamiento frente a procesos de paso al límite. Por ejemplo, supongamos ordenados los números racionales del intervalo $[0, 1]$, esto es, $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, q_3, \cdots\}$ y consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n\} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  Esta sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  la cual no es integrable Riemann. Este tipo de patologías no suceden en integración Lebesgue donde se dispone del siguiente Teorema de la Convergencia Dominada. Sea $\{f_n : [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables Lebesgue que converge c.t.p. a una función f. Supongamos además que f_n está dominada por una función integrable (Lebesgue) g (es decir, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y c.t.p. $x \in [a, b]$). Entonces f es integrable y además

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

3.5 Ejercicios

1. Sea $(H, <,>)$ un espacio prehilbertiano. Supongamos que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ son linealmente dependientes. Demuestra que
$$|< \mathbf{x}, \mathbf{y} >| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$
es decir, en caso de vectores linealmente dependientes, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es en realidad una igualdad.

2. Sea $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano. Demuestra que los vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ son linealmente independientes.

3. Sea H un espacio prehilbertiano de dimensión finita n y sea $\mathbf{x} \in H$. Demuestra que la coordenada $i-$ésima de $\mathbf{x}$ respecto de una base ortonormal $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ es $< \mathbf{x}, \mathbf{x}_i >$.

4. (Método de ortogonalización de Gram-Schmith) Sea H un espacio prehilbertiano y sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \cdots\} \subset H$ una sucesión de vectores linealmente independientes. Demuestra que la sucesión de vectores
$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \\ &\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{<\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_i>}{\|\mathbf{y}_i\|^2} \mathbf{y}_i \end{aligned}$$
es un sistema ortogonal. *Indicación*: la demostración se hace por inducción en n.

5. Sea S un subespacio vectorial de un espacio prehilbertiano H. Demuestra que el complemento ortogonal de S, es decir el conjunto,
$$S^{\perp} = \{\mathbf{y} \in H : \ \mathbf{y} \text{ es ortogonal a } S\}$$
es un subespacio vectorial de H.

6. Hallar el polinomio de segundo grado que más se aproxima a la función $f(x) = x^{1/3}$ en el intervalo $[0, 1]$ con la norma asociada al producto escalar
$$< f, g >= \int_0^1 f(x) \, g(x) \ dx \quad \forall \ f, g \in L^2([0,1]; \mathbb{R}) .$$

7. Comprueba que los conjuntos
$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{y} \quad \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$
son sistemas ortogonales en $L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$.

8. Comprueba que el conjunto
$$\left\{e^{\mathbf{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$
es un sistema ortogonal en $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

9. **Lema de Riemann-Lebesgue.** Sea $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $(H, <,>)$. Demuestra que para cada $\mathbf{x} \in H$ se cumple que
$$\lim_{n \to \infty} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_n >= 0.$$
Indicación: usar la desigualdad de Bessel.

3.6 Objetivos

El objetivo básico de este capítulo es hacer una primera aproximación a la teoría de los espacios de Hilbert. Como se ha puesto de manifiesto a lo largo del capítulo, un estudio riguroso de este tema excede con mucho el nivel de este curso. Sin embargo, es preciso hacer esta introducción con el fin de poder justificar adecuadamente algunos temas que se desarrollarán más adelante (por ejemplo, las series de Fourier, el método de separación de variables y el método variacional) y algunos otros que se estudian en otras asignaturas (por ejemplo, la teoría de aproximación en Cálculo Numérico). En particular, en el método de separación de variables podremos considerar problemas que engloben condiciones de contorno más generales que las usuales condiciones Dirichlet y Neumann.

No se pretende, por tanto, que el alumno adquiera unos conocimientos profundos sobre los espacios de Hilbert, pero si que empiece a familiarizarse (aunque sea de un modo un tanto informal) con algunos conceptos importantes como son:

- base en un espacio de Hilbert,
- el espacio L^2, y
- la convergencia en media cuadrática.

3.7 Comentarios sobre la Bibliografía

Para el desarrollo de este capítulo hemos seguido esencialmente [8, Ch. 3]. Otra referencia que recoge también los resultados (y sus demostraciones) enunciados en este capítulo es [19, Ch. 1]. Es una referencia esta última muy accesible al nivel del alumno medio. Una referencia en castellano que también aborda este tema es [13, Cap. 11]

Finalmente, tal y como hemos anticipado en la sección Comentarios sobre el Capítulo, para obtener con rigor toda la información relativa a la integral de Lebesgue es preciso acudir a textos más especializados, por ejemplo [3].