

## Capítulo 7

# Funciones de Bessel y su Aplicación a la Resolución de EDPs

En este capítulo pretendemos estudiar EDPs que dependen de dos variables espaciales (además de la variable temporal) y veremos que el método de separación de variables es también aplicable para estudiar dichas ecuaciones. Ello nos permitirá poder estudiar problemas tales como el de la difusión de calor en recintos circulares, la vibración de una membrana circular sujeta en el borde, o el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cilindro. Desde un punto de vista matemático, la diferencia fundamental con el caso unidimensional estriba en el hecho de que el problema de Sturm-Liouville al que conduce la aplicación del método de separación de variables es lo que llamamos singular, lo cual básicamente significa que la ecuación diferencial ordinaria que nos aparecerá es de coeficientes no constantes. Las autofunciones asociadas a estos nuevos problemas de Sturm-Liouville serán bastante más complicadas que las funciones seno y coseno, y son lo que se llaman funciones de Bessel. Este capítulo nos servirá además para constatar un hecho bastante común en ingeniería: el hecho de que a medida que complicamos más los modelos matemáticos para estudiar problemas de ingeniería, también se complican en igual o mayor medida las matemáticas involucradas en dichos problemas.

Para ilustrar con un poco más de detalle lo que estamos diciendo en esta introducción, consideremos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cilindro y veamos qué sucede si intentamos resolver dicho problema por el método de separación de variables. Siendo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < b^2, 0 < z < a\}$$

el interior de un cilindro, se trata de encontrar una función  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  de modo que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

siendo  $f \in C(\partial\Omega)$  una función dada. Debido a la geometría del dominio en el que estudiamos este problema, parece razonable usar coordenadas cilíndricas. Si suponemos además, para simplificar, que  $f$  se anula sobre la tapa inferior del cilindro y sobre su borde, entonces el problema anterior se convierte en

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, & \text{en } \Omega \\ u(b, \theta, z) = 0, & 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < z < a \\ u(r, \theta, a) = g(r, \theta), & 0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(r, \theta, 0) = 0, & 0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

siendo  $g$  una función continua. Como siempre en el método de separación de variables proponemos una solución que se pueda escribir en la forma

$$u(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z).$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación de Laplace obtenemos que

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\frac{Z''}{Z}.$$

Por tanto, la expresión anterior ha de ser igual a una cierta constante, llamémosle  $-\mu^2$ . Con ello,

$$Z'' - \mu^2 Z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\mu^2.$$

La segunda de las ecuaciones se puede escribir en la forma

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} + r^2 \mu^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

De nuevo estos términos han de ser igual a otra constante  $\nu^2$ , de forma que

$$\Theta'' + \nu^2 \Theta = 0 \quad \text{y} \quad r^2 R'' + rR' + (r^2 \mu^2 - \nu^2) R = 0.$$

Las ecuaciones para las incógnitas  $Z$  y  $\Theta$  ya las conocemos y las sabemos resolver, pero la ecuación para la función  $R$  es nueva, se llama ecuación de Bessel, y no la sabemos resolver, al menos de momento. Finalmente, la condición de contorno  $u(b, \theta, z) = 0$  se traduce en que  $R(b) = 0$ . El problema

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (r^2 \mu^2 - \nu^2) R = 0, & 0 < r < b \\ R(b) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

es lo que se llama un sistema de Sturm-Liouville para la ecuación de Bessel y de su estudio nos ocuparemos en este capítulo.

## 7.1 La Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel

En esta sección nos ocuparemos del estudio de la ecuación diferencial ordinaria

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2) u(x) = 0, \quad (7.2)$$

con  $\nu \geq 0$ , que se denomina ecuación de Bessel de orden  $\nu$ . Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos con coeficientes no constantes. Nótese en primer lugar que la ecuación dada en (7.1) se reduce a la ecuación (7.2) con el cambio  $R(r) = u(x)$ ,  $x = r\mu$ .

Para resolver la ecuación (7.2) se propone una solución que se pueda escribir en la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+b} \quad (a_0 \neq 0) \quad (7.3)$$

donde el exponente  $b$  y los coeficientes  $a_k$  han de ser calculados. Sustituyendo (7.3) en (7.2) y tras hacer algunos cálculos se llega a que la función

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (7.4)$$

que se denomina función de Bessel de primera especie de orden  $\nu$ , es solución de la ecuación (7.2).

Si  $\nu \notin \mathbb{N}$ , entonces las funciones  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$  son linealmente independientes y forman una base del espacio de soluciones de (7.2), es decir, que la solución general de la ecuación de Bessel (7.2) es combinación lineal de  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$ .

Si  $\nu \in \mathbb{N}$ , entonces las funciones  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$  son linealmente dependientes. De hecho, se verifica que  $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$ . Para resolver este problema se introduce la llamada función de Weber o función de Bessel de segunda especie  $Y_\nu$ , la cual se define como

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\nu \notin \mathbb{N})$$

y finalmente

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Las funciones  $J_n$  e  $Y_n$  son linealmente independientes y por tanto, la solución general de (7.2), en el caso  $\nu = n \in \mathbb{N}$ , es combinación lineal de  $J_n$  e  $Y_n$ .

En la proposición que sigue recogemos algunas de las principales propiedades de las funciones de Bessel. En particular, estudiaremos el comportamiento de dichas funciones cuando  $x \rightarrow 0$  y  $x \rightarrow \infty$ . La demostración de estos resultados puede encontrarse en [8, p.p. 133-136].

### Proposición 7.1.1

(a) Si  $\nu \notin \mathbb{N}$  y  $x \rightarrow 0$ , entonces

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad y \quad J_{-\nu}(x) \approx \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)}.$$

(b) Si  $\nu \in \mathbb{N}$  y  $x \rightarrow 0$ , entonces

$$Y_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \quad (n \geq 1) \quad e \quad Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}.$$

(c) Para cada  $\nu \in \mathbb{R}$  existe una constante  $C_\nu > 0$  tal que si  $x \geq 1$ , entonces

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_\nu(x) \quad \text{donde } |E_\nu(x)| \leq \frac{C_\nu}{x^{3/2}}.$$

Como consecuencia, si  $x \rightarrow \infty$ , entonces

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad e \quad Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

(d) Para todo  $x$  y  $\nu$  se verifican las siguientes identidades:

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

$$x J'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -x J_{\nu+1}(x),$$

$$xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x),$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$$

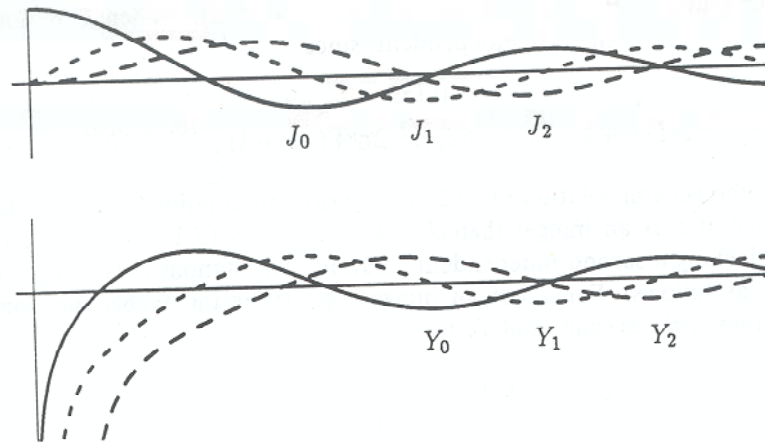
$$J_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta \, d\theta \quad \text{si } n \text{ es par}$$

y

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \theta) \sin n\theta \, d\theta \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Del apartado (c) de la proposición anterior se deduce que los ceros de la función de Bessel  $J_\nu(x)$  están localizados muy cerca de los ceros de la función  $\cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ . Esto es importante porque como veremos a continuación los autovalores de algunos problemas de Sturm-Liouville asociados a la ecuación de Bessel son precisamente los ceros de la función  $J_\nu(x)$ .

En el gráfico siguiente mostramos las gráficas de las funciones de Bessel de primera y segunda especie.



## 7.2 Sistemas de Sturm-Liouville Asociados a Ecuaciones de Bessel

Recordemos que la ecuación diferencial que nos interesa es

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (\mu^2 x^2 - \nu^2) u(x) = 0, \quad (7.5)$$

y que las soluciones de esta ecuación son  $u(x) = g(\mu x)$  donde  $g$  satisface la ecuación (7.2). Si dividimos en (7.5) por  $x$ , entonces

$$xu''(x) + u'(x) + \mu^2 xu(x) - \frac{\nu^2}{x} u(x) = (xu'(x))' - \frac{\nu^2}{x} u(x) + \mu^2 xu(x) = 0.$$

Esto permite escribir la ecuación de Bessel en la forma clásica que consideramos en el capítulo dedicado a los problemas de Sturm-Liouville, esto es,

$$-(xu'(x))' + \frac{\nu^2}{x} u(x) = \mu^2 xu(x).$$

Usando la notación de los problemas regulares de Sturm-Liouville tenemos que

$$p(x) = x \quad , \quad q(x) = \frac{\nu^2}{x} \quad \text{y} \quad s(x) = x,$$

Si consideramos esta ecuación sobre un intervalo  $[a, b]$ , con  $0 < a < b$  e imponemos condiciones de contorno separadas o periódicas, entonces llegamos a un problema regular de Sturm-Liouville, al servicio del cual disponemos de una teoría general que ya hemos estudiado en este curso. Sin embargo, el caso que nos va a interesar en este capítulo es cuando el intervalo es  $[0, b]$  y  $\nu \geq 0$ . En este caso,  $p$  no es una función positiva, contrariamente a lo que sucedía en el caso regular y  $q$  no es continua en cero. Por estos motivos, tampoco tiene sentido imponer una condición de contorno en el punto  $x = 0$ . Todo ello nos lleva a considerar lo que llamamos un problema singular de Sturm-Liouville, el cual se escribe en la forma

$$\begin{cases} -(xu'(x))' + \frac{\nu^2}{x}u(x) = \mu^2xu(x), & 0 < x < b \\ \alpha u(b) + \beta u'(b) = 0 \end{cases}$$

y en el que la condición de contorno en cero la sustituimos por la condición de regularidad de existir y ser finito el  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$ . Por lo visto en la sección anterior, esta última condición de regularidad implica que la solución general de la ecuación anterior es de la forma

$$u(x) = c_\mu J_\nu(\mu x),$$

ya que tanto  $J_{-\nu}(x)$  como  $Y_\nu(x)$  explotan cuando  $x \rightarrow 0$ . Al imponer la condición de contorno en el punto  $x = b$  llegamos a la ecuación

$$\alpha J_\nu(\mu b) + \beta \mu J'_\nu(\mu b) = 0.$$

Se puede demostrar que si  $\nu \geq 0$  y  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , entonces las soluciones positivas de esta ecuación pueden escribirse como una sucesión estrictamente creciente

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

de forma que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Además, si  $\alpha, \beta \geq 0$ , entonces  $\nu < \lambda_1$ .

Concluimos esta sección con el análogo al Teorema de Sturm-Liouville que vimos en el capítulo dedicado a los problemas regulares de Sturm-Liouville. Para una demostración véase [25, Ch. XVIII].

**Teorema 7.2.1** Sean  $\nu \geq 0$ ,  $b > 0$  y  $s(x) = x$ . Entonces:

(a) Si  $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$  es la sucesión de ceros positivos de la función de Bessel  $J_\nu$ , entonces la familia de funciones  $\phi_m(x) = J_\nu(\lambda_m x/b)$ ,  $m \geq 1$ , es una base ortogonal de  $L^2_s([0, b])$  y además

$$\|\phi_m\|_{L^2_s}^2 = \frac{b^2}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_m))^2.$$

(b) Si  $\{\mu_m\}_{m=1}^\infty$  es la sucesión de soluciones positivas de la ecuación  $\alpha J_\nu(x) + xJ'_\nu(x) = 0$ , con  $\alpha > -\nu$ , entonces la familia de funciones  $\psi_m(x) = J_\nu(\mu_m x/b)$ ,  $m \geq 1$ , es una base ortogonal de  $L^2_s([0, b])$  y además

$$\|\psi_m\|_{L^2_s}^2 = \frac{b^2 (\mu_m^2 - \nu^2 + \alpha^2)}{2\mu_m^2} (J_\nu(\mu_m))^2.$$

Si  $\alpha = -\nu$ , entonces a la familia anterior hay que añadir la función  $\psi_0(x) = x^\nu$  para tener una base ortogonal de  $L^2_s([0, b])$ . Se tiene también que  $\|\psi_0\|_{L^2_s}^2 = \frac{b^{2\nu+2}}{2\nu+2}$ .

Del teorema anterior se deduce que si  $u \in L^2_s([0, b])$ , entonces

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m \quad \text{y} \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \psi_m$$

donde

$$c_m = \frac{1}{\|\phi_m\|_{L^2_s}^2} \int_0^b xu(x) \phi_m(x) dx \quad \text{y} \quad d_m = \frac{1}{\|\psi_m\|_{L^2_s}^2} \int_0^b xu(x) \psi_m(x) dx.$$

Es importante tener presente que la *convergencia de las series anteriores es en el espacio*  $L^2_s([0, b])$ . En el caso de la segunda serie habría que añadir el sumando correspondiente a  $\psi_0$  si  $\alpha = -\nu$ . Estas series se denominan series de Fourier-Bessel, aunque la segunda también es conocida como serie de Dini. Si imponemos más condiciones de regularidad sobre la función  $u$ , entonces se puede obtener una convergencia más fuerte de dichas series. En particular, si  $u$  es continua y diferenciable a trozos, entonces las series de Fourier-Bessel convergen a  $u$  puntualmente en el intervalo  $]0, b[$ . La demostración de estos resultados puede encontrarse en el tratado de Watson [25, Ch, XVIII].

### 7.3 Aplicación de las Funciones de Bessel a la Resolución de EDPs

En esta sección veremos algunos ejemplos de problemas de ecuaciones en derivadas parciales que se pueden resolver utilizando la teoría que hemos desarrollado en las secciones anteriores. En concreto, consideraremos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cilindro, el problema de la difusión de calor en un recinto circular y el problema de las vibraciones de una membrana circular sujeta en el borde. Calcularemos, usando el método de separación de variables, la solución formal de dichos problemas.

#### 7.3.1 El Problema de Dirichlet para la Ecuación de Laplace en un Cilindro

Volvamos a considerar el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cilindro, que en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, & \text{en } \Omega \\ u(b, \theta, z) = 0, & 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < z < a \\ u(r, \theta, a) = g(r, \theta), & 0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(r, \theta, 0) = 0, & 0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

siendo  $g$  una función continua. Al aplicar el método de separación de variables obtuvimos que si

$$u(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$$

es la solución propuesta, entonces las funciones  $R$ ,  $\Theta$  y  $Z$  han de ser soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\Theta'' + \nu^2 \Theta = 0 \quad , \quad Z'' - \mu^2 Z = 0$$

y del problema singular de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (r^2 \mu^2 - \nu^2) R = 0 \\ R(b) = 0 \end{cases}$$

donde la condición  $R(b) = 0$  es consecuencia de la condición de contorno  $u(b, \theta, z) = 0$ .

Observemos en primer lugar que, debido a la naturaleza de las coordenadas cilíndricas, la función  $\Theta$  ha de ser  $2\pi$ -periódica. Esto fuerza a que  $\nu = n \in \mathbb{N}$ . Por tanto, la solución de la ecuación para la función  $\Theta$  es

$$\Theta(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

En el problema singular de Sturm-Liouville es natural exigir que  $R$  sea continua en cero. Por lo visto en la sección anterior, esto implica que la solución general de dicho problema es una constante multiplicada por la función

$$R(r) = J_n\left(\frac{\lambda}{b}r\right) \quad \text{donde } J_n(\lambda) = 0 \text{ y } \mu = \lambda/b.$$

Finalmente, si denotamos por  $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \dots$  los ceros positivos de la función  $J_n(x)$ , entonces la solución general de la ecuación para  $Z$  es

$$Z(z) = c_{k,n} \cosh\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}z\right) + d_{k,n} \sinh\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}z\right).$$

La condición de contorno  $u(r, \theta, 0) = 0$  se traduce en que  $Z(0) = 0$  y por consiguiente  $c_{k,n} = 0$ .

En resumen, la solución formal del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace es

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{k,n} \cos n\theta + B_{k,n} \sin n\theta) \sinh\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}z\right) J_n\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}r\right)$$

donde hemos escrito  $A_{k,n} = a_n d_{k,n}$  y  $B_{k,n} = b_n d_{k,n}$ .

Finalmente, si imponemos la condición de contorno  $u(r, \theta, a) = g(r, \theta)$  obtenemos la identidad formal

$$g(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{k,n} \cos n\theta + B_{k,n} \sin n\theta) \sinh\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}a\right) J_n\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}r\right). \quad (7.6)$$

Nuestro objetivo es calcular ahora los coeficientes  $A_{k,n}$  y  $B_{k,n}$ . Para ello recordemos que si  $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \dots$  son los ceros positivos de la función  $J_n(x)$ , entonces, por el Teorema 7.2.1, la familia  $\{J_n(\lambda_{k,n}r/b)\}_{k=1}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2_s([0, b])$ , donde  $s(r) = r$ . Recordemos también que la familia  $\{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin n\theta\}_{n=1}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2([-\pi, \pi])$ . Teniendo además en cuenta que al efectuar un cambio de coordenadas a polares en una integral doble el valor absoluto de la matriz jacobiana del cambio coincide con la función peso  $s(r) = r$ , es decir,  $dx dy = r dr d\theta$ , entonces se puede probar el siguiente resultado (ver [8, Th. 5.4, p. 151]).

**Teorema 7.3.1** Sean  $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \dots$  los ceros positivos de la función  $J_n(x)$ . Entonces la familia

$$\{J_n(\lambda_{k,n}r/b) \cos n\theta : n \geq 0 \text{ y } k \geq 1\} \cup \{J_n(\lambda_{k,n}r/b) \sin n\theta : n, k \geq 1\}$$

es una base ortogonal de  $L^2(\Omega)$ , donde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < b^2\}$ .

Como consecuencia de este teorema se tiene que si la función  $g \in L^2(\Omega)$ , entonces la igualdad (7.6) tiene sentido en el espacio  $L^2(\Omega)$  y además,

$$A_{k,0} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\lambda_{k,0}}{b}a\right) \pi b^2 J_1(\lambda_{k,0})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b g(r, \theta) J_n(\lambda_{k,0}r/b) r dr d\theta \quad (k \geq 1),$$

$$A_{k,n} = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}a\right) \pi b^2 J_{n+1}(\lambda_{k,n})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b g(r, \theta) \cos n\theta J_n(\lambda_{k,n}r/b) r \, dr d\theta \quad (k, n \geq 1)$$

y

$$B_{k,n} = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\lambda_{k,n}}{b}a\right) \pi b^2 J_{n+1}(\lambda_{k,n})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b g(r, \theta) \sin n\theta J_n(\lambda_{k,n}r/b) r \, dr d\theta \quad (k, n \geq 1).$$

Respecto del cálculo efectivo de las integrales anteriores, únicamente para funciones  $g$  muy particulares, usando las propiedades de recurrencia de las funciones de Bessel, las podremos calcular de manera exacta. En general, habrá que recurrir a métodos de integración numérica.

### 7.3.2 Difusión de Calor en un Recinto Circular

En esta sección estudiaremos el problema de la difusión de calor en un recinto circular suponiendo conocida la distribución inicial de temperaturas y asumiendo la ley de enfriamiento de Newton como condición de contorno. El modelo matemático para este problema se escribe como

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u & \text{en } ]0, +\infty[ \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega \\ ku + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } ]0, +\infty[ \times \partial\Omega \end{cases}$$

siendo  $k$  una constante,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < b^2\}$  y  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  la derivada direccional de  $u$  en la dirección marcada por el vector normal unitario exterior a  $\partial\Omega$ . Si consideramos coordenadas polares, el problema anterior se escribe como

$$\begin{cases} u_t = a^2 (u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}), & t > 0, 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(0, \cdot) = u_0, & 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < 2\pi \\ ku + u_r = 0, & t > 0, r = b, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Como siempre en el método de separación de variables proponemos una solución que se pueda escribir en la forma

$$u(t, r, \theta) = T(t) R(r) \Theta(\theta).$$

Al derivar y sustituir en la ecuación anterior obtenemos que se han de verificar las ecuaciones

$$T'(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0 \quad , \quad \Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0$$

y el problema singular de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\mu^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0 \\ kR(b) + R'(b) = 0 \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la función  $\Theta$  ha de ser  $2\pi$ -periódica. Esto fuerza a que  $\nu = n \in \mathbb{N}$  y  $\Theta(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ . Por tanto, la ecuación para  $R$  es la ecuación de Bessel de orden  $n$ . Como buscamos una solución definida en todo el conjunto  $\Omega$ , hemos de prohibir que  $R$  explote en cero, lo cual implica, por lo visto en la sección anterior, que la solución de la ecuación de Bessel es, salvo una constante, la función de Bessel  $R(r) = J_n(\lambda_{k,n}r/b)$ , donde  $\lambda_{k,n}$  son los ceros positivos de la ecuación  $kJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$ . Finalmente, la solución general de la ecuación para la función  $T$  es  $T(t) = c_{k,n} e^{-\lambda_{k,n}^2 a^2 t/b^2}$ . En resumen, la solución formal del problema que estamos abordando es

$$u(t, R, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) c_{k,n} e^{-\lambda_{k,n}^2 a^2 t/b^2} J_n(\lambda_{k,n}r/b).$$



Si imponemos la condición inicial  $u(0, \cdot) = u_0$  llegamos a la identidad

$$u_0(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)) J_n(\lambda_{k,n} r/b)$$

donde hemos escrito  $A_{k,n} = a_n c_{k,n}$  y  $B_{k,n} = b_n c_{k,n}$ . El cálculo de las constantes  $A_{k,n}$  y  $B_{k,n}$  se efectúa como en el ejemplo anterior.

### 7.3.3 Vibraciones de una Membrana Circular

Consideremos a continuación el problema de estudiar las vibraciones de una membrana circular, flexible y elástica, sujeta en el borde y de la que conocemos su posición y velocidad iniciales. En coordenadas cartesianas, el modelo matemático que describe este problema es

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \text{en } ]0, +\infty[ \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 ; u_t(0, \cdot) = v_0, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } ]0, +\infty[ \times \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < b^2\}$ . Supondremos a partir de ahora, para simplificar el modelo, que la velocidad inicial de la membrana es cero, esto es,  $v_0 = 0$ . En coordenadas polares este problema se escribe como

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}) & t > 0, 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(0, \cdot) = u_0 ; u_t(0, \cdot) = 0 & 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u = 0 & t > 0, r = b, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Si proponemos una solución que se pueda escribir en la forma  $u(t, r, \theta) = T(t)R(r)\Theta(\theta)$ , y aplicamos el método de separación de variables obtenemos las ecuaciones

$$T''(t) + c^2 \mu^2 T(t) = 0 \quad , \quad \Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0$$

y el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\mu^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0 \\ R(b) = 0 \end{cases}$$

Como  $\Theta$  ha de ser  $2\pi$ -periódica y  $R$  continua en cero, obtenemos que

$$\Theta(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

$$R(r) = J_n(\lambda_{k,n} r/b) \quad \text{donde} \quad J_n(\lambda_{k,n}) = 0.$$

y

$$T(t) = c_{k,n} \cos \frac{\lambda_{k,n} ct}{b} + d_{k,n} \sin \frac{\lambda_{k,n} ct}{b}.$$

La solución propuesta es

$$u(t, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left( c_{k,n} \cos \frac{\lambda_{k,n} ct}{b} + d_{k,n} \sin \frac{\lambda_{k,n} ct}{b} \right) J_n(\lambda_{k,n} r/b).$$

La condición inicial  $u_t(0, \cdot) = 0$  conduce a que  $d_{k,n} = 0$ , esto es,

$$u(t, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{k,n} \cos n\theta + B_{k,n} \sin n\theta) \cos \frac{\lambda_{k,n} ct}{b} J_n(\lambda_{k,n} r/b)$$

donde  $A_{k,n} = a_n c_{k,n}$  y  $B_{k,n} = b_n c_{k,n}$ . Por su parte, la condición  $u(0, \cdot) = u_0$  implica que

$$u_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{k,n} \cos n\theta + B_{k,n} \sin n\theta) J_n(\lambda_{k,n} r/b)$$

donde los coeficientes  $A_{k,n}$  y  $B_{k,n}$  se calculan al igual que en los casos anteriores.

## 7.4 Ejercicios

1. Resolver la ecuación  $x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2) u(x) = 0$ , suponiendo que dicha solución se puede escribir en la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+b} \quad (a_0 \neq 0).$$

2. Un cilindro de radio  $b$  está inicialmente a temperatura constante  $A$ . Encontrar cómo evoluciona la temperatura en el cilindro si suponemos que sus tapas están aisladas y su superficie circular obedece la ley de enfriamiento de Newton  $ku + u_r = 0$ .
3. Estudiar el problema de la difusión de calor en el recinto

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \alpha\},$$

siendo  $0 < \alpha < 2\pi$ , y suponiendo que la temperatura inicial es conocida y que el borde está aislado, esto es, obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_t = a^2 (u_{rr} + r^{-1} u_r + r^{-2} u_{\theta\theta}), & t > 0, 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < \alpha \\ u(0, \cdot) = u_0, & 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < \alpha \\ u_{\theta}(t, r, 0) = u_{\theta}(t, r, \alpha) = u_r(t, b, \theta) = 0, & t > 0, 0 \leq r < b, 0 \leq \theta < \alpha \end{cases}$$

4. Supongamos que en el ejercicio anterior  $\alpha = \pi/2$  y que la temperatura inicial es  $u_0(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ . Usar las propiedades de las funciones de Bessel para calcular explícitamente los coeficientes del desarrollo que se obtiene al imponer la condición inicial  $u(0, \cdot) = u_0$ .
5. Probar que los autovalores del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(xu'(x))' + \frac{\nu^2}{x} u(x) = \mu^2 x u(x), & 0 < a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

son los números  $\mu^2$  que satisfacen que

$$J_{\nu}(\mu a) Y_{\nu}(\mu b) = J_{\nu}(\mu b) Y_{\nu}(\mu a).$$

¿Quiénes son las autofunciones de este problema?

6. Aplicar los resultados del ejercicio anterior para estudiar el problema de la difusión de calor en el recinto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}.$$

7. Consideremos la ecuación

$$x^p u''(x) + px^{p-1} u'(x) + (ax^q + bx^{p-2}) u(x) = 0 \quad (7.7)$$

donde  $(1-p)^2 - 4b \geq 0$ ,  $q-p+2 > 0$  y  $a > 0$ . Denotemos por

$$\alpha = \frac{1-p}{2}, \quad \beta = \frac{q-p+2}{2}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{a}}{q-p+2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{q-p+2}.$$

Probar que la solución general de (7.7) es

$$u(x) = x^\alpha \left[ c_1 J_\nu(\lambda x^\beta) + c_2 Y_\nu(\lambda x^\beta) \right]. \quad (7.8)$$

Indicación: efectuar el cambio  $u(x) = x^\alpha f(x)$  y  $x = (y/\lambda)^{1/\beta}$  en (7.7) para reducir dicha ecuación a una ecuación de Bessel.

8. Estudiaremos ahora un modelo de ondas en el que se asume simetría esférica en las ondas. Esto sucede por ejemplo en las ondas que emite un saxofón cuando está sonando. Supondremos, por tanto, que la onda se puede escribir en la forma

$$u(t, x, y, z) = v(t, r) \quad , \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Se pide:

(a) Probar que en coordenadas esféricas se tiene que

$$\Delta u = v_{rr} + 2r^{-1}v_r. \quad (7.9)$$

(b) Usar el método de separación de variables, esto es, escribir  $v(t, r) = T(t)R(r)$ , para probar que las funciones

$$v(t, r) = \frac{a_1 \sin \lambda r + a_2 \cos \lambda r}{r} (b_1 \cos \lambda ct + b_2 \sin \lambda ct)$$

son soluciones de la ecuación  $v_{tt} = v_{rr} + 2r^{-1}v_r$ . Indicación: usar la fórmula (7.8) y la identidad

$$c_1 r^{-1/2} J_{1/2}(\lambda r) + c_2 r^{-1/2} Y_{1/2}(\lambda r) = \frac{a_1 \sin \lambda r + a_2 \cos \lambda r}{r}.$$

(c) Usar los resultados anteriores para probar que la solución general del problema

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{rr} + 2r^{-1}v_r & t, r > 0 \\ v(t, 0) = ct e & t > 0 \\ v(t, l) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

tiene la forma

$$v(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{l}.$$

## 7.5 Objetivos

El objetivo básico de este tema es que el alumno adquiera habilidad de cálculo en la resolución de los problemas de EDPs considerados así como que conozca las principales propiedades de las funciones de Bessel.

## 7.6 Comentarios sobre la Bibliografía

En la elaboración de este capítulo hemos seguido el libro de Folland [8, Ch. 5]. Es en esta referencia y sobre todo en el extenso tratado de Watson [25] donde pueden encontrarse las demostraciones de los resultados enunciados en este capítulo.

En el libro de Pedregal [16] también aparece algún problema resuelto. En concreto, se estudia el problema de la resonancia en una membrana circular.