Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^{o}0 (0000), 1–14

Una herramienta de simulación numérica para el análisis de la capacidad de maniobrabilidad de un submarino *

J. García [1], D. M. Ovalle [2], F. Periago [2] y J. Tiago [3]

[1] Departamento de Ingeniería del Astillero de Cartagena, DICA, Navantia S.A.
[2] Departamento de Matemática Aplicada y Estadística Universidad Politécnica de Cartagena
[3] IMT - Institut de Mathématiques de Toulouse

jgpelaez@navantia.es - diana.ovalle@upct.es - f.periago@upct.es - tiago@math.univ-tlse.fr

Resumen

El principal objetivo de este artículo es compartir con los lectores del boletín de SEMA una primera experiencia de colaboración industrial, aún en curso, con la sección de Anteproyectos de la empresa Navantia S.A., en su astillero de Cartagena. La necesidad de la empresa se centra en el desarrollo de un software informático de simulación numérica capaz de dar una primera respuesta sobre la capacidad de maniobrabilidad de los submarinos que se construyen en sus astilleros. Se pretende que la información suministrada por dicho software sea utilizada durante la fase previa de diseño del submarino. En términos matemáticos, el problema ha sido formulado como un problema de control óptimo con restricciones en el estado y el control. La ley de estado subyacente está formada por un sistema de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias con fuertes no linealidades tanto en las variables de estado como en las de control. El análisis matemático del modelo se ha llevado a cabo usando resultados de existencia de solución para problemas de control óptimo basados en técnicas de relajación que han sido obtenidos recientemente [15]. Para la resolución numérica del problema, que constituye el motor del software desarrollado, se ha utilizado un algoritmo de descenso tipo gradiente. Además de los aspectos matemáticos, pretendemos describir las consecuencias académicas y laborales que de esta colaboración se

*Este trabajo ha sido financiado por los proyectos con referencia 2137/07MAE entre NAVANTIA S.A. y la Universidad Politécnica de Cartagena, 08720/PI/08 de la Fundación Séneca (Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia. II PCTRM 2007-10), y MTM2007-62945 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

están derivando. Aunque algunos grupos de Matemática Aplicada en nuestro país tienen una amplia y muy brillante tradición en colaboraciones con empresas, pretendemos describir aquí la forma en que surgió una tal colaboración en el seno de un equipo pequeño y sin experiencia previa en este ámbito. Ojalá esta experiencia sirva de estímulo a otros grupos para intentar desarrollar esta parcela de la Matemática Aplicada que desafortunadamente sigue siendo minoritaria en nuestra área de conocimiento.

Palabras clave : *Submarino, maniobrabilidad, control óptimo, relajación, simulación numérica.*
Clasificación por materias AMS : *49J15, 49M20, 93C15.*

1. Introducción

1.1. Un poco de historia para empezar[1]

La actualmente llamada Navantia S.A. (quizás más conocida por uno de sus anteriores nombres, Bazán) es la empresa pública española de construcción naval. Su origen debemos situarlo en 1730 con la creación de los históricos arsenales militares de Ferrol, Cartagena y San Fernando, que estaban destinados a construir y reparar los buques de la Armada Española. Al término de la Guerra Civil, el Estado se hizo cargo de los arsenales militares y en 1947 se constituyó la Empresa Nacional Bazán. En el año 2000 se creó Izar, fruto de la unión de los astilleros públicos militares (Bazán) y civiles (AESA), y en 2005 nace Navantia, fruto del proceso de segregación de Izar en dos compañías.

Figura 1: Imagen del submarino Isaac Peral C-1 en su actual ubicación en el muelle de Cartagena.

En los mismos diques y gradas que hoy dan vida a los modernos submarinos Scorpene operó, en otro tiempo, el primer submarino de propulsión eléctrica del

[1]La mayor parte de la información contenida en esta sección ha sido obtenida de los sitios web: http://www.navantia.es/ y http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Peral

Figura 2: Imagen de Isaac Peral a la edad de 21 años.

Figura 3: Imagen del submarino KD Tun Razak.

mundo, el Isaac Peral[2] C-1.

Actualmente, Navantia da empleo directo a más de 5.000 trabajadores. Por citar sólo algunos datos, señalemos la construcción de cuatro submarinos de la clase Scorpene, dos para la Marina Chilena y dos para la Marina Malasia, siendo el último, el KD Tun Razak construido en colaboración con la empresa francesa DCNS, encargado en el 2003, puesto a flote el 8 de octubre del 2008 y entregado el 5 de Noviembre del 2009. Debido a su elevado automatismo y capacidad táctica, dicho submarino es considerado como el representante más avanzado de los submarinos convencionales actuales por lo que ha sido un diseño exportado con éxito a India y Brasil.

Otro ejemplo es el submarino S-80 que actualmente Navantia-Cartagena construye para la Armada Española. Con diseño autóctono, pasará a convertirse en el submarino de propulsión híbrida (con capacidad anaeróbica para permanecer varias semanas en inmersión) más avanzado del mundo.

[2]Isaac Peral y Caballero (Cartagena, 1 de junio de 1851 - Berlín, 22 de mayo de 1895) fue un científico, marino y militar español, teniente de navío de la Real Armada e inventor del primer submarino torpedero, el Peral C-1 (1885) construido en el astillero de Cádiz. Gracias al apoyo de la Reina Regente D^a María Cristina, el submarino fue finalmente botado el 8 de septiembre de 1888.

1.2. Motivacion: ¿ qué necesita la empresa?

Durante la etapa preliminar de diseño de un submarino se ha de tomar un número importante de decisiones con el fin de optimizar, en empacho, peso y consumo de energía por la actuación de los timones y la hélice, el comportamiento dinámico del prototipo. Centrándonos en submarinos militares tripulados, es importante, entre otros, que estos vehículos sean capaces de hacer rápidos y silenciosos cambios de rumbo y de profundidad (con lo que disminuye la posibilidad de ser detectados). Pese a que se trata de vehículos oceánicos, sin embargo, algunas de las misiones se desarrollan en aguas litorales. Este tipo de submarinos no son capaces de hacer un cambio de rumbo en un plano horizontal sin abandonarlo pues, durante dicha maniobra, el submarino está forzado por los fenómenos hidrodinámicos cruzados a oscilar en su profundidad objetivo. Es, por tanto, importante cuantificar y sobre todo optimizar (en este caso, minimizar) la variación en profundidad cuando la maniobra se realiza en aguas litorales.

Para realizar dichas maniobras, los submarinos que se construyen en Navantia incorporan una hélice y tres pares de timones. Estos elementos son los que determinan la capacidad de maniobrabilidad del vehículo. Y es, precisamente durante la fase de diseño donde se toman las decisiones oportunas sobre el tipo de timones y hélice que se instalarán en el futuro submarino. Los ingenieros de diseño de Navantia sobre los que recae la responsibilidad de tomar dichas decisiones, conscientes de la necesidad de disponer de una herramienta sólida de simulación numérica capaz de dar una primera respuesta a las cuestiones de maniobrabilidad mencionadas anteriormente, iniciaron hace unos años el desarrollo de una tal herramienta de simulación basada en el típico LQR (Linear Quadratic Regulator) para la resolución de problemas de control óptimo. La continuación de este trabajo inicial en la dirección de estudiar un modelo no lineal más complejo constituye la esencia principal de esta colaboración Universidad- Empresa que describimos a continuación.

2. Modelización Matemática

2.1. Modelado del vehículo: ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones tridimensionales de movimiento de un submarino se escriben usando dos sistemas de referencia: el llamado sistema *mundo*, con ejes ortogonales apuntando hacia el norte, este y profundidad, respectivamente, y cuyo origen se sitúa en un punto fijo del océano; y el sistema *cuerpo*, que se mueve solidario con el vehículo. Su origen es el punto medio del eje longitudinal de simetría del submarino y sus ejes apuntan en dirección de avance, en la dirección lateral y de nuevo en profundidad. De esta forma, el *estado* del submarino queda definido por el vector de 12 componentes

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t), \phi(t), \theta(t), \psi(t), u(t), v(t), w(t), p(t), q(t), r(t)), \tag{1}$$

donde $\eta = (x, y, z; \phi, \theta, \psi)$ indica la posición y orientación del vehículo en el sistema mundo, y $\nu = (u, v, w; p, q, r)$ es el vector de velocidades lineales y angulares medidas en el sistema cuerpo. Usando la notación de la SNAME (Society of Naval Architects and Marine Engineers) [3, 5, 7], las ecuaciones (cinemáticas y dinámicas) de movimiento se escriben en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta'(t) = J(\eta(t))\,\nu(t) \\ M\nu'(t) + C(\nu(t))\,\nu(t) + D(\nu(t))\,\nu(t) + g(\eta(t)) = \tau(\mathbf{u}(t)). \end{array} \right. \tag{2}$$

J es la matriz de transformación para las ecuaciones cinemáticas de movimiento, $M = M_{RB} + M_A$ incluye la matriz de inercia del sólido rígido M_{RB} más la matriz de masa añadida M_A, $C(\nu) = C_{RB}(\nu) + C_A(\nu)$, con C_{RB} la matriz centrípeta y de Coriolis del sólido rígido y C_A es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis debida a los efectos de masa añadida, $D(\nu)$ representa el damping hidrodinámico debido al desprendimiento de vórtices y fricción superficial, $g(\eta)$ es el vector de fuerzas y momentos de restauración (gravitacionales y de flotabilidad), y $\tau(\mathbf{u})$ es el vector de fuerzas y momentos de control. En nuestro caso,

$$\mathbf{u}(t) = (\delta_b(t), \delta_s(t), \delta_r(t), n(t)), \tag{3}$$

donde δ_b y δ_s representan, respectivamente, los ángulos de los timones de vela y popa, δ_r es el ángulo del timón para el cambio de rumbo y n modela las revoluciones de la hélice. En el Apéndice A incluimos los detalles sobre las ecuaciones dinámicas del sistema (2). Las ecuaciones cinemáticas son clásicas y pueden encontrarse por ejemplo en [5, 15].

La validez del modelo anterior está limitada al caso en que la variable de control $\mathbf{u}(t)$ toma valores en el conjunto compacto

$$K = \left[-\frac{5\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}\right] \times \left[-\frac{5\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}\right] \times \left[-\frac{7\pi}{36}, \frac{7\pi}{36}\right] \times [0,\ 10]. \tag{4}$$

Respecto a la variable de estado $\mathbf{x}(t)$, es también realista considerar las siguientes restricciones sobre los ángulos de Euler

$$-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Debido al carácter acotado del océano, (x, y, z) deben tomar valores en un conjunto acotado. Finalmente, la Física del problema impone unas restricciones sobre las velocidades lineales (u, v, w) y angulares (p, q, r). En resumen, podemos asumir que el vector de estado debe verificar una restricción del tipo

$$\mathbf{x}(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{12}, \qquad t \geq 0,$$

donde Ω es un conjunto acotado.

2.2. Formulación del problema

Una vez que las variables de control que describimos en el punto anterior aparecen en la dinámica de forma lineal y cuadrática (véase Anexo), podemos describir la acción de la variable de control a través de la aplicación

$$\begin{array}{lccl} \Phi: & K & \rightarrow & \mathbb{R}^8 \\ & \mathbf{u} & \mapsto & \Phi(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{u}, \mathbf{u}^2\right) \equiv \left(\delta_b, \delta_s, \delta_r, n, \delta_b^2, \delta_s^2, \delta_r^2, n^2\right). \end{array} \tag{5}$$

De este modo, es posible y deseable (por motivos teóricos que describiremos más adelante) escribir la ley de estado (2) en la forma

$$\mathbf{x}'(t) = Q(\mathbf{x}(t)) \Phi(\mathbf{u}(t)) + Q_0(\mathbf{x}(t)) \tag{6}$$

con

$$Q: \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathcal{M}^{12\times 8} \quad \text{y} \quad Q_0: \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{12}.$$

En lo que sigue cambiaremos la notación para las variables de estado y control con el fin de adaptarlas a la notación que es más usual en Teoría de Control. De esta forma,

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_{12}(t)) \in \mathbb{R}^{12} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = (u_1(t), \cdots, u_4(t)) \in \mathbb{R}^4.$$

Las capacidades de maniobrabilidad descritas anteriormente pueden ser modelizadas a través del siguiente problema de control óptimo: dado un tiempo final t_f y un estado final $\mathbf{x}^{t_f} = \left(x_1^{t_f}, \cdots, x_{12}^{t_f}\right) \in \Omega$, encontrar un control $\mathbf{u}(t) \in K$ tal que en el tiempo t_f la variable de estado $\mathbf{x}(t_f)$ alcance (o al menos esté cerca de) el estado final deseado $\mathbf{x}^{t_f}$. Además, pretendemos que la maniobra se desarrolle con un mínimo gasto de control, es decir, minimizando el uso de timones y hélice, lo que en primera aproximación minimizará proporcionalmente la potencia demandada y, por tanto, la energía acústica radiada que es función de ésta, interés último de los diseñadores de submarinos militares. En términos matemáticos, tenemos el siguiente problema de control óptimo con restricciones en el estado y el control que denotamos por (P_{t_f}):

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Minimizar en } \mathbf{u}: & I(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j \left(x_j(t_f) - x_j^{t_f}\right)^2 + \sum_{j=1}^{4} \int_0^{t_f} \beta_j u_j^2(t)\, dt \\ \text{sujeto a} & \\ & \mathbf{x}'(t) = Q(\mathbf{x}(t)) \Phi(\mathbf{u}(t)) + Q_0(\mathbf{x}(t)), \quad 0 < t < t_f \\ & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in \Omega \\ & \mathbf{x}(t) \in \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) \in K,\ 0 \le t \le t_f. \end{array}\right.$$

Como de costumbre, $\alpha_j \ge 0$ y $\beta_j \ge 0$ son parámetros de peso.

3. Análisis Matemático del Modelo

3.1. Un resultado de existencia local de solución

Como es bien sabido por todo aquel que esté mínimamente familiarizado con los problemas de optimización, en éstos el tamaño sí que importa. En el caso que nos ocupa, la ley de estado está formada por un sistema de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias altamente acoplado y con fuertes no linealidades. Por tanto, ser capaces de chequear las condiciones suficientes para la existencia de solución en el problema (P_{t_f}) que propone la teoría clásica (por ejemplo, la convexidad del campo de orientadores [2]) resulta tarea poco menos que imposible. Afortunadamente, en nuestro caso hemos sido capaces de superar esta dificultad haciendo uso de un resultado general de existencia [14] que comentamos a continuación. La aplicación directa de dicho resultado nos ha permitido probar el siguiente:

Teorema 1 *Para $t_f > 0$, suficientemente pequeño, (P_{t_f}) tiene, al menos, una solución.*

Resumimos a continuación (algunas de) las ideas básicas subyacentes a dicho resultado. Para ello es preciso introducir un poco de notación. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Psi = (\psi_j): & \mathbb{R}^8 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \mathbf{m} & \mapsto & \Psi(\mathbf{m}) = \left(m_1^2 - m_5,\ m_2^2 - m_6,\ m_3^2 - m_7,\ m_4^2 - m_8\right) \end{array}$$

donde $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_8)$. Es evidente que el conjunto

$$\Phi(K) = \{\Phi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in K\},$$

donde Φ está definido en (5), está incluido en el conjunto de nivel cero de Ψ, es decir,

$$\Phi(K) \subset \left\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^8 : \Psi(\mathbf{m}) = 0\right\}.$$

Siguiendo [14], sean

$$\mathcal{N}(K, \Phi) = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^8 : \forall \mathbf{u} \in K,\ \nabla\Psi(\Phi(\mathbf{u}))\,\mathbf{v} = 0 \quad \text{o } \exists j \text{ t. q. } \nabla\psi_j(\Phi(\mathbf{u}))\,\mathbf{v} > 0\right\} \tag{7}$$

y

$$\mathcal{N}(\mathbf{c}, Q) = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^8 : Q\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} \le 0\right\}, \tag{8}$$

donde en nuestro caso particular

$$\mathbf{c} = (0, 0, 0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \tag{9}$$

con $\beta_j > 0$ los parámetros de peso considerados en el problema (P_{t_f}), y la matriz $Q \in \mathcal{M}^{12\times 8}$ tiene la forma

$$Q = \begin{pmatrix} \multicolumn{8}{c}{0_{6\times 8}} \\ Q_{71}x_7^2 & Q_{72}x_7^2 & 0 & Q_{74}x_7 & Q_{75}x_7^2 & Q_{76}x_7^2 & Q_{77}x_7^2 & Q_{78} \\ 0 & 0 & Q_{83}x_7^2 & Q_{84}x_7 & 0 & 0 & 0 & Q_{88} \\ Q_{91}x_7^2 & Q_{92}x_7^2 & 0 & Q_{94}x_7 & Q_{95}x_7^2 & Q_{96}x_7^2 & Q_{97}x_7^2 & Q_{98} \\ 0 & 0 & Q_{103}x_7^2 & Q_{104}x_7 & 0 & 0 & 0 & Q_{108} \\ Q_{111}x_7^2 & Q_{112}x_7^2 & 0 & Q_{114}x_7 & Q_{115}x_7^2 & Q_{116}x_7^2 & Q_{117}x_7^2 & Q_{118} \\ 0 & 0 & Q_{123}x_7^2 & Q_{124}x_7 & 0 & 0 & 0 & Q_{128} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Nótese que $Q = Q(\mathbf{x})$ depende de la velocidad de avance x_7 del vehículo. Los valores concretos del resto de componentes de Q se obtienen experimentalmente usando un modelo a escala.

Como es fácil de imaginar, la existencia de solución para nuestro problema de control óptimo depende de la forma en que estado y control se relacionan tanto en la ley de estado como en la función coste. De manera precisa, si se satisface la inclusión

$$\mathcal{N}(\mathbf{c}, Q(\mathbf{x})) \subset \mathcal{N}(K, \Phi) \tag{11}$$

para cada estado admisible $\mathbf{x} \in \Omega$, entonces (P_{t_f}) tiene, al menos, una solución. Esta condición suficiente fue introducida por primera vez en [14, Theorem 1.1]. Véase también [15, Theorem 2.1] para una versión adaptada a nuestro caso concreto. La demostración de este resultado teórico se basa en varias relajaciones del problema original que se obtienen haciendo uso de técnicas usuales en medidas de Young [10, 11] y resultados clásicos de existencia de solución para problemas de control óptimo [2, 16]. Finalmente, la condición (11) nos permite probar que toda solución del problema relajado en términos de medidas de Young es de hecho una medida tipo masa de Dirac localizada en un control $\mathbf{u}(t)$ admisible para el problema original. Véase [14, 15] para los detalles. Lo verdaderamente importante aquí es que la condición a chequear (11) es de naturaleza algebraica y por tanto, pese a que nuestro problema concreto es de gran tamaño y con fuertes acoplamientos y no linealidades, dicha condición es analíticamente chequeable. Lo sorprendente es que efectivamente la inclusión (11) se da en nuestro modelo [13, 15]. Finalmente, mencionar que la restricción en t_f es debida al carácter Lipschitz local de la ley de estado y a las restricciones en las variables de estado.

3.2. Resolución numérica de $(\mathbf{P}_{t_f})$

El algoritmo numérico propuesto para la resolución de (P_{t_f}) es un método de descenso tipo gradiente con proyección y paso óptimo. El cálculo del gradiente se ha efectuado siguiendo el método adjunto. Dado que se trata de un algoritmo bastante clásico y conocido no lo describiremos aquí, pero sí que nos gustaría señalar algunos matices matemáticos importantes que han aparecido en nuestro modelo concreto. La dificultad esencial surge al resolver numéricamente la ecuación para el estado adjunto $\mathbf{p}(t)$, la cual se escribe como

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{p}'(t) = -\left[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{k+1}(t), \mathbf{u}^k(t)\right)\right]^T \mathbf{p}(t), \quad 0 \le t \le t_f \\ \mathbf{p}(t_f) = G'\left(\mathbf{x}^{k+1}(t_f) - \mathbf{x}^{t_f}\right) \end{array}\right. \tag{12}$$

donde

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{k+1}(t), \mathbf{u}^k(t)\right) = Q\left(\mathbf{x}^{k+1}(t)\right)\Phi\left(\mathbf{u}^k(t)\right) + Q_0\left(\mathbf{x}^{k+1}(t)\right)$$

es la ley de estado,

$$G\left(\mathbf{x}^{k+1}(t_f) - \mathbf{x}^{t_f}\right) = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j \left(x_j^{k+1}(t_f) - x_j^{t_f}\right)^2,$$

$\nabla_{\mathbf{x}}$ es el gradiente respecto a $\mathbf{x}$ y A^T denota la transpuesta de la matriz A.

El problema radica en el hecho de que la ley de estado incluye términos no derivables, por ejemplo del tipo

$$|x_9|\sqrt{x_8^2+x_9^2}.$$

De esta forma, $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ tiene discontinuidades de salto finito. En el caso anterior, el cálculo del gradiente genera el término

$$\begin{cases} \frac{x_9^2}{\sqrt{x_8^2+x_9^2}}+\sqrt{x_8^2+x_9^2} & \text{si} \quad x_9>0 \\ -\frac{x_9^2}{\sqrt{x_8^2+x_9^2}}-\sqrt{x_8^2+x_9^2} & \text{si} \quad x_9<0. \end{cases}$$

Por tanto, si x_9 cambia de signo en algún tiempo t^*, entonces (12) tiene una discontinuidad sobre la superficie

$$S=\left\{(t,\mathbf{p}) : g\left(t,\mathbf{p}\right)=t-t^*=0\right\}.$$

Como es bien conocido [4, 8]), cuando la solución de una EDO con término de la derecha discontinuo encuentra un punto de discontinuidad se puede perder la unicidad de solución, la solución puede ser atrapada en S, o bien, la solución puede atravesar la discontinuidad. Para analizar estas tres posibilidades, en [9] se introduce la llamada *condición de transversalidad*. Véase también [8, Section II.6] y [1]. Se deben calcular en el punto $(t^*,\mathbf{p}\left(t^*\right))$ las cantidades

$$\begin{cases} a_I=\frac{\partial g}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{p}}g\cdot\mathbf{p}'_- \\ a_{II}=-\frac{\partial g}{\partial t}-\nabla_{\mathbf{p}}g\cdot\mathbf{p}'_+ \end{cases}$$

donde $\mathbf{p}'_-$ corresponde al término de la derecha en (12) cuando $g\left(t,\mathbf{p}\right)<0$ y $\mathbf{p}'_+$ para el caso $g\left(t,\mathbf{p}\right)>0$. En nuestro caso, $a_I=1$ y $a_{II}=-1$. Esto implica que la solución atraviesa S desde $g<0$ hasta $g>0$ y la solución está por tanto bien definida.

4. El Software SIMUSUB

La implementación en MatLab del algoritmo descrito en la sección anterior constituye el núcleo del software SIMUSUB que es lo que realmente interesa a la empresa. Entre otros, SIMUSUB permite analizar la robustez del controlador, comparar el comportamiento dinámico del vehículo frente a cambios en algunos de los elementos de diseño, estimar el ruido hidrodinámico generado en determinadas maniobras, y generar una serie de trayectorias *ideales* que podrían ser utilizadas por un futuro autopiloto a incorporar en un submarino tripulado o autónomo.

Dado que este artículo está dirigido a un posible lector con una formación en Matemáticas no incluimos a continuación ningún experimento numérico cuyo interés sería más bien propio del experto en maniobrabilidad de artefactos navales. El lector interesado puede sin embargo acudir a [12, 13]. Nos gustaría eso sí señalar que, como es habitual en los algoritmos de descenso, los resultados dependen de la inicialización (aunque con costes muy similares en los experimentos que hemos realizado) y que la convergencia del algoritmo es exponencial.

5. Algunos Comentarios Finales

Para finalizar, nos gustaría relatar brevemente la forma y el contenido en que esta colaboración universidad-empresa se está llevando a cabo.

Todo empezó en el verano de 2006 cuando, en colaboración con el grupo OMEVA (http://matematicas.uclm.es/omeva/) de la Universidad de Castilla-La Mancha e imitando a nuestros colegas gallegos, organizamos en Cartagena una primera jornada de interacción Matemática Aplicada - Industria donde invitamos a 4 empresas a exponer algunos de los problemas (relacionados con la Optimización en general) en que estaban interesados. En representación de Navantia asistió Javier García Peláez, jefe de la sección de Anteproyectos.

Tras un intento fallido de pedir un proyecto PROFIT en el que debían participar las Universidades de Castilla- La Mancha y Politécnica de Cartagena (UPCT) junto con Navantia y otra de las empresas asistentes, se optó por otra vía mucho más modesta. Simplemente, al amparo de una beca de proyecto fin de carrera de 5 meses de duración financiada por la UPCT, se inició el estudio de un modelo mucho más simplificado que el presentado aquí. Este estudió [6] se ejecutó sin ningún coste económico para la empresa pero dispusimos, eso sí, en todo momento con el asesoramiento, la motivación y la disponibilidad de Javier. El proyecto, presentado por Isabel Ainhoa Nieto (estudiante de Teleco de la UPCT) fue defendido en Julio de 2007. Los modestos, como no podía ser de otra manera en tan poco tiempo, resultados obtenidos suscitaron sin embargo el interés de Navantia que se concretó en dos actuaciones:

1^o Ainhoa, como parte de la Ingeniería Technopro ha continuado su colaboración desde el 2008 hasta la actualidad con la sección de Anteproyectos en la modelización del diseño acústico de submarinos, y

2^o Navantia propone firmar un contrato con la UPCT de un año de duración para estudiar el modelo no lineal descrito en este artículo. La cuantía del contrato permitió sacar una beca de investigación (similar en cuantía a una beca predoctoral) que fue adjudicada a Diana Ovalle.

Al acabar este primer contrato, la empresa decide renovarlo por un año más, y en estos momentos se está concretando una nueva prórroga por tres años que permita ampliar el estudio que se está llevando a cabo actualmente. En concreto, se pretende modelar, simular y usar como mecanismo de control añadido los procesos de soplado y ventilación de los tanques de lastre de los submarinos (modelo de control no disponible en la literatura actual debido a la complejidad intrínseca a la modelización de los fenómenos termodinámicos involucrados).

Entre tanto, y gracias de nuevo a la estrecha colaboración con nuestros amigos de Ciudad Real, se pudo abordar el estudio de la existencia de solución para el problema descrito anteriormente en colaboración con Jorge Tiago, en aquel momento, estudiante de doctorado de Pablo Pedregal.

A nivel académico, esta colaboración ha generado un proyecto fin de carrera, un artículo de investigación ya publicado y dos en proceso de revisión. Confiamos que en breve se una a esta lista el doctorado de Diana Ovalle y el inicio de los estudios de doctorado de un nuevo estudiante.

En nuestra opinión, ha habido varios factores que han permitido hacer realidad este proyecto: una cierta dosis inicial de curiosidad y altruismo científico (*vamos a invertir tiempo y esfuerzo en intentar entender el problema!*) unido a una gran motivación por todas las partes implicadas para integrar fructíferamente lo propio de cada disciplina , la matemática, la ingeniería de sistemas de control y la hidrodinámica (*pero vamos a intentarlo de verdad!*), y sobre todo la colaboración con grupos más grandes (en este caso, el apoyo del grupo OMEVA ha sido esencial: quizás lo más llamativo haya sido el haber sido capaces de aplicar los resultados teóricos de existencia de solución de la tesis de Jorge a nuestro modelo -*de nuevo la interdependencia de las matemáticas en acción*-, pero dicho apoyo se ha manifestado también de otras maneras diferentes).

Apéndice A: Ecuaciones dinámicas de movimiento

AXIAL FORCE EQUATION:

$$\begin{aligned}
& m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2+r^2) + y_G(pq-\dot{r}) + z_G(pr+\dot{q})] \\
= \; & \frac{\rho}{2} l^4 [X'_{qq} q^2 + X'_{rr} r^2 + X'_{rp} rp + X'_{q|q|} q|q|] + \frac{\rho}{2} l^3 [X'_{\dot{u}} \dot{u} + X'_{vr} vr + X'_{wq} wq] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 [X'_{uu} u^2 + X'_{vv} v^2 + X'_{ww} w^2 + X'_{w|w|} w|w|] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 [X'_{\delta_r\delta_r} u^2 \delta_r^2 + X'_{\delta_s\delta_s} u^2 \delta_s^2 + X'_{\delta_b\delta_b} u^2 \delta_b^2] - (W-B)\,\mathrm{sen}(\theta) \\
& + \rho T(1-t_p)
\end{aligned}$$

LATERAL FORCE EQUATION:

$$\begin{aligned}
& m[\dot{v} - wp + ur - y_G(r^2+p^2) + z_G(qr-\dot{p}) + x_G(qp+\dot{r})] \\
= \; & \frac{\rho}{2} l^4 [Y'_{\dot{r}} \dot{r} + Y'_{\dot{p}} \dot{p} + Y'_{r|r|} r|r| + Y'_{pq} pq] \\
& + \frac{\rho}{2} l^3 [Y'_r ur + Y'_p up + Y'_{\dot{v}} \dot{v} + Y'_{wp} wp] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 [Y'_* u^2 + Y'_v uv + Y'_{v|v|N} v|(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}|] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 [Y'_{\delta_r} u^2 \delta_r + Y'_{\delta_r\eta} u^2 \delta_r (\eta - \frac{1}{C}) C] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 Y'_{vwN} vw + (W-B)\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)
\end{aligned}$$

NORMAL FORCE EQUATION:

$$
\begin{aligned}
& m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2+q^2) + x_G(rp-\dot{q}) + y_G(rq+\dot{p})] \\
= & \frac{\rho}{2} l^4 [Z'_{\dot{q}}\dot{q} + Z'_{q|q|}q|q| + Z'_{rr}r^2] + \frac{\rho}{2} l^3 [Z'_{\dot{w}}\dot{w} + Z'_{q}uq + Z'_{vp}vp + Z'_{vr}vr] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 [Z'_{*}u^2 + Z'_{w}uw + Z'_{vv}v^2] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 [Z'_{|w|}u|w| + Z'_{wwN}\,|w|\,(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}] \\
& + \frac{\rho}{2} l^2 \left[Z'_{\delta_s}u^2\delta_s + Z'_{\delta_b}u^2\delta_b + Z'_{\delta_s\eta}u^2\delta_s \left(\eta - \frac{1}{C}\right) C \right] \\
& + (W-B)\cos(\theta)\cos(\phi)
\end{aligned}
$$

ROLLING MOMENT EQUATION:

$$
\begin{aligned}
& I_x\dot{p} + (I_z - I_y)qr - I_{zx}\dot{r} - I_{zx}pq + I_{yz}r^2 - I_{yz}q^2 + I_{xy}pr - I_{xy}\dot{q} \\
& my_G\dot{w} - my_Guq + my_Gvp - mz_G\dot{v} + mz_Gwp - mz_Gur \\
= & \frac{\rho}{2} l^5 K'_{\dot{p}}\dot{p} + \frac{\rho}{2} l^5 K'_{\dot{r}}\dot{r} + \frac{\rho}{2} l^5 K'_{qr}qr + \frac{\rho}{2} l^5 K'_{p|p|}p|p| + \frac{\rho}{2} l^5 K'_{r|r|}r|r| \\
& + \frac{\rho}{2} l^4 K'_{p}up + \frac{\rho}{2} l^4 K'_{r}ur + \frac{\rho}{2} l^4 K'_{\dot{v}}\dot{v} + \frac{\rho}{2} l^4 K'_{wp}wp \\
& + \frac{\rho}{2} l^3 K'_{*}u^2 + \frac{\rho}{2} l^3 K'_{v}uv + \frac{\rho}{2} l^3 K'_{v|v|}v|v| + \frac{\rho}{2} l^3 K'_{\delta_r}u^2\delta_r \\
& + (Y_GW - Y_BB)\cos(\theta)\cos(\phi) - (Z_GW - Z_BB)\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \\
& - \rho Q
\end{aligned}
$$

PITCHING MOMENT EQUATION:

$$
\begin{aligned}
& I_y\dot{q} + (I_x - I_z)rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\
& + m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)] \\
= & \frac{\rho}{2} l^5 [M'_{\dot{q}}\dot{q} + M'_{rp}rp + M'_{q|q|}q|q| + M'_{rr}r^2] + \frac{\rho}{2} l^4 [M'_{\dot{w}}\dot{w} + M'_{q}uq + M'_{vr}vr] \\
& + \frac{\rho}{2} l^3 \left[M'_{*}u^2 + M'_{w}uw + M'_{vv}v^2 + M'_{w|w|N}w \left|(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}\right| \right] \\
& + \frac{\rho}{2} l^3 [M'_{vw}vw + M'_{|w|}u|w| + M'_{ww}|w(v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}|] \\
& + \frac{\rho}{2} l^3 \left[M'_{\delta_s}u^2\delta_s + M'_{\delta_b}u^2\delta_b + M'_{\delta_s\eta}u^2\delta_s \left(\eta - \frac{1}{C}\right) C \right] \\
& - (x_GW - x_BB)\cos(\theta)\cos(\phi) - (z_GW - z_BB)\,\mathrm{sen}(\theta)
\end{aligned}
$$

YAWING MOMENT EQUATION:

$$
\begin{aligned}
& I_z\dot{r} + (I_y - I_x)pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} \\
& + m[x_G(\dot{v} - wp + ur) - y_G(\dot{u} - vr + wq)] \\
= \quad & \frac{\rho}{2}l^5[N^{'}_{\dot{r}}\dot{r} + N^{'}_{r|r|}r|r| + N^{'}_{\dot{p}}\dot{p} + N^{'}_{pq}pq] + \frac{\rho}{2}l^4[N^{'}_{p}up + N^{'}_{r}ur + N^{'}_{\dot{v}}\dot{v}] \\
& + \frac{\rho}{2}l^3[N^{'}_{*}u^2 + N^{'}_{v}uv + N^{'}_{v|v|N}v\left|(v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}\right|] \\
& + \frac{\rho}{2}l^3\left[N^{'}_{\delta_r}u^2\delta_r + N^{'}_{\delta_r\eta}u^2\delta_r\left(\eta - \frac{1}{C}\right)C\right] \\
& + \frac{\rho}{2}l^3 N^{'}_{vwN}vw \\
& + (x_G W - x_B B)\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi) + (y_G W - y_B B)\operatorname{sen}(\theta)
\end{aligned}
$$

La fuerza de empuje de la hélice (T) y sus correspondiente par de giro (Q) que aparecen en dos de las ecuaciones anteriores pueden ser modelados de varias maneras. El modelo más usado es el siguiente:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
T = K_{T0}D^4n^2(t) + K_{TJ}(1-\omega_f)D^3u(t)n(t) + K_{TJ^2}(1-\omega_f)^2D^2u^2(t) \\
Q = K_{Q0}D^5n^2(t) + K_{QJ}(1-\omega_f)D^4u(t)n(t) + K_{QJ^2}(1-\omega_f)^2D^3u^2(t)\,.
\end{array}
\right. \tag{13}
$$

Aquí $u(t)$ es la velocidad de avance (es decir, la séptima componente del vector de estado (1)), D es el diámetro de la hélice, ω_f es un parámetro llamado coeficiente de estela, y los coeficientes K_* se obtienen experimentalmente usando un modelo a escala. Véase [5, Chapter 4] para más detalles.

Referencias

[1] M. Calvo, J. I. Montijano, L. Rández, The numerical resolution of discontinuous IVPs by Runge-Kutta codes: A review, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o 44 (2008), 33-53.

[2] L. Cesari, Optimization Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[3] J. Felman, Revised standard submarine equations of motion. Report DTNSRDC/SPD-0393-09, David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center, Washington D.C., 1979.

[4] A. F. Filippov, Differential equations with discontinuous right-hand side, Mat. Sb. (N.S.) 51 (93) (1960), 99-128 [in Russian]. Engl. Transl.: AMS Translations, Series 2, Vol. 42, pp. 199-231 (1964).

[5] T. I. Fossen, Guidance and control of ocean vehicles, John Wiley and sons, 1994.

[6] J. García, J.A. Murillo, I. A. Nieto, D. Pardo, F. Periago, Numerical simulation of a depth controller for an underwater vehicle, MARTECH'07, International Workshop on Marine Technology, Vilanova i la Gertrú, 2007.

[7] M. Gertler, G. R. Hagen, Standard equations of motion for submarine simulations, NSRDC Rep. 2510, 1967.

[8] H. Hairer, S. P. Nϕrset, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I. Non stiff problems, Second revised edition, Springer series in computational mathematics, 2000.

[9] R. Mannshardt, One-step methods for any order ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides, Numer. Math. 31 (1978) 131-152.

[10] R. Meziat, Analysis of non convex polynomial programs by the method of moments, Nonconvex Optim. Appl., vol. 74, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004, 353-371.

[11] J. Muñoz, P. Pedregal, A refinement on existence results in nonconvex optimal control, Nolinear Anal. 46 (2001) 381-398.

[12] D. M. Ovalle, J. García, F. Periago, Nonlinear optimization tool for the analysis of the manoeuvre capability of a submarine, submitted for publication.

[13] D. M. Ovalle, J. García, F. Periago, Analysis and numerical simulation of a nonlinear mathematical model for testing the manoeuvrability capabilities of a submarine, submitted for publication.

[14] P. Pedregal, J. Tiago, Existence results for optimal control problems with some specific non-linear dependence on state and control, SIAM J. Control Optim. 48 (2) (2009) 415-437.

[15] F. Periago, J. Tiago, A local existence result for an optimal control problem modeling the manoeuvring of an underwater vehicle, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010) 2573-2583.

[16] R. T. Rockafellar, Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange, Adv. Math. 15 (1975) 312-333.