

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN
NUMÉRICA EN INGENIERÍA
Apuntes curso de doctorado

Francisco Periago Esparza
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.
Universidad Politécnica de Cartagena.

6 de abril de 2003

Índice General

1	Modelización Matemática en Mecánica de Medios Continuos	1
1.1	Definiciones y Resultados Básicos	1
1.2	Dos Teoremas Básicos: el de Cauchy y el de Reynolds	5
1.2.1	El Teorema de Cauchy y el Tensor de Esfuerzos (o de Tensiones)	5
1.2.2	El Teorema del Transporte de Reynolds	8
1.3	Leyes de Conservación	10
1.3.1	Conservación de la Masa	11
1.3.2	Conservación de la Cantidad de Movimiento	12
1.3.3	Conservación del Momento. Simetría del Tensor de Esfuerzos	14
1.3.4	Ecuaciones de Equilibrio y Condiciones de Contorno	15
1.3.5	Conservación de la Energía	15
1.3.6	La ecuación del calor no lineal	18
1.3.7	El Tensor de Esfuerzos (stress tensor) Revisitado	19
1.4	Ecuaciones de la Elasticidad Lineal	20
1.4.1	Ley de Hooke. Ecuaciones de Equilibrio	20
1.4.2	Flexión de Membranas y Cuerdas Elásticas	21
1.4.3	Tracción Simple de una Viga Cilíndrica	22
2	Introducción a la Teoría de Distribuciones	25
2.1	Una Primera Idea Intuitiva del Concepto de Distribución	25
2.2	Definición de Distribución. Ejemplos	27
2.3	Cálculo con Distribuciones	29
2.3.1	Derivación	29
2.3.2	Multiplicación de una función por una distribución	29
2.3.3	El Producto de Convolución	30
2.3.4	Distribuciones Temperadas. La Transformada de Fourier	31
2.4	Interpretación Física de la Delta de Dirac	31
2.5	Sobre el Concepto de Solución de una EDP	33
3	Espacios de Sobolev. Formulación Variacional Abstracta	35
3.1	Espacios de Sobolev en Dimensión 1	35
3.2	Espacios de Sobolev en Dimensión $n > 1$	37
3.3	Formulación Variacional Abstracta: El Teorema de Lax-Milgram	40
3.4	Aplicación a los Problemas de Contorno	42
3.4.1	El Caso Unidimensional	42
3.4.2	El Problema de Dirichlet para el Laplaciano	44
3.4.3	Un Problema de Neumann	45
3.4.4	Un Problema en Teoría de Lubricación Sin Solución Clásica	47

3.4.5	Análisis Matemático del Sistema de Elasticidad Lineal	49
4	El Método de los Elementos Finitos	53
4.1	Teoría Abstracta de la Aproximación Variacional	53
4.2	Un par de Ejemplos Concretos	55
4.2.1	El Caso Unidimensional	56
4.2.2	El Problema de Dirichlet para el Laplaciano en un Rectángulo de \mathbb{R}^2 . . .	58
4.3	Interpolación de Lagrange en \mathbb{R}^n	61
4.4	Análisis del MEF	62
4.4.1	Los Espacios de Aproximación $X_k^{(h)}$	62
4.4.2	Construcción de la Matriz de Coeficientes y Segundo Miembro del Problema Discretizado	63
4.4.3	Ensamblado	66
4.4.4	Condición de Dirichlet	67
4.5	Control del Error en el MEF	67
4.5.1	El Caso Unidimensional	68
4.5.2	El Caso de las Dimensiones 2 y 3	68
5	Simulación de Problemas de Contorno con MATLAB	71
5.1	La Ecuación de Poisson en el Disco Unidad	71
5.2	Usando Interactivamente el Toolbox y la Línea de Comandos	75
5.2.1	Introduciendo funciones definidas a trozos	75
5.2.2	Controlando el error y haciendo mallados adaptativos	76

Capítulo 1

Modelización Matemática en Mecánica de Medios Continuos

En estas notas nos ocuparemos, de manera introductoria, de la modelización matemática y el análisis matemático en el amplio campo de la Mecánica de los Medios Continuos y más específicamente de la Elasticidad Lineal. No se estudiarán problemas de una gran complejidad ni tampoco aparecerán resultados originales en estas notas. El objetivo es mucho más humilde: se pretende simplemente hacer más accesible a un posible lector con una formación en matemáticas puras algunas de las ideas subyacentes a la modelización matemática en Mecánica de Medios Continuos; y al mismo tiempo mostrar al posible lector con una formación más propia de un ingeniero algunas de las ideas matemáticas subyacentes en este amplio campo de la Ingeniería. Como siempre en estos casos en los que se intenta contentar a unos y a otros se corre el riesgo de producir justo el efecto contrario, es decir, de no contentar ni a unos ni a otros.

Dado que en estas notas pretendemos, en alguna medida, recorrer el camino que va desde la realidad que nos rodea y que perciben nuestros sentidos al mundo de la abstracción matemática, desde luego habrá que tener presente que las hipótesis que hagamos, unas serán hipótesis llamémoslas físicas y otras matemáticas. Trataré de poner todas las hipótesis necesarias para que los cálculos que se efectúen estén justificados matemáticamente. En cualquier caso, no se pretende que ésta sea la dificultad del tema que se aborda por lo que el lector está facultado para añadir cuantas hipótesis sean necesarias para que las matemáticas que se hagan sean las correctas.

1.1 Definiciones y Resultados Básicos

Desde un punto de vista físico, se llama *medio continuo* a todo líquido, gas o sólido cuando se le considera desde un punto de vista macroscópico, en contraposición con una descripción corpuscular. Por supuesto, la definición anterior deja mucho margen a la ambigüedad y a las interpretaciones particulares que cada uno quiera darle. No hay de que preocuparse pero sí que hay que ser precisos: en realidad, lo que estudiaremos en estas notas serán algunas propiedades matemáticas del *modelo matemático* mediante el cual pretendemos describir un líquido, gas o sólido. Lo único que nos va a interesar es estudiar las deformaciones que sufre un medio continuo sometido a la acción de alguna fuerza (ya sea externa, interna o ambas). Por tanto, hemos de empezar por definir los *conceptos matemáticos* de medio continuo, y de movimiento de un medio continuo.

A lo largo de estas notas identificaremos el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 con el espacio afín subyacente

a dicho espacio vectorial de modo que nos referiremos tanto a *puntos* de \mathbb{R}^3 como a *vectores* de \mathbb{R}^3 según convenga en cada caso. La siguiente definición está tomada de [18, p. 4]

Definición 1.1.1 Dado $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y conexo, llamaremos medio continuo a toda aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega_0 \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X; t) &\rightsquigarrow x = \Phi(X; t). \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades de regularidad:

- (a) $\Phi \in C^2$,
- (b) para cada t fijo, $\Phi(\cdot; t) = \Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t = \Phi(\Omega_0; t)$ es un difeomorfismo, y
- (c) Φ_0 es la identidad.

En la definición anterior la variable t representa el tiempo y tanto $X = (X_1, X_2, X_3) \in \Omega_0$ como $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t = \Phi(\Omega_0; t)$ representan las coordenadas espaciales. A partir de ahora denotaremos por $\Omega_0 = \Omega(0)$ la configuración inicial de dicho medio, es decir, Ω_0 representa la región de \mathbb{R}^3 ocupada por el líquido, gas o sólido en el instante inicial. Por su parte, Ω_t representa la configuración del medio continuo en el instante t , esto es, la región ocupada por dicho medio en el tiempo t .

Es preciso también hacer algunos comentarios sobre las hipótesis (a), (b) y (c) en la definición anterior.

- (a) La hipótesis (a) representa físicamente una deformación *suave*. Sin embargo, no es esa la finalidad de esta hipótesis. Su finalidad es puramente matemática: en lo que sigue tendremos que hacer cálculos en los que nos interesará que se cumpla la propiedad de la igualdad de las derivadas cruzadas y por eso hacemos esta hipótesis de ser $\Phi \in C^2$.
- (b) La hipótesis (b) nos garantiza que para cada t , la matriz jacobiana

$$D\Phi(\cdot; t) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}$$

es no singular, es decir, $\det(D\Phi(\cdot; t)) \neq 0$ para cada t . Además, de la hipótesis (a) concluimos que $D\Phi(X; t)$ es de clase $C^1(\Omega_0 \times [0, T])$.

- (c) Dado que Φ_0 es la identidad, $\det(D\Phi(\cdot; 0)) = 1$. De (b) deducimos ahora que

$$\det(D\Phi(\cdot; t)) > 0 \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Mas adelante llegaremos a la misma conclusión que hemos obtenido en (c) haciendo uso de otro tipo de razonamiento.

Asociado al medio continuo Φ siempre tenemos un campo de velocidades (eulerianas) que se define como

$$\vec{\nabla}(x) = (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right).$$

OJO CON LA NOTACIÓN! Aunque en principio pueda prestarse a confusión, mediante $x = (x_1, x_2, x_3)$ denotaremos tanto al punto $x = \Phi(X; t)$ como al vector $\vec{\partial x}$.

Desde un punto de vista físico, se dice que un medio continuo sufre una deformación si las distancias relativas de los puntos materiales de que se compone dicho medio varían a lo largo del tiempo. Precisaremos esta definición desde un punto de vista matemático.

Sea $M_0 \equiv X = (X_1, X_2, X_3)$ un punto de la configuración inicial Ω_0 . Si el medio sufre una deformación, en el instante $t > 0$ el punto M_0 pasa a ocupar la posición $M \in \Omega(t)$ y que denotamos por $M \equiv x = (x_1, x_2, x_3) = \Phi(X; t)$. Por abuso de notación escribiremos $x = x(X; t)$. Por tanto, la deformación (punto a punto) del medio continuo se describe matemáticamente por medio de la ecuación vectorial

$$x = \Phi_t(X), \quad (1.1)$$

donde

$$\Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega(t).$$

Volvamos ahora a considerar la matriz jacobiana de esta transformación que a partir de ahora y siguiendo la notación de [7] denotaremos por \mathbf{F} , esto es,

$$\mathbf{F}(M_0) = (F_{ij}(M_0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1}(M_0) & \frac{\partial x_1}{\partial X_2}(M_0) & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}(M_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1}(M_0) & \frac{\partial x_2}{\partial X_2}(M_0) & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}(M_0) \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1}(M_0) & \frac{\partial x_3}{\partial X_2}(M_0) & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}(M_0) \end{bmatrix}$$

Si hacemos variar M_0 en Ω_0 obtenemos el campo tensorial

$$\begin{aligned} \mathbf{F} & : \Omega_0 \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}^3) \\ M_0 & \rightsquigarrow \mathbf{F}(M_0) \end{aligned}$$

Este campo tensorial se suele llamar campo tensorial *gradiente de la deformación*. (Todos estos cambios de notación la verdad es que *marean* al matemático, acostumbrado siempre al orden, pero la verdad es que si queremos leer la bibliografía clásica sobre el tema, bueno será que nos vayamos acostumbrando a este *caos* de notación).

Si $\overrightarrow{dM_0} = (dX_1, dX_2, dX_3)$ es un vector (*infinitesimal*) en el punto M_0 , su transformado por el tensor $\mathbf{F}(M_0)$, que denotamos por $\overrightarrow{dM} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ satisface la relación

$$\overrightarrow{dM} = \mathbf{F}(M_0) \cdot \overrightarrow{dM_0},$$

que escrito en notación tensorial y usando el criterio de sumación de índices (esto es, índices repetidos están sumados) se reescribe como

$$dx_i = F_{ij} dX_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad (1 \leq i \leq 3). \quad (1.2)$$

Supongamos ahora que tenemos los vectores $\overrightarrow{dM_0} = (dX_1, dX_2, dX_3)$, $\overrightarrow{\delta M_0} = (\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3)$ en el punto $M_0 \in \Omega_0$ y $\overrightarrow{dM} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, $\overrightarrow{\delta M} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ sus correspondientes transformados por el tensor \mathbf{F} en el punto $M \in \Omega(t)$. Una forma de medir la deformación entre las direcciones marcadas por los vectores $\overrightarrow{dM_0}$ y $\overrightarrow{\delta M_0}$ es por medio de la variación de los productos escalares de los dos pares de vectores anteriores, es decir,

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0}$$

que escrito en coordenadas y usando otra vez la notación tensorial y la relación (1.2) se escribe como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0} &= dx_i \delta x_i - dX_j \delta X_j \\ &= F_{ij} dX_j F_{ik} \delta X_k - dX_j \delta X_j \\ &= (F_{ij} F_{ik} - \delta_{jk}) dX_j \delta X_k \\ &= (C_{jk} - \delta_{jk}) dX_j \delta X_k \end{aligned}$$

donde δ_{jk} es la delta de Kronecker (esto es, $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ y $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$) y

$$\mathbf{C} = (C_{jk}) = (F_{ij} F_{ik})$$

se denomina *tensor de dilataciones*. Nótese que $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \mathbf{F}$, y por tanto, \mathbf{C} es una matriz simétrica. Sus valores propios se denominan *dilataciones principales* y los vectores propios correspondientes, *direcciones principales de la deformación*. Se puede demostrar que estos vectores propios son ortogonales dos a dos y que los valores propios son estrictamente positivos (ver [7, Th. 1.3]). Esto último proporciona también una prueba de que $\det \mathbf{F} > 0$. En la práctica es más usual escribir las ecuaciones anteriores en la forma

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0} &= (C_{jk} - \delta_{jk}) dX_j \delta X_k \\ &= 2D_{jk} dX_j \delta X_k, \end{aligned}$$

donde el tensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (C_{jk} - \delta_{jk})$$

se denomina *tensor de deformaciones*, y obviamente también es un tensor simétrico.

Finalmente estudiaremos un poco más en detalle el tensor de deformaciones que acabamos de introducir. Para ello consideremos el campo vectorial de desplazamientos del medio continuo, esto es, el campo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{u}} : \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\rightsquigarrow \overrightarrow{\mathbf{u}}(X; t) = \overrightarrow{M_0 M} \end{aligned}$$

siendo $M_0 \equiv X = (X_1, X_2, X_3)$ un punto de Ω_0 y $M \equiv x = (x_1, x_2, x_3)$ la nueva posición que ocupa el punto M_0 en el instante t . De (1.1) se deduce que las coordenadas del campo $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ satisfacen la igualdad

$$u_i = x_i - X_i = \Phi_i(X; t) - X_i$$

y por tanto,

$$x_i = X_i + u_i(X; t)$$

De esta forma, las componentes del tensor gradiente de la deformación vienen dadas por

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}.$$

En consecuencia, el tensor de dilataciones se escribe como

$$C_{jk} = F_{ij} F_{ik} = \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k}$$

y lo que es más importante, el tensor de deformaciones está dado por

$$D_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k}.$$

Como se puede observar, este tensor de deformaciones es *nonlinear* debido a los productos $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k}$. Con el fin de poder hacer mucho más tratable matemáticamente dicho tensor y bajo la hipótesis física de pequeños desplazamientos, es decir,

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1$$

conseguiamos linealizar el tensor de deformaciones el cual, una vez linealizado, adopta la forma de

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{jk}), \quad (1.3)$$

donde

$$\varepsilon_{jk}(\vec{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (1.4)$$

A partir de ahora denotaremos por $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{jk})$ al *tensor de deformaciones linealizado* y que está dado por la ecuación (1.4).

1.2 Dos Teoremas Básicos: el de Cauchy y el de Reynolds

Una vez introducidos los conceptos más elementales y la notación tensorial propios de la Mecánica de los Medios Continuos, más adelante nos fijaremos como objetivo la deducción de las ecuaciones que modelizan la deformación de un medio continuo sujeto a la acción de alguna fuerza externa y/o interna. Dichas ecuaciones surgen, como es natural pensar, de principios o leyes de conservación físicos tales como el principio de conservación de la masa, de la energía, del momento, etc. En el proceso que consiste en generar ecuaciones matemáticas (normalmente ecuaciones en derivadas parciales) a partir de dichos principios físicos, juegan un papel esencial dos teoremas conocidos con el nombre de Teorema de Cauchy y Teorema del Transporte de Reynolds de los cuales nos ocuparemos inmediatamente.

1.2.1 El Teorema de Cauchy y el Tensor de Esfuerzos (o de Tensiones)

Sean $\Omega = \Omega(t)$ un medio continuo y $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$ un subconjunto de $\Omega(t)$ que a partir de ahora siempre supondremos es un dominio (conjunto abierto y conexo) acotado cuya frontera $\partial\omega(t)$ es una superficie regular a trozos. Consideremos dos campos vectoriales

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{b}} : \Omega(t) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightsquigarrow \vec{\mathbf{b}}(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\alpha}} : \Omega(t) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; \vec{\mathbf{n}}) &\rightsquigarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) \end{aligned}$$

donde $\vec{\mathbf{n}} = (n_i)$ es cualquier vector normal unitario situado en el punto x (también se puede decir que $\vec{\mathbf{n}}$ es un vector normal unitario exterior a $\partial\omega(t)$, donde $\partial\omega(t)$ es una “pequeña” superficie (o superficie infinitesimal) sobre la que está situado el punto x . En las aplicaciones, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ representa un campo de fuerzas y con la dependencia $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}})$ sólo se pretende poner

de manifiesto que dicho campo de fuerzas depende del punto y también de la dirección, sin olvidarnos claro está del tiempo. A menudo no se suele hacer referencia explícita a la variable temporal t , tal y como acabamos de hacer anteriormente.

Finalmente, consideremos una ley general de conservación que matemáticamente podamos escribir por medio de la identidad

$$\int_{\omega} \vec{\mathbf{b}} \, dx = \int_{\partial\omega} \vec{\boldsymbol{\alpha}} \, dS, \quad \forall \omega \subseteq \Omega. \quad (1.5)$$

Nota 1.2.1 En este punto es preciso matizar el significado de las integrales que aparecen en la expresión anterior: la integral del término de la izquierda es la integral de volumen de un campo vectorial, es decir, la integral triple calculada componente a componente del campo $\vec{\mathbf{b}}$. El resultado de dicha integral es pues un nuevo vector. La integral que aparece en el término de la derecha no es la integral de superficie del campo vectorial $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ sino que es la integral de superficie calculada componente a componente de cada uno de los tres campos escalares que componen el campo $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$. Por tanto, el resultado de esta integral es nuevamente un vector.

Con todos estos elementos ya estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Cauchy. Una prueba de este teorema puede encontrarse en [7, p.p. 41-45]. La demostración que presentamos a continuación está tomada de [18, Teorema 3.1.1]. En el teorema, la dependencia en la variable t no juega ningún papel por lo que evitaremos hacer referencia a esta dependencia.

Teorema 1.2.1 (Cauchy) Sean Ω , ω , $\vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ como antes y supongamos que se verifica la ley de conservación (1.5). Supongamos además que se verifican las dos siguientes condiciones:

(1) $\vec{\mathbf{b}}$ es acotado, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\vec{\mathbf{b}}(x)| \leq C \quad \forall x \in \Omega,$$

(2) para cada $\vec{\mathbf{n}}$ fijo la función

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\alpha}} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightsquigarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) \end{aligned}$$

es continua.

Entonces existe un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x; t)$ (llamado tensor de esfuerzos o de tensiones) tal que

$$\alpha_i = \sigma_{ij}(x; t) n_j,$$

es decir, el campo vectorial $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ depende linealmente del vector normal $\vec{\mathbf{n}}$.

Demostración. Demostraremos que se verifica la identidad

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) = \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{e}}_1) n_1 + \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{e}}_2) n_2 + \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{e}}_3) n_3.$$

Tomemos un punto $x \in \Omega$ y un tetraedro ω centrado en x , contenido en Ω , de vértices x, B, C, D y de forma que \overrightarrow{xB} lleva la dirección de $\vec{\mathbf{e}}_1$ y tiene longitud a_1 , \overrightarrow{xC} la de $\vec{\mathbf{e}}_2$ y con longitud a_2 , y \overrightarrow{xD} la de $\vec{\mathbf{e}}_3$ y con longitud a_3 . Las caras del tetraedro serán denotadas por $\Gamma_1 = xCD$, $\Gamma_2 = xBD$, $\Gamma_3 = xBC$, y finalmente $\Gamma = BCD$, con vectores normales respectivos $-\vec{\mathbf{e}}_1, -\vec{\mathbf{e}}_2, -\vec{\mathbf{e}}_3$ y

$\vec{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$. En los libros de geometría euclídea (por ejemplo en el libro de J. de Burgos) se muestra que se tienen las siguientes relaciones

$$n_i = \cos \gamma_i, \quad |\Gamma_i| = |\Gamma| n_i \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (1.6)$$

siendo γ_i los ángulos que forman los ejes coordenados con el vector $\vec{\mathbf{n}}$ y $|\Gamma_i|$ el área de cada una de las caras.

Sin aplicamos ahora la ley de conservación a esta situación obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \vec{\mathbf{b}}(x) \, dx &= \int_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_1} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_1) \, dS + \int_{\Gamma_2} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_2) \, dS + \int_{\Gamma_3} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_3) \, dS. \end{aligned}$$

Dividiendo en esta expresión por $|\Gamma|$ y teniendo en cuenta (1.6) y que el campo $\vec{\mathbf{b}}$ es acotado se tiene que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) \, dS + \frac{n_1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_1) \, dS \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_2}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_2) \, dS + \frac{n_3}{|\Gamma_3|} \int_{\Gamma_3} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_3) \, dS \right| \quad (1.7) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{V}{|\Gamma|} \|\vec{\mathbf{b}}\|_{\infty}, \quad (1.8)$$

donde V representa el volumen de ω . Si ahora repetimos los cálculos para un tetraedro homotético a escala $\varepsilon > 0$, dado que el nuevo volumen es $V_{\varepsilon} = \varepsilon^3 V$ y las caras laterales $|\Gamma_i^{\varepsilon}| = \varepsilon^2 |\Gamma_i|$, tomando límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la expresión equivalente a (1.8) se obtiene la identidad

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) + n_1 \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_1) + n_2 \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_2) + n_3 \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_3) = 0 \quad (1.9)$$

pues al ser $\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot; \vec{\mathbf{n}})$ continuo para cada $\vec{\mathbf{n}}$ fijo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Gamma^{\varepsilon}|} \int_{\Gamma^{\varepsilon}} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}) \, dS = \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}})$$

y lo mismo sucede con el resto de caras del tetraedro.

Todos los cálculos anteriores se han hecho para $n_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq 3$. Si algún n_i fuese negativo bastaría con cambiar la orientación del tetraedro. Si algún $n_i = 0$ se podría considerar un paralelepípedo en lugar de un tetraedro. Lo importante es que (1.9) vale para todo vector unitario $\vec{\mathbf{n}}$.

Finalmente, veamos que

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; -\vec{\mathbf{e}}_i) = -\vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{e}}_i) \quad \forall 1 \leq i \leq 3. \quad (1.10)$$

Para ello consideremos una bola centrada en x y de radio $\varepsilon > 0$. Dividamos dicha bola en dos semiesferas B_1 y B_2 mediante un plano de normal $\vec{\mathbf{e}}_1$ y con superficies exteriores Γ_1 y Γ_2 , con vectores normales $\vec{\mathbf{n}}_1$ y $\vec{\mathbf{n}}_2$, respectivamente. Denotemos por Γ a la superficie plana común a dichas semiesferas y orientada con vector normal exterior $\vec{\mathbf{e}}_1$ en B_1 y $-\vec{\mathbf{e}}_1$ en B_2 . Aplicando la ley de conservación a cada una de las superficies anteriores y razonando igual que hemos hecho anteriormente con el tetraedro obtenemos que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}_1) \, dS + \int_{\Gamma_2} \vec{\boldsymbol{\alpha}}(x; \vec{\mathbf{n}}_2) \, dS = O(\varepsilon^3),$$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{\alpha}(x; \vec{n}_1) dS + \int_{\Gamma} \vec{\alpha}(x; \vec{e}_1) dS = O(\varepsilon^3),$$

y

$$\int_{\Gamma_2} \vec{\alpha}(x; \vec{n}_2) dS + \int_{\Gamma} \vec{\alpha}(x; -\vec{e}_1) dS = O(\varepsilon^3).$$

Si ahora restamos a la primera identidad las dos restantes, dividimos por ε^2 y finalmente tomamos límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se llega a que

$$\vec{\alpha}(x; \vec{e}_1) + \vec{\alpha}(x; -\vec{e}_1) = 0$$

tal y como queríamos probar. Para las dos direcciones restantes se procede exactamente igual. Nótese que la identidad (1.10) representa el principio físico de acción-reacción. Con todo ello se tiene lo que queríamos probar, ya que en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ el tensor de esfuerzos $\sigma = (\sigma_{ij})$ es el que tiene por columnas $\{\vec{\alpha}(x; \vec{e}_1), \vec{\alpha}(x; \vec{e}_2), \vec{\alpha}(x; \vec{e}_3)\}$. ■

Nota 1.2.2 En Física e Ingeniería el tensor de tensiones es el rey de la fiesta debido a la gran cantidad de información que proporciona. En efecto: como hemos dicho antes, en las aplicaciones, $\vec{\alpha}$ representa a las fuerzas superficiales que actúan sobre cada punto x del medio continuo Ω . Una vez tenemos a nuestra disposición el tensor σ , para determinar la fuerza que actúa sobre el punto x en la dirección \vec{n} únicamente hemos de multiplicar σ por \vec{n} . Por decirlo de alguna forma, el tensor de esfuerzos proporciona toda la información sobre el estado *tensorial* del medio Ω . Por supuesto, la matriz $\sigma = (\sigma_{ij})$ es la matriz de una aplicación lineal en una base de \mathbb{R}^3 . Si cambiamos de base (sistema de coordenadas) la matriz σ cambia de acuerdo a las reglas clásicas del Álgebra Lineal.

1.2.2 El Teorema del Transporte de Reynolds

Consideremos ahora un conjunto medible $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, de modo que $\partial\omega(t)$ sea una superficie regular orientable con el vector normal apuntando hacia afuera de $\omega(t)$. Sea ahora $k: \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y consideremos finalmente la función

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(x; t) dx.$$

Nos planteamos ahora el problema siguiente: ¿Cómo calculamos $\frac{dK}{dt}$? Antes de abordar la solución de este problema, es importante tener en cuenta que la dependencia de K en t es no sólo respecto del integrando sino también del *dominio de integración*. Recordemos que $\vec{v} = \vec{v}(x)$ denota el campo de velocidades del medio continuo. El resultado que sigue puede interpretarse como una generalización del concepto de derivada material (o sustancial) de un campo escalar, y es usualmente conocido como Teorema del Transporte de Reynolds. La prueba que presentamos a continuación está tomada de [7, Th. I.8, p.p. 26-27] y [18, Lema 2.3.1 y Teorema 2.5.1]. Para una interpretación física se recomienda [11, p.p. 8-10.].

Teorema 1.2.2 (Transporte de Reynolds) Sean k , \vec{v} y $\omega(t)$ como antes y supongamos que las funciones k y \vec{v} son de clase $C^1(\bar{\Omega} \times]0, T[)$ y que sus derivadas parciales son acotadas. Entonces,

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \text{div}(k \vec{v}) \right] dx, \quad (1.11)$$

o también

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dx + \int_{\partial\omega(t)} k \vec{v} \cdot dS \quad (1.12)$$

En la demostración del teorema del transporte nos será muy útil el siguiente resultado de cálculo.

Lema 1.2.3 *Sea $J = \det \mathbf{F}$ el determinante del tensor gradiente de la deformación. Se tiene que*

$$\frac{dJ}{dt} = J \cdot \operatorname{div}(\vec{\nabla}).$$

Demostración. Recordemos que un determinante se puede derivar por filas y por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \dots \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{dx_1}{dt} & \frac{\partial}{\partial X_2} \frac{dx_1}{dt} & \frac{\partial}{\partial X_3} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \dots \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \dots \end{aligned}$$

debido a la igualdad de las derivadas cruzadas. Dado que

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_i} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_i},$$

y haciendo uso de las propiedades de los determinantes, el primer sumando de los tres anteriores se desglosa ahora en otros tres sumandos que son

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

Puesto que los determinantes de los dos últimos sumandos son nulos (por tener dos filas iguales), la suma anterior queda reducida a

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} J,$$

y razonando de manera análoga para los otros dos sumandos de la derivada de J (que no hemos escrito antes) obtenemos

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) J = J \cdot \operatorname{div}(\vec{\nabla}).$$

■

Demostración del Teorema del Transporte de Reynolds. Dado que

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(x; t) dx,$$

si efectuamos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \Phi : \omega_0 &\rightarrow \omega(t) \\ X &\rightsquigarrow x = \Phi(X; t) \end{aligned}$$

en dicha integral se obtiene

$$K(t) = \int_{\omega_0} k(\Phi(X; t); t) \det \mathbf{F} dX$$

donde en la expresión anterior hemos cambiado $|\det \mathbf{F}|$ por $\det \mathbf{F} = J$ ya que este último es positivo. Podemos ahora aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral (pues ahora el dominio de integración está fijo) para obtener

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega_0} \left[\frac{Dk(\Phi(X; t); t)}{Dt} J + k(\Phi(X; t); t) J \cdot \text{div}(\vec{\nabla}) \right] dX,$$

donde $\frac{Dk}{Dt}$ denota la derivada material del campo escalar k . Deshaciendo de nuevo el cambio de variable se llega a

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_{\omega(t)} \left[\frac{D}{Dt} k(x; t) + k(x; t) \text{div}(\vec{\nabla}) \right] dx \\ &= \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} k(x; t) + \langle \nabla k, \vec{\nabla} \rangle + k(x; t) \text{div}(\vec{\nabla}) \right] dx \\ &= \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} k(x; t) + \text{div}(k \vec{\nabla}) \right] dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como consecuencia del Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} k(x; t) + \text{div}(k \vec{\nabla}) \right] dx = \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} k(x; t) dx + \int_{\partial\omega(t)} k \vec{\nabla} \cdot dS.$$

■

Nota 1.2.3 Más adelante usaremos el Teorema de Reynolds con un integrando que será una función vectorial. El mencionado teorema se aplica pues a cada una de las componentes de dicho campo.

1.3 Leyes de Conservación

Como se ha mencionado anteriormente, toda la Mecánica de Medios Continuos se edifica bajo el pilar de las leyes de conservación de la Mecánica Clásica. En esta sección nos ocuparemos del estudio de dichas leyes.

1.3.1 Conservación de la Masa

Dado un medio continuo $\Omega(t)$, se llama de densidad de masa a una función (diferenciable y con derivadas parciales acotadas) $\rho = \rho(x; t)$ que verifica que para cada dominio acotado $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, la masa de $\omega(t)$ está dada por

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x; t) \, dx.$$

El principio de conservación de la masa establece que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t).$$

Del Teorema del Transporte de Reynolds se deduce que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dx = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t).$$

Si suponemos ahora que la función del integrando anterior es continua, entonces se tiene que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (1.13)$$

y viceversa, si se cumple (1.13), entonces volviendo hacia atrás también se tiene que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t).$$

Por tanto, a partir de ahora, (1.13) es la expresión analítica del principio de conservación de la masa y se denomina usualmente *ecuación de continuidad*.

Nota 1.3.1 Un medio continuo $\Omega = \Omega(t)$ se dice incompresible si $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Esta condición implica que $\Omega(t)$ conserva su volumen a medida que dicho medio se va modificando. En efecto: el volumen de cada sistema material $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$ viene dado por

$$V(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} dx dy dz$$

y aplicando el Teorema del Transporte de Reynolds,

$$\frac{d}{dt} V(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \operatorname{div}(\vec{v}) \, dx dy dz = 0.$$

Nótese que si $\rho = \rho_0$ es constante, entonces el medio continuo es incompresible. En Mecánica de sólidos es bastante frecuente expresar la condición de incompresibilidad en términos del determinante del tensor gradiente de la deformación. Gracias al Lema 1.2.3 se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \iff \frac{dJ}{dt} = 0 \iff J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = 1$$

ya que $J(X; 0) = 1$.

1.3.2 Conservación de la Cantidad de Movimiento

Sean $\Omega = \Omega(t)$ un medio continuo y $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$ un dominio acotado. La cantidad de movimiento del sistema material $\omega(t)$ viene dada por

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{v} \, dx$$

donde $\rho = \rho(x; t)$ es la densidad de masa del sistema $\omega(t)$ y \vec{v} es el campo de velocidades del medio continuo.

Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre $\omega(t)$ son de dos tipos: (a) fuerzas másicas de densidad de volumen $\rho \vec{f}$, las cuales son bien fuerzas de largo alcance como la fuerza de la gravedad o bien fuerzas de corto alcance que tienen un origen molecular, y (b) fuerzas exteriores que actúan sobre la frontera del sistema $\omega(t)$ y que representamos por medio de la función de densidad $\vec{g}(x, \vec{n}; t)$ donde \vec{n} representa el vector normal unitario exterior a $\partial\omega(t)$. Por tanto, la suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema $\omega(t)$ es igual a

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{g}(x, \vec{n}; t) \, dS.$$

PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. *El principio de conservación de la cantidad de movimiento establece que la variación de la cantidad de movimiento que experimenta el sistema $\omega(t)$ es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre dicho sistema.*

De manera precisa y en lenguaje matemático este principio se escribe pues como

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \vec{v} \, dx = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{g}(x, \vec{n}; t) \, dS \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t). \quad (1.14)$$

Si suponemos que se verifican las hipótesis del Teorema del Transporte de Reynolds, entonces la ecuación (1.14) se transforma en

$$\int_{\omega(t)} \rho (\vec{\gamma} - \vec{f}) \, dx = \int_{\partial\omega(t)} \vec{g}(x, \vec{n}; t) \, dS \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t), \quad (1.15)$$

donde

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j} v_j.$$

Escrito en coordenadas,

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Nótese que para obtener (1.15) se ha utilizado también el principio de conservación de la masa ya que para cada $i = 1, 2, 3$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \\ &= v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) \\ &= \rho \gamma_i \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0,$$

por el principio de conservación de la masa.

Si suponemos ahora que los campos vectoriales que aparecen en las dos integrales anteriores satisfacen las hipótesis del Teorema de Cauchy podemos entonces concluir que existe un campo tensorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \Omega(t) &\rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}^3) \\ x &\rightsquigarrow \boldsymbol{\sigma}(x) \end{aligned}$$

tal que

$$\vec{\mathbf{g}}(x, \vec{\mathbf{n}}; t) = \sigma_{ij} n_j \vec{\mathbf{e}}_i$$

donde $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ son los vectores de la base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

De esta forma, el principio de conservación de la cantidad de movimiento (1.15) se reescribe como

$$\int_{\omega(t)} \rho (\vec{\boldsymbol{\gamma}} - \vec{\mathbf{f}}) dx = \vec{\mathbf{e}}_i \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j dS \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t)$$

y aplicando el Teorema de la Divergencia a la integral del término de la derecha,

$$\int_{\omega(t)} \left[\rho (\gamma_i - f_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right] dx = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t) \text{ y } \forall 1 \leq i \leq 3.$$

Como la igualdad anterior vale para todo $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, si el integrando que aparece en la expresión anterior tiene cierta regularidad (por ejemplo es continuo), entonces no es difícil probar (ver [7, Th. II.1, p. 33]) que

$$\rho (\gamma_i - f_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t) \text{ y } \forall 1 \leq i \leq 3,$$

es decir,

$$\boxed{\rho \gamma_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho f_i \quad \text{en } \Omega(t)} \quad (1.16)$$

o también en forma vectorial

$$\boxed{\rho \vec{\boldsymbol{\gamma}} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \vec{\mathbf{f}}}$$

Este sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales describe el movimiento del medio continuo $\Omega(t)$ y se denominan *ecuaciones de movimiento*. Si el medio continuo está en equilibrio o en movimiento de translación uniforme, entonces el vector $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ es nulo y el sistema (1.16) se reduce a

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho f_i = 0 \quad \text{en } \Omega(t)} \quad (1.17)$$

o en forma vectorial

$$\boxed{\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \vec{\mathbf{f}} = 0}$$

Estas tres ecuaciones (una para cada $i = 1, 2, 3$) en derivadas parciales se denominan *ecuaciones de equilibrio*.

1.3.3 Conservación del Momento. Simetría del Tensor de Esfuerzos

En Física se llama momento angular (o simplemente momento) de una partícula en movimiento al producto vectorial de su vector de posición por su velocidad. El principio de conservación del momento se enuncia diciendo que el momento se conserva.

En nuestra situación, supongamos que tenemos $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$ cumpliendo las hipótesis que hemos hecho en los apartados anteriores. El momento angular del sistema material $\omega(t)$ se escribe como

$$\int_{\omega(t)} x \wedge \rho \vec{v} \, dx$$

donde el símbolo \wedge denota el producto vectorial. Recordemos que el producto vectorial de dos vectores \vec{a} , \vec{b} se puede expresar como

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i,$$

con $\varepsilon_{ijk} = 0$ si alguno de los índices se repite, $\varepsilon_{ijk} = -1$ si la permutación de los índices es impar, y $\varepsilon_{ijk} = 1$ si la permutación es par.

La ley de conservación del momento para el medio continuo $\Omega(t)$ se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} x \wedge \rho \vec{v} \, dx = \int_{\omega(t)} x \wedge \rho \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} x \wedge \vec{g}(\vec{n}) \, dS.$$

Derivando en el término de la izquierda (recordemos que un determinante se deriva por filas y que la derivada de la posición nos da velocidad) llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_{\omega(t)} x \wedge \rho (\vec{\gamma} - \vec{f}) \, dx &= \int_{\partial\omega(t)} x \wedge \vec{g}(\vec{n}) \, dS \\ &= \int_{\partial\omega(t)} x \wedge \boldsymbol{\sigma}(\vec{n}) \, dx \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el Teorema de Cauchy. Escribiendo en coordenadas esta última igualdad, una vez aplicado el Teorema de la Divergencia, se tiene que para cada $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} &\int_{\omega(t)} \left\{ \rho \varepsilon_{ijk} x_j (\gamma_k - f_k) - \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{kl}) \right\} dx \\ &= \int_{\omega(t)} \left\{ \varepsilon_{ijk} x_j \left[\rho (\gamma_k - f_k) - \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} \right] - \varepsilon_{ilk} \sigma_{kl} \right\} dx = 0 \quad \forall \omega(t). \end{aligned}$$

Aplicando ahora el principio de conservación de la cantidad de movimiento obtenemos que

$$\int_{\omega(t)} \varepsilon_{ilk} \sigma_{kl} \, dx = 0 \quad \forall \omega(t),$$

y teniendo en cuenta las propiedades de ε_{ilk} se llega a que $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$, es decir, *el tensor de esfuerzos es simétrico*.

OJO CON LA NOTACIÓN! En las expresiones anteriores, $\vec{g}(\vec{n})$ representa que la fuerza superficial \vec{g} depende del vector normal. Sin embargo, $\boldsymbol{\sigma}(\vec{n})$ representa la actuación del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ sobre el vector \vec{n} , es decir, $\boldsymbol{\sigma}(\vec{n})$ es el vector de coordenadas $\boldsymbol{\sigma}(\vec{n})_k = \sigma_{kl} n_l$.

1.3.4 Ecuaciones de Equilibrio y Condiciones de Contorno

Estudiaremos ahora un poco más en detalle las ecuaciones de equilibrio de un medio continuo que acabamos de deducir. Con la introducción del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ hemos introducido 6 nuevas incógnitas en nuestro sistema. Es preciso por tanto tener más información para poder *cerrar el sistema*. Esto se hace de varias maneras: (a) considerando una nueva ley general de conservación (en concreto la conservación de la energía), (b) considerando leyes específicas del medio continuo (también llamadas leyes constitutivas) que nos permitan conocer la naturaleza del tensor de esfuerzos. Más adelante analizaremos estas dos opciones. Por lo pronto, en esta sección nos ocuparemos de otra parte importante del modelo: *las condiciones de contorno*. A partir de ahora denotaremos por $\Gamma = \partial\Omega$. En Mecánica de Sólidos suelen aparecer las siguientes tres situaciones:

- (a) Frontera fija o empotrada: es aquella en que no se produce ningún desplazamiento. Matemáticamente se expresa como

$$\vec{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

- (b) Frontera libre: es aquella sobre la que no actúa ninguna fuerza pero que sí puede tener desplazamientos debido, por ejemplo a la fuerza de la gravedad que actúa sobre todo Ω . Matemáticamente se expresa como

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

- (c) Frontera sometida a la acción de fuerzas externas: es aquella sometida a la acción de una densidad de fuerzas superficiales $\vec{\mathbf{g}} = (g_i)$. Matemáticamente se expresa como

$$\sigma_{ij}n_j = g_i \quad \text{sobre } \Gamma.$$

La frontera libre se puede considerar como un caso particular del tipo de frontera (c). En las aplicaciones suelen aparecer combinados estos tres tipos de frontera. Así por ejemplo, el modelo matemático para un medio continuo Ω , con frontera $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, en estado de equilibrio y sobre el que actúa una densidad de fuerzas volúmicas $\vec{\mathbf{f}} = (f_i)$, una densidad de fuerza superficial $\vec{\mathbf{g}} = (g_i)$ sobre Γ_1 y que está empotrado en Γ_0 se escribe como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho f_i = 0 & \text{en } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ g_i = \sigma_{ij}n_j & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases}$$

Tenemos ahora sí completo el modelo matemático que describe el estado del medio continuo objeto de estudio.

1.3.5 Conservación de la Energía

Como hemos mencionado en la sección anterior, en algunos problemas concretos de Mecánica de Medios Continuos no es preciso recurrir a la conservación de la energía para cerrar el modelo. Otras veces, sin embargo, sí que es preciso acudir a esta ley de conservación. En esta sección estudiaremos, sin entrar mucho en detalle, esta última ley de la Mecánica Clásica.

Si hacemos caso de nuevo a nuestros sentidos, podemos observar que asociado a un medio continuo hay una magnitud de naturaleza escalar claramente perceptible: *la temperatura*. Y también sabemos que el agua en movimiento es capaz de producir energía, por ejemplo en la

forma de calor. De modo que en todo medio continuo tenemos, por un lado una *energía cinética* de valor $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$, siendo \mathbf{v} el módulo de la velocidad, y que es debida a la velocidad de translación de las partículas que componen el medio; y por otro lado, una *energía interna* que es debida a fenómenos tales como las vibraciones moleculares, presencia de campos electromagnéticos..., y que es el origen de la magnitud macroscópica llamada temperatura. Sabemos además que la energía mecánica se transforma en energía calórica y viceversa. Es la Termodinámica la parte de la Física que se encarga del estudio de estos intercambios de energía. En esta sección nos limitaremos a formular matemáticamente el primer principio de la Termodinámica. Hay un segundo principio de la Termodinámica pero de él no nos ocuparemos al menos de momento.

Dado un medio continuo $\Omega(t)$ y un dominio acotado $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, se llama *energía total* del sistema $\omega(t)$ a la cantidad

$$\mathcal{E}(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x;t) E(x;t) dt,$$

donde

$$E(x;t) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e,$$

con e la energía interna específica (esto es, energía interna por unidad de masa). El primer principio de la Termodinámica se enuncia en los siguientes términos:

PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA. *La variación de la energía total de todo sistema material es igual al trabajo de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema más la cantidad de calor suministrado a dicho sistema. Si el calor es extraído o el trabajo realizado por el sistema, estas contribuciones son negativas.*

Escrito en lenguaje matemático, este principio se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e \right) dx &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{n}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} dS \\ &+ \int_{\omega(t)} \rho Q dx - \int_{\partial\omega(t)} \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} dx$$

representa el trabajo realizado por las fuerzas exteriores,

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{n}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} dS$$

es el trabajo de las fuerzas superficiales que actúan sobre $\partial\omega(t)$,

$$\int_{\omega(t)} \rho Q dx$$

es el aporte o pérdida de calor debidos a los efectos de reacción química, radiación y otros, y finalmente

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS$$

es el flujo de calor saliente a través de la frontera.

Aplicando los teoremas del Transporte de Reynolds y de la Divergencia, y el principio de conservación de la masa (o ecuación de continuidad) esta ley de conservación se escribe en la forma

$$\int_{\omega(t)} \left[\rho \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma} + \frac{De}{Dt} \right) - \rho \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\nabla} - \rho Q + \text{div}(\vec{\mathbf{q}}) \right] dx = \int_{\partial\omega(t)} \vec{g}(\vec{\mathbf{n}}) \cdot \vec{\nabla} dS, \quad (1.18)$$

donde

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla e \cdot \vec{\nabla}$$

es la derivada material (o sustancial) de la energía interna específica.

Nos ocuparemos ahora del segundo miembro de la fórmula (1.18). Aplicando el Teorema de Cauchy y después el Teorema de la Divergencia obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega(t)} \vec{g}(\vec{\mathbf{n}}) \cdot \vec{\nabla} dS &= \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j v_i dS \\ &= \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} v_i n_j dS \\ &= \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) dx \\ &= \int_{\omega(t)} \left[v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dx. \end{aligned}$$

Llevando todo esto a (1.18) y reagrupando términos se tiene que

$$\int_{\omega(t)} \left[v_i \left(\rho \gamma_i - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) + \rho \frac{De}{Dt} - \rho Q + \text{div}(\vec{\mathbf{q}}) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dx = 0. \quad (1.19)$$

El término entre paréntesis en la expresión anterior es nulo debido al principio de conservación de la cantidad de movimiento. Además, el término $\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ se suele escribir en la forma

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} D_{ij}(\vec{\nabla}),$$

donde el tensor

$$D(\vec{\nabla}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{\nabla} + {}^t \nabla \vec{\nabla})$$

se denomina *tensor de velocidades de deformación*.

Finalmente, como (1.19) vale para todo $\omega(t)$ se tiene que

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} D_{ij}(\vec{\nabla}) + \rho Q - \text{div}(\vec{\mathbf{q}})} \quad (1.20)$$

Esta ecuación, la cual expresa de manera concreta el primer principio de la termodinámica, es atribuida a C. Neumann (también a Kirchoff y Maxwell) y relaciona la variación de energía interna (miembro de la izquierda), el trabajo por unidad de tiempo (primer sumando del término de la derecha), y el aporte o pérdida de calor (dos sumandos restantes).

Con la ecuación de conservación de la energía se cierra el elenco de leyes de conservación de la Mecánica Clásica. Visto desde un punto de vista crítico parece que esta última ley de

conservación lejos de simplificar las cosas lo que hace es complicarlas pues hemos introducido cinco nuevas incógnitas, a saber, e , Q y \vec{q} . Esta dificultad se supera en la práctica por dos vías: (a) como hemos mencionado antes en algunos problemas de Mecánica de Medios Continuos no es preciso recurrir a la conservación de la energía, y (b) se introducen nuevas ecuaciones (más información) que provienen de las propiedades físicas particulares de los medios que se estén considerando. Estas últimas propiedades es lo que se llaman *leyes constitutivas*.

1.3.6 La ecuación del calor no lineal

Veamos un ejemplo clásico de ley constitutiva: la ley de Fourier. En problemas de transmisión de calor, una buena aproximación supone en escribir

$$e = CT,$$

donde C es una constante llamada *calor específico*, y T es la temperatura absoluta. Además, si el transporte de calor se efectúa por convección, entonces la ley de Fourier nos conduce a que

$$\vec{q} = -k\nabla T,$$

donde k es una constante llamada *conductividad térmica*. Si suponemos finalmente que el medio continuo está en reposo, esto es, $\vec{v} = 0$, entonces la ecuación general de conservación de la energía (1.20) se escribe como

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho Q + \operatorname{div}(k\nabla T). \quad (1.21)$$

En algunas situaciones la conductividad térmica k depende de la temperatura o incluso del gradiente de la temperatura. En concreto, en física de plasmas parece ser que

$$k(t) = cT^n, \quad n \geq 1$$

y $c = cte$. En este caso, la ecuación (1.21) se escribe como

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho Q + \tilde{c} \Delta (T^{n+1})$$

que es la denominada *ecuación de los medios porosos*.

En otros casos, $k(t) = |\nabla T|^{p-2}$, $p \geq 1$. La ecuación (1.21) se escribe entonces como

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho Q + \operatorname{div} \left(|\nabla T|^{p-2} \nabla T \right)$$

que en su versión estacionaria,

$$-\operatorname{div} \left(|\nabla T|^{p-2} \nabla T \right) = \rho Q$$

se denomina *ecuación del p -Laplaciano*.

1.3.7 El Tensor de Esfuerzos (stress tensor) Revisitado

Estudiaremos ahora más en detalle el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ que aparece en las ecuaciones de equilibrio y que es, por tanto, uno de los elementos más importantes en la Mecánica de los Medios Continuos.

Como hemos visto anteriormente, en cada punto x del medio continuo y en cada instante de tiempo t tenemos un tensor simétrico de orden 2 (es decir, una matriz 3×3), llamado tensor de esfuerzos y que denotamos por $\boldsymbol{\sigma}(x; t)$, que verifica que para cada dirección de vector unitario $\vec{\mathbf{n}} = (n_i)$ le hace corresponder el vector $\vec{\mathbf{F}} = (F_i)$ definido como

$$F_i = \sigma_{ij}n_j.$$

Cada uno de estos vectores, llamados vectores de esfuerzos, representa la densidad superficial de fuerzas que se ejerce sobre toda región limitada por una superficie que pasa por el punto x y que tiene como vector normal exterior $\vec{\mathbf{n}}$.

Dado que $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor simétrico (matriz simétrica), es diagonalizable. Cada uno de los vectores propios asociados a los valores propios se denominan direcciones principales de esfuerzos. Si en el punto x ponemos un sistema de coordenadas basado en los tres vectores propios y que resulta ser un sistema ortonormal, entonces en dicho sistema el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ adopta la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los tres valores propios de $\boldsymbol{\sigma}$. Desde un punto de vista físico, $\sigma_i > 0$ significa que en el punto x se produce una tracción en la dirección del vector propio asociado a σ_i , $\sigma_i < 0$ significa que en el punto x se produce una compresión en la dirección del vector propio asociado a σ_i , y finalmente $\sigma_i = 0$ significa que el punto x está libre de tensión en la dirección del vector propio asociado a σ_i .

Veamos ahora un ejemplo físico concreto que nos ayudará a entender mejor el tensor de esfuerzos.

Consideremos el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 equipado con una base ortonormal $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$. Se llama tensor de esfuerzos uniaxial en la dirección $\vec{\mathbf{e}}_1$ y con una intensidad σ al tensor

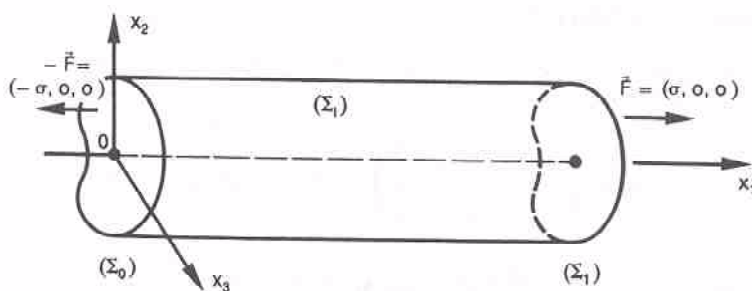
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Consideremos ahora un medio continuo que ocupa una región Ω que es un cilindro situado en el eje x_1 y limitado por dos bases Σ_0 y Σ_1 situadas en los planos $x_1 = 0$ y $x_1 = L$, respectivamente. Si sobre las bases Σ_0 y Σ_1 se ejercen unas fuerzas de densidad

$$F_1 = -\sigma, \quad F_2 = F_3 = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_0$$

$$F_1 = \sigma, \quad F_2 = F_3 = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_1$$

entonces el tensor de esfuerzos asociado a este sistema es justo el tensor de esfuerzos uniaxial dado en (1.22). Si $\sigma > 0$ el sistema está sometido a una tracción en la dirección del eje x_1 , mientras que si $\sigma < 0$ lo que se produce es una compresión.



1.4 Ecuaciones de la Elasticidad Lineal

En esta sección nos ocuparemos de un tipo particular de medios continuos: los medios elásticos. El objetivo básico de esta sección es introducir las ecuaciones clásicas de la elasticidad lineal. No haremos una deducción rigurosa de tales ecuaciones sino que nos limitaremos a exponer muy someramente algunas ideas subyacentes a esta teoría. Para un estudio mucho más completo y riguroso que el presentado aquí puede consultarse [7, Ch. IV].

1.4.1 Ley de Hooke. Ecuaciones de Equilibrio

Un medio (o material) *elástico* se puede definir en los siguientes términos: se dice que el medio continuo $\Omega = \Omega(t)$ es elástico si existe un sistema de coordenadas y un tiempo $t = 0$ en el que Ω está libre de tensión, y si después de la deformación el tensor de esfuerzos depende únicamente del tensor de deformaciones calculado en este mismo sistema de referencia. Escrito en un lenguaje más matemático, diremos que el medio Ω es elástico si su tensor de esfuerzos asociado se puede escribir en la forma

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh} \quad (1.23)$$

donde $\varepsilon(\vec{\mathbf{u}}) = (\varepsilon_{ij})$ es el tensor de deformaciones (linealizado) y a_{ijkh} son unos coeficientes que dependen de las propiedades del material y que se denominan coeficientes de elasticidad. Se dice que el material elástico Ω es *homogéneo* si los coeficientes a_{ijkh} son constantes, es decir, si no dependen del punto $x \in \Omega$. En caso contrario se dice que el medio es no homogéneo.

Dado que el tensor de deformaciones es no lineal, el tensor de esfuerzos también lo es, y de esta forma, al usar las ecuaciones de equilibrio de un medio continuo cualquiera para escribir las ecuaciones de equilibrio de un medio elástico obtenemos un sistema de EDPs no lineal. Con el fin de poder hacer más tratable matemáticamente dicho sistema lo que se suele hacer en la práctica es linealizar las ecuaciones, y para ello se tienen en consideración distintas hipótesis físicas bajo las cuales la linealización representa una buena aproximación a la realidad. En particular, a partir de ahora supondremos que las deformaciones son pequeñas, es decir, utilizaremos directamente el tensor de deformaciones linealizado.

Por otra parte, se dice que un material elástico Ω es *isótropo* si en cualquier punto $x \in \Omega$ el material tiene las mismas propiedades en todas las direcciones posibles alrededor de dicho punto.

Para el caso de materiales elásticos isótropos se puede demostrar que el tensor de esfuerzos σ asociado a dicho medio se escribe en la forma

$$\sigma = \lambda \text{traza}(\varepsilon(\vec{\mathbf{u}})) I + 2\mu \varepsilon(\vec{\mathbf{u}}) \quad (1.24)$$

donde $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ son constantes si el material es homogéneo y se denominan *coeficientes de Lamé*. Esta forma del tensor de esfuerzos es lo que se conoce en Teoría de la Elasticidad como *ley de Hooke*.

Las ecuaciones (1.17) con σ_{ij} dado por (1.24) son las llamadas *ecuaciones de la elasticidad lineal*. Nótese finalmente que el tensor (1.24) adopta la forma general (1.23) con sólo tomar

$$a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jk} + \delta_{ih} \delta_{jk}).$$

1.4.2 Flexión de Membranas y Cuerdas Elásticas

En esta sección estudiaremos dos casos particulares de las ecuaciones generales de equilibrio de la elasticidad lineal: el estudio de la flexión de una membrana elástica sujeta en el borde, y el de una cuerda también sujeta en los extremos.

Supongamos en primer lugar que Ω es una membrana elástica (matemáticamente, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado), sujeta en el borde, sobre la que actúa una fuerza vertical $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y que produce un desplazamiento (también en la dirección vertical) $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Figura 1.1: Membrana elástica sujeta en el borde.

Un sencillo cálculo muestra que en este caso la ecuación vectorial (1.17) se reduce a la ecuación escalar

$$-\left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

El modelo queda completo con la condición de contorno

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

que representa el hecho de que la membrana está sujeta en el borde. Una condición de este tipo es lo que en Matemáticas se llama una condición tipo Dirichlet homogénea.

La versión uno-dimensional de este problema consiste en estudiar la flexión de una cuerda elástica (pongamos de longitud L), sujeta en los extremos y sobre la que actúa una fuerza vertical f .

La ecuación (1.17) queda reducida en este caso a la ecuación escalar $-(\lambda + 2\mu)u' = f$ y por tanto el modelo matemático para este problema es

$$\begin{cases} -(\kappa u)' = f & \text{en }]0, L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

donde por simplicidad hemos escrito $\kappa = \lambda + 2\mu$.

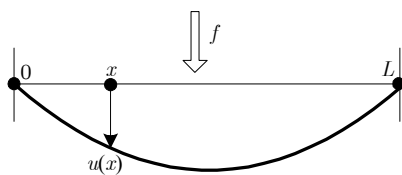


Figura 1.2: Cuerda elástica sujeta en los extremos.

1.4.3 Tracción Simple de una Viga Cilíndrica

Concluimos esta sección con el estudio de un problema sencillo de elasticidad lineal: el problema de la tracción simple para una viga cilíndrica, elástica, homogénea e isótropa.

Consideremos una viga cilíndrica de longitud L . Denotemos por Γ_0 y Γ_1 las dos superficies laterales de la viga y por Γ_l la superficie lateral.

La viga está sometida a la acción de una fuerza de tracción $\vec{\mathbf{F}}$ sobre Γ_1 y $-\vec{\mathbf{F}}$ sobre Γ_0 , ambas paralelas al eje del cilindro. Se supone además que estas fuerzas están uniformemente distribuidas sobre Γ_0 y Γ_1 , de modo que

$$(F, 0, 0) = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{S},$$

donde S es el área de Γ_0 , que coincide también con el área de Γ_1 .

Suponemos también que sobre la superficie lateral del cilindro Γ_l no actúa ninguna fuerza y que las fuerzas volúmicas son nulas (en particular, no se tiene en cuenta la fuerza de la gravedad).

Si denotamos por Ω la región de \mathbb{R}^3 interior al cilindro, las ecuaciones de equilibrio se escriben como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.25)$$

y tenemos además las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \sigma_{ij} n_j = 0, & i = 1, 2, 3 & \text{sobre } \Gamma_l \\ \sigma_{1j} n_j = F, & \sigma_{2j} n_j = \sigma_{3j} n_j = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \sigma_{1j} n_j = -F, & \sigma_{2j} n_j = \sigma_{3j} n_j = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases} \quad (1.26)$$

donde $\vec{\mathbf{n}} = (n_j)$ es el vector normal unitario exterior a la superficie considerada en cada caso.

Si suponemos ahora que la viga es homogénea e isótropa, entonces el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ está dado por

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.27)$$

donde λ y μ son los coeficientes de Lamé (que son constantes por ser la viga homogénea) y el tensor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\mathbf{u}}) = (\varepsilon_{ij})$ es el tensor de deformaciones linealizado que viene dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.28)$$

siendo $\vec{\mathbf{u}} = (u_i)$ el vector de desplazamientos.

Vamos ahora a calcular una solución de este problema. A la vista de las ecuaciones (1.25) es natural proponer como tensor de esfuerzos solución el tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el cual obviamente satisface las ecuaciones (1.25) y (1.26). El sistema (1.27) se escribe ahora como

$$\begin{cases} F = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{11} \\ 0 = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{22} \\ 0 = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

Tenemos pues un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución es

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F \end{cases}$$

y con ello el tensor de deformaciones es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F \end{bmatrix}$$

Es inmediato entonces comprobar que el vector

$$\vec{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3) = (\varepsilon_{11}x_1, \varepsilon_{22}x_2, \varepsilon_{33}x_3)$$

satisface la ecuación (1.28), es decir, $\vec{\mathbf{u}}$ es un campo de vectores solución de nuestro problema.

Vamos a analizar ahora un poco físicamente la solución obtenida. El estiramiento longitudinal de la viga δL , está dado por

$$\delta L = \varepsilon_{11}L = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} FL$$

y por tanto el estiramiento relativo vale

$$\frac{\delta L}{L} = \varepsilon_{11} = \frac{F}{E}, \quad (1.29)$$

donde $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ se denomina *módulo de Young*. Este parámetro se mide experimentalmente en los laboratorios para distintos tipos de material y a diferentes temperaturas. Lógicamente, la igualdad (1.29) nos dice que cuanto mayor sea el módulo de Young mayor será la resistencia del material a deformarse longitudinalmente. Respecto de las deformaciones transversales, lo primero que se puede decir, a partir de la forma que adopta el vector de desplazamientos $\vec{\mathbf{u}}$, es que estas deformaciones tienden a disminuir el radio del cilindro. De manera más precisa, si denotamos por

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

el llamado *coeficiente de Poisson*, se tiene entonces trivialmente que

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}.$$

De esta relación se deduce que si l es el diámetro del cilindro antes de deformarse y si después de deformado el nuevo diámetro vale $l + \delta l$, entonces

$$\frac{\delta l}{l} = -\nu \frac{\delta L}{L}.$$

Este nuevo parámetro ν también se mide experimentalmente en el laboratorio y se puede probar además que siempre se verifica la condición $0 < \nu < 1/2$.

Capítulo 2

Introducción a la Teoría de Distribuciones

Las distribuciones aparecieron por primera vez en Física en 1882 y fue Kirchoff quien, tratando de dar una formulación precisa del principio de Huygens, introdujo una especie de “función generalizada” definida como

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

que además satisfacía la propiedad de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Posteriormente, Heaviside interpretó, en el contexto de la electrodinámica, la función δ como la derivada de la función

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Sin embargo, fue Paul Dirac (en 1930 aproximadamente) quién popularizó en el mundo de la mecánica cuántica la “función” δ conocida ahora como Delta de Dirac. Tuvieron que pasar muchos años hasta que el matemático francés Laurent Schwartz, en la década de los años 40, formulara de manera precisa el concepto de “función generalizada” que hasta entonces se prestaba a muchas interpretaciones y ambigüedades. Apareció entonces la Teoría de Distribuciones por la que Schwartz recibió en 1950 el premio de más prestigio con que puede ser galardonado un matemático, *la Medalla Fields*.

En este capítulo se presentan las nociones mínimas sobre Teoría de Distribuciones que son necesarias para introducir los Espacios de Sobolev, los cuales juegan un papel esencial en el Método de los Elementos Finitos.

Para un tratamiento más profundo de la Teoría de Distribuciones se puede consultar la bibliografía recomendada.

2.1 Una Primera Idea Intuitiva del Concepto de Distribución

Imaginemos que un químico se encuentra estudiando alguna propiedad física de alguna sustancia que se encuentra a temperatura T_0 . Obviamente, dicho científico no podrá conseguir de manera exacta la temperatura T_0 sino que esta variará en un cierto intervalo $a \leq T_0 \leq b$. Esto sugiere, en un primer paso, que el modelo matemático correcto debe involucrar una media sobre el intervalo

Figura 2.1: Laurent Schwartz

$[a, b]$. Sin embargo, las temperaturas cercanas a los extremos a y b ocurrirán raramente y la mayor parte de las temperaturas se concentrará en la mitad del intervalo. Una posible densidad de temperaturas podría ser la función $\varphi(T)$ dada en el siguiente gráfico:

Si $\varphi(T)$ es infinitamente diferenciable, entonces $\varphi(T)$ es lo que llamaremos una función Test. Recordemos que nuestro químico quiere obtener las propiedades de alguna sustancia a temperatura T_0 , y por tanto, considera una cantidad de sustancia con temperaturas distribuidas en un pulso $\varphi(T)$ cerca de $T = T_0$. El objetivo es encontrar alguna ley física, normalmente representada por una función $f(T)$ y para ello usa las funciones Test $\varphi(T)$ para “testear” o “chequear” la ley $f(T)$.

Veamos un poco más matemáticamente qué es lo que estamos diciendo. El valor medio de una función sobre un intervalo $f(T)$ viene dado por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(T) dT.$$

Esto corresponde a una distribución uniforme de temperaturas. En la realidad, las temperaturas tienen una densidad $\varphi(T)$. De esta forma conseguimos una media con peso o media ponderada

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(T) \varphi(T) dT \quad (2.1)$$

en la cual diferentes temperaturas tienen diferente peso dependiendo de su frecuencia $\varphi(T)$ de aparición. La expresión (2.1) adopta la forma en que la función $f(T)$ es tratada en la

Teoría de Distribuciones. La idea básica es que *aplicando diferentes funciones de prueba φ a la misma función f podemos conocer la estructura de f , o como diría el químico: con diferentes experimentos φ obtenemos la ley descrita por f .*

Insistiendo un poco más en esta idea, diremos que en la teoría de distribuciones las funciones no nos interesan desde un punto de vista puntual $x \rightarrow f(x)$, sino que lo que nos interesa es saber cuál es la acción de la función f sobre funciones test φ , esto es, nos interesa $\varphi \rightarrow \int f\varphi$.

2.2 Definición de Distribución. Ejemplos

A lo largo de este capítulo, Ω designará un conjunto abierto y no vacío de \mathbb{R}^n y $x = (x_1, \dots, x_n)$ denotará un punto genérico de Ω . Llamaremos multi-índice a todo elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$, esto es, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Si $\varphi \in C^k(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ denotaremos por

$$\partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dada una función continua $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, llamaremos soporte de φ , *sop* φ , al conjunto

$$\text{sop} \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos al espacio de las funciones $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que son infinitamente diferenciables y con soporte compacto contenido en Ω . Es inmediato comprobar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es no vacío; así por ejemplo, si $a \in \Omega$ y $R > 0$ es tal que la bola de centro a y radio R está contenido en Ω , entonces la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x-a\|^2 - R^2}} & \text{si } \|x-a\| < R \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

está en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Figura 2.2: Función test en dimensión 2.

Definición 2.2.1 *Dada una sucesión $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, diremos que dicha sucesión converge en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ a una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si se verifican las siguientes propiedades:*

- (i) Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{sop } \varphi_m \subset K$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
- (ii) La sucesión $\partial^\alpha \varphi_m$ converge uniformemente sobre Ω a $\partial^\alpha \varphi$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definición 2.2.2 Llamaremos **distribución** sobre Ω a toda forma lineal

$$\begin{aligned} u : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle u, \varphi \rangle \end{aligned}$$

tal que si $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle u, \varphi_m \rangle = \langle u, \varphi \rangle.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ al espacio de todas las distribuciones sobre Ω .

Veamos a continuación dos ejemplos de distribuciones. Denotemos por $L^1_{loc}(\Omega)$ al espacio

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \int_K f < \infty \quad \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto} \right\}$$

Ejemplo 2.2.1 Toda función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ se puede considerar como distribución sobre Ω considerando la forma lineal

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi. \end{aligned}$$

Además, se puede demostrar que $f = 0$ c.t.p. si y sólo si $f = 0$ como distribución, lo cual nos permite escribir $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. A este tipo de distribuciones que provienen de una función localmente integrable se les llama **distribuciones regulares**.

Ejemplo 2.2.2 Dado $x_0 \in \Omega$, se llama distribución Delta de Dirac centrada en x_0 a la distribución

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Veamos ahora que esta distribución no coincide con ninguna función localmente integrable, es lo que se llama una **distribución singular**. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_{x_0} = f$ como distribución. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_0, 1/m) \subset \Omega$. Por el lema de Urishorn sabemos que existe $\varphi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que:

- (a) $0 \leq \varphi_m \leq 1$.
- (b) $\varphi_m(x) = 1 \quad \forall x \in B(x_0, 1/m)$.
- (c) $\varphi_m(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus B(x_0, 2/m)$.

Por tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$1 = \varphi_m(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi_m \rangle = \int_{\Omega} f \varphi_m$$

y tomando límites en la expresión anterior cuando $m \rightarrow \infty$, por convergencia dominada se tiene que

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \varphi_m = \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} f \varphi_m = 0$$

lo cual es absurdo.

2.3 Cálculo con Distribuciones

En esta sección estudiaremos algunas de las operaciones básicas en Teoría de Distribuciones. En particular, la derivación, el producto de una función de clase C^∞ por una distribución, el producto de convolución y la transformada de Fourier. Estas operaciones son las mínimas operaciones necesarias para poder estudiar ecuaciones diferenciales desde el punto de vista distribucional.

2.3.1 Derivación

Anteriormente hemos visto que toda función localmente integrable es una distribución. En esta sección veremos que la derivación es una operación válida para cualquier distribución. Ello nos permitirá poder calcular la derivada de cualquier función localmente integrable, en particular, la derivada de funciones no continuas. Obviamente, esta operación de derivación no puede ser entendida en sentido clásico, sino en un sentido débil o distribucional que es el que pasamos a estudiar a continuación.

Supongamos que $f \in C^1]a, b[$ y que $\varphi \in \mathcal{D}]a, b[$. Como $\partial_i f \in C]a, b[\subset L^1_{loc}]a, b[$, podemos considerar $\partial_i f$ como distribución y por tanto, integrando por partes se tiene que

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_a^b \partial_i f(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \partial_i \varphi(x) dx = - \langle f, \varphi' \rangle.$$

La identidad $\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle$ sigue teniendo sentido si se sustituye f por una distribución cualquiera $u \in \mathcal{D}']a, b[$. Este hecho es el que inspira la siguiente definición general:

Definición 2.3.1 Dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos la derivada $\partial^\alpha u$ como la distribución

$$\begin{aligned} \partial^\alpha u : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Es un simple ejercicio comprobar que $\partial^\alpha u$ es efectivamente una distribución.

En el caso de que $f \in C^k(\Omega)$ y $|\alpha| \leq k$, entonces la derivada distribucional y funcional de f coinciden (obviamente, en el sentido de las distribuciones).

Ejemplo 2.3.1 $H' = \delta$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx \\ &= -\varphi(x)|_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

2.3.2 Multiplicación de una función por una distribución

Definición 2.3.2 Sea $f \in C^\infty(\Omega)$ y $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se define la distribución fu mediante la fórmula

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es inmediato comprobar que efectivamente $fu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Como puede observarse en los dos casos anteriores de derivación de una distribución y de multiplicación de una función de clase C^∞ por una distribución, la filosofía general para definir operaciones en el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es la siguiente: supongamos que

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

es un operador lineal y continuo (respecto de la noción de convergencia introducida en el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$). Se dice que

$$T^* : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

es el operador dual de T si T^* es lineal y continuo y si además satisface que

$$\int_{\Omega} (T\varphi)(x) \psi(x) dx = \int_{\Omega} \varphi(x) (T^*\psi)(x) dx \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2)$$

Nótese que, desde el punto de vista de las distribuciones, (2.2) puede escribirse en la forma

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T^*\psi \rangle.$$

Por tanto, generalizando al caso de distribuciones se tiene

$$\langle Tu, \psi \rangle = \langle u, T^*\psi \rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ y } \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De la linealidad y la continuidad del operador T^* se deduce inmediatamente que $Tu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Con este método introduciremos a continuación dos de las operaciones más importantes en Teoría de Distribuciones: la convolución y la transformada de Fourier.

2.3.3 El Producto de Convolución

La mayoría de las demostraciones en problemas relacionados con EDPs hacen uso de la convolución. En esta sección extenderemos al campo de las distribuciones el concepto de convolución de funciones. Hay dos formas distintas de definir el producto de convolución de una distribución por una función. En una de ellas originamos una distribución mientras que en la otra originamos una función. Veremos que, en realidad, ambas definiciones coinciden (en el sentido de las distribuciones, claro está).

Definición 2.3.3 (Definición distribucional del producto de convolución) Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se define la convolución de u y φ , denotado $u * \varphi$, como la distribución que actúa del siguiente modo:

$$\langle u * \varphi, \psi \rangle = \langle u, \psi * \tilde{\varphi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Por supuesto se puede probar que la definición anterior es correcta, es decir, que efectivamente $u * \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 2.3.4 (Definición funcional del producto de convolución) Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se define la convolución de u y φ , denotado $(u * \varphi)_f$, como la función

$$(u * \varphi)_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (u * \varphi)_f(x) = \langle u, \tilde{\varphi}_x \rangle$$

donde $\tilde{\varphi}_x(y) = \varphi(x - y)$.

Nótese que si en la definición anterior $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces la definición dada coincide con la definición clásica del producto de convolución.

Se puede probar que $(u * \varphi)_f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En particular $(u * \varphi)_f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Tiene pues sentido estudiar si se tiene la identidad $u * \varphi = (u * \varphi)_f$, consideradas ambas como distribuciones. La respuesta a esta pregunta es afirmativa. Además, se tiene que

$$\partial^\alpha (u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * \partial^\alpha \varphi.$$

En esta sección hemos considerado únicamente el caso de la convolución de una distribución u por una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se puede extender este concepto al caso de dos distribuciones una de las cuales tiene soporte compacto. No entraremos, sin embargo, en estas cuestiones.

2.3.4 Distribuciones Temperadas. La Transformada de Fourier

Nos ocuparemos ahora de otra de las operaciones importantes en EDPs: la transformada de Fourier. Para estudiar de manera adecuada esta operación es preciso introducir primero el llamado espacio de las distribuciones temperadas.

Por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denotaremos al espacio de Schwartz, el cual está formado por las funciones $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^∞ y tales que para todo número natural $m \in \mathbb{N}$ y todo multiíndice $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$|\phi|_{m,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |D^\beta \phi(x)| < \infty.$$

Dada una sucesión de funciones $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, diremos que la sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a la función $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en el espacio \mathcal{S} , si para todo multiíndice $\beta \in \mathbb{N}^n$ y para todo número natural $m \in \mathbb{N}$, la sucesión de funciones $(1 + |\cdot|)^m |D^\beta \phi_n(\cdot)|$ converge uniformemente a la función $(1 + |\cdot|)^m |D^\beta \phi(\cdot)|$. Esta noción de convergencia define una topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denotaremos al dual topológico de \mathcal{S} , al que nos referiremos llamándolo espacio de las distribuciones temperadas. Dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denotaremos también por $\langle u, \phi \rangle$ al valor que se obtiene al evaluar la distribución temperada u sobre la función ϕ .

Dado que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La inclusión anterior es estricta ya que la función localmente integrable $f(x) = e^x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y sin embargo, se puede probar que $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Ejemplos sencillos de funciones temperadas son las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. La delta de Dirac también es una distribución temperada.

Definición 2.3.5 Dada una distribución temperada u , se define la transformada de Fourier de u como la distribución \widehat{u} definida como

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

No es difícil probar que efectivamente $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Recogemos a continuación las principales propiedades de la transformada de Fourier de distribuciones temperadas:

Proposición 2.3.1 Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

- (a) $\partial^\alpha \widehat{u} = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha u}$ para todo multi-índice α .
- (b) $\widehat{\partial^\alpha u} = (2\pi i x)^\alpha \widehat{u}$.
- (c) Fórmula de inversión: $(\widehat{u})^\vee = u$.
- (d) $\widehat{\delta} = 1$.

Nota 2.3.1 Nótese que al extender el concepto de transformada de Fourier al espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y dado que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ahora tiene sentido calcular la transformada de Fourier de cualquier función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

2.4 Interpretación Física de la Delta de Dirac

Anteriormente hemos visto que la delta de Dirac es una distribución singular y por tanto, no coincide con ninguna función localmente integrable.

También hemos visto que la delta es la derivada distribucional de la función de Heaviside. Esto nos permite interpretar, desde un punto de vista físico y si consideramos $\delta = \delta(t)$ dependiendo de una variable temporal t , esta distribución como *un impulso instantáneo* impartido a un sistema. Piénsese, por ejemplo, en una campana que está sonando. Aunque en cada toque se produce una interacción que ocurre en un instante de tiempo infinitesimal, lo que en realidad nosotros oímos es: **Bang!**- en un instante.

Si miramos $\delta = \delta(x)$ dependiendo de una variable espacial x , podemos interpretar físicamente la δ como una unidad de masa (o de carga) situada en la posición $x = 0$. Piénsese, por ejemplo, en una masa puntual que cuelga de una viga o en una carga eléctrica situada en una determinada posición.

Por otra parte, ya hemos mencionado al inicio de este capítulo que en sus orígenes la δ era interpretada como una función que vale cero en todos sus puntos salvo en cero donde toma el valor ∞ y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Desde un punto de vista matemático esta definición no tiene ningún sentido: una función que es nula casi por todas partes tiene integral nula.

Sin embargo, podemos justificar lo que los físicos de la época tenían en mente del siguiente modo: consideremos la sucesión de **funciones de Breit-Wigner** definida como

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

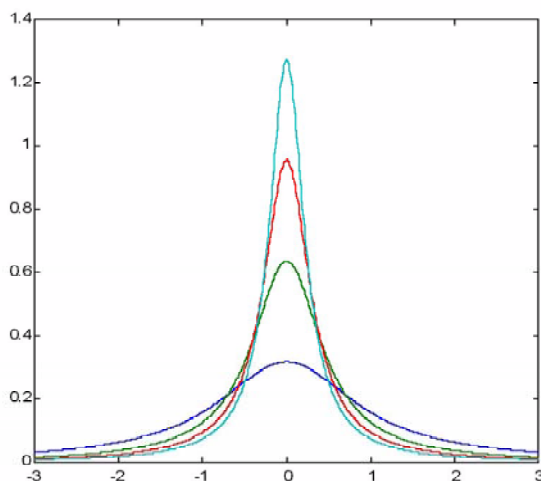


Figura 2.3: Funciones de Breit-Wigner $n = 1, 2, 3, 4$

Se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Además, no es difícil comprobar que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

es decir, la sucesión de funciones de Breit-Wigner *converge débilmente* a la distribución δ .

2.5 Sobre el Concepto de Solución de una EDP

En la sección precedente acabamos de ver que la δ de Dirac representa físicamente un impulso instantáneo, una masa puntual o una unidad de carga eléctrica situadas en una determinada posición. Así por ejemplo, si queremos estudiar el efecto de una masa puntual sobre una cuerda elástica hemos de resolver la ecuación

$$-(\tau u')' = \delta.$$

De igual modo, si queremos calcular el potencial electrostático u , generado por una única carga situada en cierta posición x_0 hemos de resolver la ecuación

$$-\Delta u = q\delta_{x_0}$$

con q constante.

Obviamente las ecuaciones anteriores no entran dentro de la teoría clásica de EDPs. Recuerdese que δ es una distribución singular y por tanto, no tiene sentido alguno buscar soluciones clásicas de las ecuaciones anteriores. Hemos de buscar *distribuciones* que satisfagan dichas ecuaciones. Aparece entonces el concepto de **solución distribucional** de una EDP. Además, no es necesario colocar una δ en una EDP para que no existan soluciones clásicas de dicha ecuación. Si los datos del problema no tienen suficiente *regularidad* o si los coeficientes del operador diferencial que aparecen en la ecuación no son *regulares* o bien si el dominio donde se estudia la ecuación no es *regular*, en general, no existen soluciones clásicas de dichas EDPs. Sin embargo, se pueden introducir diferentes conceptos de solución, entre ellos, el de solución débil, que introduciremos en el próximo capítulo y que será el que utilizaremos en el MEF.

Capítulo 3

Espacios de Sobolev. Formulación Variacional Abstracta de los Problemas de Contorno Elípticos

En este capítulo introduciremos los espacios de Sobolev, los cuales juegan un papel esencial en el MEF. Pese a que estos espacios se pueden introducir directamente en \mathbb{R}^n , en mi opinión resulta más pedagógico distinguir entre los casos $n = 1$ y $n > 1$. Además existe una diferencia importante en lo referente a la regularidad de las funciones que pertenecen a estos espacios según se considere $n = 1$ ó $n > 1$. A continuación estudiaremos uno de los teoremas más clásicos e importantes dentro de la teoría variacional de los problemas elípticos: el Teorema de Lax-Milgram. Finalmente aplicaremos toda la teoría desarrollada en las secciones anteriores al estudio de la existencia, unicidad, regularidad y estabilidad de las soluciones débiles de algunos problemas de tipo elíptico.

3.1 Espacios de Sobolev en Dimensión 1

A lo largo de este capítulo por $I =]a, b[$ denotaremos un intervalo acotado de la recta real. Por $L^2(I; \mathbb{R})$ denotaremos al espacio de las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de cuadrado integrable, esto es,

$$L^2(I; \mathbb{R}) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible: } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

equipado con el producto interior

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

del cual deriva la norma

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Recordemos que $(L^2(I; \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ es un espacio de Hilbert.

Definición 3.1.1 *Dado un número natural m , se llama **espacio de Sobolev de orden m sobre I al espacio***

$$H^m(I; \mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(I; \mathbb{R}) : u', u'', \dots, u^{(m)} \in L^2 \right\}$$

donde las derivadas anteriores se entienden en el sentido de las distribuciones.

El espacio H^m equipado con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} + \cdots + \langle u^{(m)}, v^{(m)} \rangle_{L^2} \quad (u, v \in H^m)$$

del cual deriva la norma

$$\|u\|_{H^m} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} + \cdots + \|u^{(m)}\|_{L^2}$$

es también un espacio de Hilbert.

Es inmediato comprobar que toda función $u \in C^m(\bar{I})$ pertenece al espacio $H^m(I)$. En particular, se tiene que $\mathcal{D}(I) \subset H^m(I)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definición 3.1.2 *La clausura, respecto de la norma de $H^m(I)$, del espacio $\mathcal{D}(I)$ se denota por $H_0^m(I)$.*

Por supuesto, $H_0^m(I)$ con la norma que hereda de $H^m(I)$ es un espacio de Hilbert.

Un primer resultado importante de la teoría de espacios de Sobolev en dimensión 1 nos dice que toda función de $H^1(I)$ es continua. Esto nos permitirá dar sentido al valor en la frontera de una función de $H^1(I)$.

Proposición 3.1.1 *Sea $u \in H^1(I)$. Entonces existe una función continua \bar{u} tal que $\bar{u}(x) = u(x)$ c.t.p. $x \in I$.*

De esta forma tenemos la inclusión $H^1(I) \subset C(I)$. En general, también se verifica que $H^m(I) \subset C^{m-1}(I)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Recogemos a continuación los principales resultados de la teoría de espacios de Sobolev en dimensión 1.

Teorema 3.1.1 (Densidad) *Sea $u \in H^m(I)$. Entonces existe una sucesión de funciones $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \rightarrow u$ en $H^m(I)$.*

El resultado que sigue es de gran importancia para estimar la regularidad de la solución débil de los problemas de contorno unidimensionales.

Teorema 3.1.2 (Rellic-Kondrachov) *Supongamos que I es acotado. Entonces:*

(i) $H^1(I) \subset L^\infty(I)$, con inyección continua.

(ii) $H^1(I) \subset C(\bar{I})$, con inyección compacta.

(iii) $H^1(I) \subset L^2(I)$, con inyección compacta.

Corolario 3.1.3 (Fórmula de Integración por Partes) *Sean $u, v \in H^1(I)$. Entonces $uv \in H^1(I)$. Además,*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Como consecuencia

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'.$$

Corolario 3.1.4 (Derivación de una composición) *Sean $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $u \in H^1(I)$. Entonces*

$$G \circ u \in H^1(I) \quad y \quad (G \circ u)' = (G' \circ u) u'.$$

Proposición 3.1.2 (Desigualdad de Poincaré) *Supongamos que I es acotado. Entonces existe una constante $C > 0$ (que depende de $|I|$) tal que*

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Demostración. Dado que $\|u\|_{H_0^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}$, únicamente debemos probar que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C_1 \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Como $u \in H_0^1(I)$, $u(a) = u(b) = 0$ y por tanto, para cada $a < x < b$ se tiene que

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt.$$

De manera inmediata se tiene la estimación

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'(t)| dt \leq \int_a^b |u'(t)| dt \leq \|u'\|_{L^2} (b-a)^{1/2}$$

de donde se deduce que

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \int_a^b \|u'\|_{L^2}^2 (b-a) dt = \|u'\|_{L^2}^2 (b-a)^2.$$

■

3.2 Espacios de Sobolev en Dimensión $n > 1$

A lo largo de esta sección, Ω denotará un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $m \in \mathbb{N}$.

Definición 3.2.1 *Denotaremos por $H^m(\Omega)$ al espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ cuyas derivadas parciales (en el sentido de las distribuciones) hasta orden m pertenezcan a L^2 , esto es,*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

El espacio $H^m(\Omega)$ dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2}$$

del cual deriva la norma

$$\|u\|_{H^m} = \|u\|_{L^2} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert.

Obviamente, $C^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

En la resolución de problemas de contorno nos será especialmente útil el espacio

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m}$$

es decir, la clausura, respecto de la norma de H^m , del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$. Dicho espacio, con la norma que hereda de H^m , es también un espacio de Hilbert.

La diferencia esencial entre los espacios de Sobolev en dimensión 1 y los espacios de Sobolev en dimensión $n > 1$ radica en que *las funciones de $H^1(\Omega)$ no son, en general, continuas!*. Este hecho hace que al estudiar un problema de Dirichlet en dimensión $n > 1$ y busquemos una solución $u \in H^1(\Omega)$ no sepamos qué sentido tiene decir que $u = 0$ en la frontera de Ω ya que $\Gamma = \partial\Omega$ tiene medida cero y dos funciones de $H^1(\Omega)$ son iguales si lo son salvo en un conjunto de medida cero. De alguna forma es preciso que adjudiquemos algún valor sobre la frontera a cada una de las funciones del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Este valor es conocido como la **traza** y para poder definirla y hablar de su existencia necesitamos algunas definiciones y notaciones previas.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ escribiremos $x = (x', x_n)$ con $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y denotaremos

$$\|x'\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Además, se denotan

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^n &= \{x = (x', x_n) : x_n > 0\} \\ Q &= \{x = (x', x_n) : \|x'\| < 1 \text{ y } |x_n| < 1\} \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}_+^n \\ Q_0 &= \{x = (x', x_n) : \|x'\| < 1 \text{ y } x_n = 0\} \end{aligned}$$

Definición 3.2.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Se dice que su frontera Γ es de clase C^m ($m \in \mathbb{N}$) si para todo punto $x \in \Gamma$ existe un entorno U de $x \in \mathbb{R}^n$ y una aplicación biyectiva $F : Q \rightarrow U$ tal que

$$F \in C^m(\overline{Q}) \quad , \quad F^{-1} \in C^m(\overline{U}) \quad , \quad F(Q_+) = U \cap \Omega \quad \text{y} \quad F(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Teorema 3.2.1 (Densidad) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 . Entonces el conjunto

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\phi|_{\Omega} : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

es denso en $H^1(\Omega)$, respecto de la norma de este último espacio.

Ya estamos en condiciones de poder enunciar uno de los resultados más importantes en la teoría de espacios de Sobolev: el teorema de la traza.

Teorema 3.2.2 (Teorema de la Traza) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 . Existe un único operador lineal y continuo

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

tal que si $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, entonces $\gamma(u) = u|_{\Gamma}$.

Si $u \in H^1(\Omega)$, el espacio

$$\text{Im } \gamma = \{v \in L^2(\Gamma) : \text{existe } u \in H^1(\Omega) \text{ con } \gamma(u) = v\}$$

se denota por $H^{1/2}(\Gamma)$. Se puede demostrar que $H^{1/2}(\Gamma)$ es denso en $L^2(\Gamma)$ y que $\text{Ker } \gamma = H_0^1(\Omega)$.

Teorema 3.2.3 (Fórmula de Integración por Partes) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 y sean $u, v \in H^1(\Omega)$. Entonces

$$\int_{\Omega} v(x) \partial_j u(x) \, dx = \int_{\Gamma} \gamma(u) \gamma(v) n_j \, d\sigma - \int_{\Omega} u(x) \partial_j v(x) \, dx.$$

donde $\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$ denota al vector normal unitario exterior a Γ .

Teorema 3.2.4 (Rellic-Kondrachov) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 . Entonces la inclusión $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta.

Nota 3.2.1 Recordemos que un operador acotado se dice compacto si transforma conjuntos acotados en relativamente compactos. Sin embargo, la forma en que usaremos el teorema de Rellic-Kondrachov será la siguiente: dada una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ acotada para la norma de $H^1(\Omega)$, el teorema anterior nos asegura que existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge en $L^2(\Omega)$ a una determinada función $u \in L^2(\Omega)$.

Teorema 3.2.5

(i) **(Desigualdad de Poincaré)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

(ii) **(Desigualdad de Poincaré)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 . Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \left| \int_{\Omega} u \right|^2 \right)^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (3.1)$$

(iii) **(Desigualdad de Friedrichs)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 y sea $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tal que $m(\Gamma_0) > 0$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \int_{\Gamma_0} |u|^2 \right)^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(iv) Sea $E \subset \Omega$ un conjunto medible Lebesgue y de medida estrictamente positiva. Supongamos también que la frontera de Ω es de clase C^1 . Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \int_E |u|^2 \right)^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (3.2)$$

Demostración. La demostración de (i) es similar al caso unidimensional. Demostraremos (ii) para ilustrar como se aplica el teorema de Rellic-Kondrachov. Es suficiente con probar (3.1) para $\|u\|_{H^1} = 1$. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in H^1(\Omega)$, $\|u_m\|_{H^1} = 1$ y tal que

$$\|u_m\|_{H^1} > m \left[\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u_m|^2 + \left| \int_{\Omega} u_m \right|^2 \right]^{1/2}.$$

Por tanto

$$\int_{\Omega} |\partial_i u_m|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} u_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Por otra parte, dado que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $H^1(\Omega)$, por el teorema de Rellic-Kondrachov existe $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$, subsucesión de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, la cual converge en $L^2(\Omega)$ a cierta función $u \in L^2(\Omega)$. Obviamente

$$\int_{\Omega} |\partial_i u_{m_k}|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} u_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

y por tanto $u \in H^1(\Omega)$ y $\partial_i u = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$. Es decir, $u = cte$.

Como Ω es acotado, $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ con inclusión continua (desigualdad de Cauchy-Schwartz) y por tanto

$$m(\Omega) cte = \int_{\Omega} u = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{m_k} = 0$$

lo que implica que $u = cte = 0$ lo cual es un absurdo ya que $\|u\|_{L^2} = 1$.

La demostración de (iii) es similar a la de (ii). ■

Nota 3.2.2 En la mayoría de resultados anteriores hemos supuesto que Ω era un abierto con frontera de clase C^1 . Todos estos resultados son también válidos con exigir tan sólo que $\Gamma = \partial\Omega$ sea de clase C^1 a trozos e incluso si $\Gamma \in C^{0,1}$ (para los detalles ver Casas).

3.3 Formulación Variacional Abstracta: El Teorema de Lax-Milgram

En esta sección introduciremos los elementos de espacios de Hilbert que necesitamos para estudiar los problemas de contorno elípticos.

Definición 3.3.1 Sea (H, \langle, \rangle) un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal.

(i) Se dice que a es **continua** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

(ii) Se dice que a es **coerciva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

(iii) Se dice que a es **simétrica** si

$$a(x, y) = a(y, x) \quad \forall x, y \in H.$$

Definición 3.3.2 Sea (H, \langle, \rangle) un espacio de Hilbert y $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal. Se dice que L es continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|L(x)| \leq C \|x\| \quad \forall x \in H.$$

Ejemplo 3.3.1 Un ejemplo sencillo de forma bilineal continua, coerciva y simétrica es el siguiente:

$$\begin{aligned} a : H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightsquigarrow a(u, v) = \int_0^l pu'v' + \int_0^l quv \end{aligned}$$

donde $p \in C^1([0, l]; \mathbb{R})$ tal que $p(x) \geq \alpha > 0 \forall x \in [0, l]$ y $q \in C([0, l]; \mathbb{R})$ tal que $q(x) \geq 0 \forall x \in [0, l]$. La bilinealidad de a es consecuencia de la linealidad de la integral. La continuidad de a se debe a la desigualdad de Cauchy-Schwartz pues

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^l |pu'v'| + \int_0^l |quv| \\ &\leq M_p \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + M_q \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (M_p + M_q) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

donde $M_p = \max\{p(x) : 0 \leq x \leq l\}$ y $M_q = \max\{q(x) : 0 \leq x \leq l\}$.

La coercividad de a es consecuencia de la desigualdad de Poincaré ya que

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^l p(u')^2 + \int_0^l qu^2 \geq \alpha \int_0^l (u')^2 \\ &= \alpha \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{\alpha}{C} \|u\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

El carácter simétrico de a es obvio.

Ejemplo 3.3.2 Un ejemplo sencillo de forma lineal continua es el siguiente:

$$\begin{aligned} L : H_0^1(0, l) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightsquigarrow L(u) = \int_0^l fv \end{aligned}$$

fijada $f \in L^2(0, l)$. La continuidad de L es consecuencia inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Nota 3.3.1 Nótese la relación entre la forma bilineal a y la forma lineal L con la formulación variacional o débil del problema de contorno

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{en }]0, l[\\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

A lo largo de este curso veremos que una gran mayoría de problemas de contorno para EDPs de tipo elíptico se pueden formular de la siguiente manera general abstracta.

Definición 3.3.3 Dados un espacio de Hilbert H , una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre H y una forma lineal también sobre H , llamaremos **problema variacional abstracto** al problema de encontrar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \quad (3.3)$$

El estudio teórico del problema anterior se lleva a cabo a través de varios teoremas de representación en espacios de Hilbert de los cuales, quizás el más representativo es el Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 3.3.1 (Lax-Milgram) Sean H un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal sobre H continua y coerciva, y L una forma lineal sobre H continua. Entonces el problema variacional abstracto (3.3) tiene una única solución. Si además $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces la única solución $u \in H$ del problema (3.3) es la que minimiza el funcional de energía

$$\begin{aligned} J: H &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightsquigarrow J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \end{aligned}$$

3.4 Aplicación a los Problemas de Contorno

En esta sección veremos como la teoría variacional abstracta desarrollada en la sección anterior así como la teoría de espacios de Sobolev expuesta en las dos primeras secciones de este capítulo se aplica para resolver problemas concretos de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales.

3.4.1 El Caso Unidimensional

Consideremos el siguiente problema unidimensional

$$(S-L) \begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{en }]0, l[\\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

donde

$$p \in C^1([0, l]; \mathbb{R}), \quad p(x) \geq \alpha > 0,$$

$$q \in C([0, l]; \mathbb{R}), \quad q(x) \geq 0,$$

y $f \in C([0, l]; \mathbb{R})$.

Introducimos a continuación diferentes nociones de solución del problema (S-L). Se dice que $u : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ es una **solución clásica** de (S-L) si $u \in C^2(]0, l[) \cap C([0, l])$ que satisface la ecuación $-(pu')' + qu = f$ en todo punto de $]0, l[$ y las condiciones de contorno $u(0) = u(l) = 0$.

Con la teoría de distribuciones en la mano podemos definir lo que sería una **solución distribucional** o H^2 -solución de (S-L). Fijada $f \in L^2(0, l)$ se dice que $u : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ es una H^2 -solución de (S-L) si $u \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$ y si u satisface la ecuación $-(pu')' + qu = f$ en el sentido de las distribuciones.

Finalmente, razonando como lo hicimos en la Sección 1.3 se introduce el concepto de solución débil: fijada $f \in L^2(0, l)$, se dice que $u : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ es una **solución débil** de (S-L) si $u \in H_0^1(0, l)$ y si

$$\int_0^l pu'v' + \int_0^l quv = \int_0^l f v \quad \forall v \in H_0^1(0, l). \quad (3.4)$$

Es inmediato comprobar que se tiene el siguiente diagrama:

$$\text{solución clásica} \Rightarrow H^2\text{-solución} \Rightarrow \text{solución débil}.$$

Más adelante veremos que las inclusiones contrarias también se verifican en este problema unidimensional. De momento nos ocuparemos de probar la existencia y unicidad de solución débil. Para ello consideremos la forma bilineal

$$\begin{aligned} a: H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightsquigarrow a(u, v) = \int_0^l pu'v' + \int_0^l quv \end{aligned}$$

y la forma lineal

$$\begin{aligned} L : H_0^1(0, l) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightsquigarrow L(v) = \int_0^l f v \end{aligned}$$

En el Ejemplo 3.3.1 probamos que a es continua y coerciva, y en el Ejemplo 3.3.2 que L es continua. Del Teorema de Lax-Milgram se deduce inmediatamente la existencia y unicidad de solución débil del problema (S-L). Además, como en este caso a es simétrica, dicha solución débil u se obtiene como

$$u = \min_{v \in H_0^1} \left\{ J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_0^l p(v')^2 + \int_0^l qv^2 \right) - \int_0^l f v \right\}.$$

También se tiene que u es estable ya que al ser a coerciva,

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$$

y por otra parte

$$a(u, u) = \int_0^l f u \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1}$$

con lo cual

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2}.$$

Abordaremos finalmente una de las cuestiones más complicadas en el estudio variacional de los problemas de contorno: *la regularidad de la solución débil*. Como acabamos de ver, el Teorema de Lax-Milgram proporciona una forma muy elegante de obtener existencia y unicidad de solución débil. Pero la pregunta que se plantea ahora es: ¿cuánto de regular es dicha solución? o planteado desde un punto de vista más matemático

$$\text{¿solución débil} \Rightarrow H^2\text{-solución} \Rightarrow \text{solución clásica?}$$

Como veremos más adelante, necesitamos este tipo de regularidad para obtener buenas cotas del error en el MEF.

Proposición 3.4.1 *Solución débil $\Rightarrow H^2$ -solución.*

Demostración. Sean $u \in H_0^1$ la solución débil de (S-L) y $\phi \in \mathcal{D}(I)$. Entonces

$$\begin{aligned} &\langle (pu')', \phi \rangle = - \langle pu', \phi' \rangle = - \int_0^l pu' \phi' \\ &= \int_0^l qu\phi - \int_0^l f\phi = \langle qu - f, \phi \rangle \end{aligned}$$

con lo cual $(pu')' = qu - f$ en el sentido de las distribuciones.

Veamos ahora que $u \in H^2(0, l)$. Como $p \in C^1(0, l)$ y $u \in H_0^1$, entonces $pu' \in L^2$. Además, como $(pu')' = qu - f \in L^2$ se tiene que $pu' \in H^1$. Finalmente, como $p(x) \geq \alpha > 0$, $\frac{1}{p} \in C^1([0, l]) \subset H^1$. Por tanto,

$$u' = \frac{1}{p} pu' \in H^1,$$

es decir, $u \in H^2(0, l)$. ■

Proposición 3.4.2 *H^2 -solución \Rightarrow solución clásica.*

Demostración. Pongamos $f \in C([0, l]; \mathbb{R})$. Acabamos de ver en la proposición anterior que $u \in H^2(0, l)$. Como consecuencia del apartado (ii) del Teorema 3.1.2 se tiene que $u \in C^1([0, l])$.

Por otra parte, como $(pu')' = qu - f \in C([0, l])$, entonces $pu' \in C^1([0, l])$ y por tanto

$$u' = \frac{1}{p}pu' \in C^1$$

lo que implica que $u \in C^2$. ■

3.4.2 El Problema de Dirichlet para el Laplaciano

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El **problema de Dirichlet** homogéneo para el operador de Laplace consiste en hallar una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$(PD) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua dada.

Se llama **solución clásica** de (PD) a toda función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y que satisfaga (PD). Un resultado de existencia y unicidad de solución clásica para este problema se obtiene bajo las hipótesis de ser $f \in C^1(\overline{\Omega})$ y Γ de clase C^2 .

Al igual que en el caso unidimensional, se dice que u es una **solución distribucional** o H^2 -solución de (PD) si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y si u satisface la ecuación $-\Delta u = f$ en el sentido de las distribuciones.

Para obtener la formulación variacional de este problema procedemos como en el caso unidimensional. Supongamos que u es una solución clásica de (PD), que $v \in H_0^1(\Omega)$ y que $f \in L^2(\Omega)$. Si multiplicamos la ecuación $-\Delta u = f$ por v e integramos por partes (Teorema 3.2.3),

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

ya que $\gamma(u) = \gamma(v) = 0$ por ser $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Fijada $f \in L^2(\Omega)$, a toda función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

se le llama **solución débil** del problema (PD).

Al igual que en el caso unidimensional, no es difícil comprobar que

$$\text{solución clásica} \Rightarrow H^2\text{-solución} \Rightarrow \text{solución débil.}$$

La existencia, unicidad y estabilidad de solución débil se obtienen como consecuencia del teorema de Lax-Milgram considerando la forma bilineal

$$a : \begin{array}{l} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \quad \quad \quad \rightsquigarrow a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \end{array}$$

la cual es continua, coerciva y simétrica, y la forma lineal

$$L : \begin{array}{l} H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \quad \quad \quad \rightsquigarrow L(v) = \int_{\Omega} f v \end{array}$$

la cual es continua.

La cuestión complicada es la referente a la regularidad de la solución débil. La respuesta a esta cuestión viene dada en el siguiente:

Teorema 3.4.1 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^2 y $f \in L^2(\Omega)$. Entonces la solución débil del problema de Dirichlet anterior es una H^2 -solución. Si $\Gamma = \partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces $u \in H^{m+2}$. En particular, si $m > n/2$, entonces u es solución clásica.

3.4.3 Un Problema de Neumann

En esta sección complicaremos un poco más la situación: consideraremos un operador elíptico más general que el Laplaciano y pondremos una condición de frontera Neumann no homogénea.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera Γ de clase C^1 a trozos. Consideremos el operador

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + cu$$

donde $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ tales que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \forall x \in \overline{\Omega}$, y $c \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ tal que $c(x) \geq 0 \forall x \in \overline{\Omega}$ pero que no se da la igualdad c.t.p.. Supondremos además que el operador es **fuertemente uniformemente elíptico** lo que significa que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ y } \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Denotemos por

$$D_{\eta_L} u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u n_j$$

donde $\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$ denota el vector normal unitario exterior a $\Gamma = \partial\Omega$.

Fijadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$, el problema de Neumann no homogéneo para el operador L consiste en encontrar una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea solución del problema

$$(PN) \begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ D_{\eta_L} u = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Por H^2 -solución del problema (PN) se entiende una función $u \in H^2(\Omega)$ tal que $Lu = f$ en el sentido de las distribuciones y que además la traza de $D_{\eta_L} u$ coincida con g . Si u es una H^2 -solución del problema (PN) y si $v \in H^1(\Omega)$, entonces, multiplicando la ecuación $Lu = f$ por v e integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Lu) v \\ &= \int_{\Omega} - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij} \partial_i u) v + \int_{\Omega} cuv \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Gamma} a_{ij} \gamma(\partial_i u) n_j \gamma(v) d\sigma + \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \partial_j v dx \right] + \int_{\Omega} cuv dx \\ &= \int_{\Omega} fv dx \end{aligned}$$

e imponiendo la condición de contorno,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} fv - \int_{\Gamma} g\gamma(v)$$

donde

$$\begin{aligned} a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightsquigarrow a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \partial_j v + \int_{\Omega} c u v \end{aligned}$$

Llamaremos **solución débil** de (PN) a toda función $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

donde

$$\begin{aligned} L : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightsquigarrow L(v) = \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma} g \gamma(v) \end{aligned}$$

Para demostrar la existencia y unicidad de solución débil del problema (PN) utilizaremos una vez más el teorema de Lax-Milgram. Para ello hemos de probar que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva y que L es continua.

- Continuidad de L : por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y por el teorema de la traza se tiene que

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

- Continuidad de $a(\cdot, \cdot)$: dado que las funciones a_{ij}, c son acotadas por ser continuas en $\overline{\Omega}$, existen constantes $M_{ij}, C > 0$ tales que

$$|a_{ij}(x)| \leq M_{ij} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad |c(x)| \leq C \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene ahora que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_j v\|_{L^2(\Omega)} + C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donde $M = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} + C$.

- Coercividad de $a(\cdot, \cdot)$: debido a la condición de elipticidad del operador L se tiene que

$$a(u, u) \geq \alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \int_{\Omega} c u^2.$$

Como además, la medida de Lebesgue del conjunto

$$C = \{x \in \Omega : c(x) > 0\}$$

es estrictamente positiva, si escribimos

$$C = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in \Omega : c(x) > \frac{1}{m} \right\}$$

entonces existirá un $C_m = \{x \in \Omega : c(x) > \frac{1}{m}\}$ con medida de Lebesgue estrictamente positiva. Por tanto,

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \int_{\Omega} cu^2 \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \frac{1}{m} \int_{C_m} u^2 \\ &\geq \min \left\{ \alpha, \frac{1}{m} \right\} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 + \int_{C_m} u^2 \\ &\geq C \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

la última desigualdad siendo consecuencia de (3.2).

La estabilidad de la solución débil es otra vez consecuencia de la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$. ¿Por qué?

3.4.4 Un Problema en Teoría de Lubricación Sin Solución Clásica

En esta sección estudiaremos un problema que surge en la Teoría de la Lubricación Hidrodinámica y que carece de solución clásica. El problema consiste en estudiar la fricción de lubricación entre un sólido rígido y una superficie regular en movimiento colocando un fluido para separar ambas regiones y que actúa de lubricador. Este tipo de problemas aparecen frecuentemente en algunas aplicaciones de ingeniería como pueden ser las cajas de alimentación en motores.

Consideremos la superficie $z = 0$ moviéndose a velocidad constante $(U_0, V_0, 0)$. Sea $h = h(x, y, z)$ la función que nos mide la separación entre la superficie $z = 0$ y el sólido situado sobre ella (o más bien sobre el fluido que separa ambas regiones). Supondremos además, por simplicidad, que se trata de un fluido incompresible de densidad constante ρ . Estamos interesados en conocer la velocidad del fluido $\mathbf{u} = (u, v, \omega)$ y su presión P . Partiendo del sistema de Stokes (o más genéricamente de las ecuaciones de Navier-Stokes) y haciendo un análisis dimensional se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} -P_x + \mu u_{zz} &= 0 && \text{en la componente } x \\ -P_y + \mu v_{zz} &= 0 && \text{en la componente } y \\ -P_z &= 0 && \text{en la componente } z \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tenemos además las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u = v = \omega &= 0 && \text{en } z = h \\ u - U_0 = v - V_0 = \omega &= 0 && \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

Si integramos ahora en (3.6) y tenemos en cuenta las condiciones de contorno anteriores se obtiene que

$$u = \frac{1}{2\mu} P_x z(z - h) + U_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right),$$

$$v = \frac{1}{2\mu} P_y z(z - h) + V_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

Por tanto, el caudal del fluido viene dado por

$$q_1 = \int_0^h u(x, y, z) dz = \frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_x,$$

$$q_2 = \int_0^h v(x, y, z) dz = \frac{V_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_y$$

Recordemos que como se trata de un fluido incompresible,

$$u_x + v_y + \omega_z = 0,$$

pero como $\omega_z \ll u_x + v_y$ esta ecuación queda reducida a

$$u_x + v_y = 0$$

e integrando en esta ecuación con respecto a z entre 0 y h llegamos al problema

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_x \right)_x + \left(\frac{V_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_y \right)_y = 0 & \text{en } \Omega \\ P = P_0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω representa la región del plano $z = 0$ situado bajo el solido en cuestión. Con el cambio $p = P - P_0$, es problema anterior se escribe como

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} p_x \right)_x + \left(\frac{V_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} p_y \right)_y = 0 & \text{en } \Omega \\ p = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

que es el problema que estudiaremos a continuación.

Razonando como lo hemos hecho a lo largo de este curso se introduce el concepto de solución débil para el problema (3.7).

Definición 3.4.1 *Se dice que la función $p \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema (3.7) si*

$$\int_{\Omega} \frac{h^3}{12\mu} \langle \nabla p, \nabla \phi \rangle = \int_{\Omega} \frac{h}{2} \langle (U_0, V_0), \nabla \phi \rangle \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 3.4.2 *Supongamos que la función $h \in L^\infty(\Omega)$ y que $h(x) \geq h_0 > 0$ c.t.p. en Ω . Entonces el problema (3.7) tiene una única solución débil. Además, esta solución depende continuamente de los datos iniciales (U_0, V_0) .*

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de aplicar el Teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal

$$\begin{aligned} a : H_0^1 \times H_0^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, \phi) &\rightsquigarrow a(p, \phi) = \int_{\Omega} \frac{h^3}{12\mu} \langle \nabla p, \nabla \phi \rangle \end{aligned}$$

(la cual es continua, coerciva y simétrica) y a la forma lineal

$$\begin{aligned} L : H_0^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\rightsquigarrow L(\phi) = \int_{\Omega} \frac{h}{2} \langle (U_0, V_0), \nabla \phi \rangle \end{aligned}$$

la cual es continua. ■

Veremos ahora que el problema (3.7) no tiene solución clásica. Para ello consideraremos la versión unidimensional de dicho problema, es decir, supondremos que $\Omega =]0, L[$.

Proposición 3.4.3 *Sea $\Omega =]0, L[$ y*

$$h(x) = \begin{cases} h_0 & \text{si } x \in]0, L/2[\\ h_1 & \text{si } x \in]L/2, L[\end{cases}$$

Entonces el problema (3.7) no tiene solución clásica.

Demostración. En este caso unidimensional, el problema (3.7) se escribe como

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_x \right)_x = 0 & \text{en } \Omega \\ P = P_0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

y su solución se puede calcular de manera explícita obteniéndose

$$P(x) = \begin{cases} -6\mu \frac{2k+U_0 h}{h_0^3} x + P_0 & \text{si } x \in]0, L/2[\\ 6\mu \frac{-2k+U_0 h_1}{h_1^3} (L-x) + P_0 & \text{si } x \in]L/2, L[\end{cases}$$

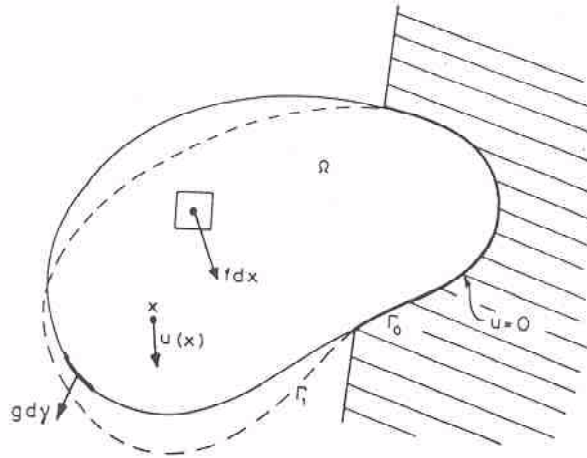
donde la constante k vale

$$k = \frac{LU_0}{4} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \left(\frac{1}{h_0^3} - \frac{1}{h_1^3} \right)^{-1}.$$

Es inmediato comprobar que $P \notin C^1$. ■

3.4.5 Análisis Matemático del Sistema de Elasticidad Lineal

En esta sección nos ocuparemos del análisis matemático del sistema de elasticidad lineal. De manera precisa, supongamos que tenemos un sólido elástico, homogéneo, isótropo y que en su estado natural ocupa una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Supondremos además que el sólido está sujeto en una parte de su frontera, llamémosla Γ_0 , y que sobre el resto de la frontera, Γ_1 , actúa una densidad de fuerzas superficiales $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$. También tendremos en cuenta la acción sobre el sólido de una densidad de fuerzas volúmicas $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$.



El modelo matemático clásico para este problema es el siguiente: sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y conexo de frontera $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de clase C^1 a trozos, de forma que $m(\Gamma_0) > 0$, donde $m(\Gamma_0)$ denota la medida superficial de Γ_0 . Dadas $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3) : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funciones continuas, se trata de encontrar una función $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq 3$, y de forma que para cada $1 \leq i \leq 3$ se cumpla,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) + f_i = 0 & \text{en } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j = g_i & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (\text{SEL})$$

donde

$$\sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) = \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

con $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, y $\vec{\mathbf{n}} = (n_j)$ es el vector normal unitario exterior a Γ_1 . La función vectorial $\vec{\mathbf{u}}$ nos mide los desplazamientos que sufren cada uno de los puntos de Ω , y en caso de verificar las condiciones anteriores se denomina una **solución clásica** del sistema de elasticidad lineal.

En general, **el problema (SEL) no tiene solución clásica**. Es necesario exigir mayores condiciones de regularidad sobre los datos del problema, esto es, sobre Ω , Γ_0 , Γ_1 , $\vec{\mathbf{f}}$ y $\vec{\mathbf{g}}$ para poder garantizar la existencia de solución clásica. Dicho de un modo un tanto informal, lo que está sucediendo es que el conjunto de desplazamientos admisibles (en nuestro caso, $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$) es muy pequeño. Lo que se suele hacer para solventar esta dificultad es ampliar el conjunto de desplazamientos admisibles, o dicho de otro modo, modificar el concepto de solución para el problema (SEL) de forma que funciones no tan regulares como las que están en $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ puedan ser solución de (SEL). Se llega entonces al concepto de solución débil, del cual nos ocuparemos a continuación.

Para motivar este nuevo concepto de solución procederemos “formalmente” del siguiente modo: sea $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función que se anula sobre Γ_0 . Si $\vec{\mathbf{u}}$ es una solución clásica de (SEL), entonces se tiene que

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) v_i + f_i v_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

e integrando en Ω y aplicando la fórmula de integración por partes (o fórmula de Green),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx &= - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) v_i \, dx \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \, dx - \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) v_i n_j \, dS \right], \end{aligned}$$

ya que $\vec{\mathbf{v}}$ se anula sobre Γ_0 . Teniendo ahora en cuenta la condición de contorno sobre Γ_1 ,

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, dS$$

y sumando para $i = 1, 2, 3$,

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \, dx = \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, dS \right].$$

Como hemos dicho anteriormente, estos cálculos son “formales” lo cual significa que no hemos justificado adecuadamente el uso de la fórmula de Green. Dichos cálculos están plenamente justificados con sólo pedir que

$$\vec{\mathbf{u}} \in (H^2(\Omega))^3 \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{v}} \in V = \left\{ \vec{\mathbf{v}} \in (H^1(\Omega))^3 : \vec{\mathbf{v}}|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

De esta forma conseguimos transformar un problema de EDPs de segundo orden en un problema de primer orden en el que sólo intervienen derivadas parciales primeras de la función incógnita $\vec{\mathbf{u}}$. Por tanto, el espacio de desplazamientos admisibles pasa a ser el espacio V , el cual es estrictamente más grande que el conjunto de soluciones clásicas de (SEL). Todo ello nos lleva a enunciar la siguiente definición.

Definición 3.4.2 Llamaremos *solución débil* de (SEL) a toda función $\vec{\mathbf{u}} \in V$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \, dx = \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, dS \right] \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in V. \quad (3.8)$$

Contrariamente a lo que sucede con el concepto de solución clásica, es posible probar la existencia, unicidad y estabilidad de solución débil. Es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema 3.4.3 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y conexo de frontera $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, de clase C^1 a trozos, de forma que $m(\Gamma_0) > 0$, donde $m(\Gamma_0)$ denota la medida de Γ_0 . Dadas $\vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in (L^2(\Omega))^3$ y $\vec{\mathbf{g}} = (g_1, g_2, g_3) : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \in (L^2(\Gamma_1))^3$, existe una única solución débil $\vec{\mathbf{u}}$ de (SEL). Además dicha solución depende continuamente de los datos iniciales $\vec{\mathbf{f}}$ y $\vec{\mathbf{g}}$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\vec{\mathbf{u}}\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C \left(\|\vec{\mathbf{f}}\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\vec{\mathbf{g}}\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \right).$$

La demostración de este teorema es una rutina para todo aquel que esté familiarizado con el **Método Variacional**. Esbozaremos ahora las ideas principales de la prueba de dicho teorema.

Idea de la demostración del Teorema 3.4.3. Como casi siempre en el Método Variacional, la idea básica es usar el Teorema de Lax-Milgram. En nuestro caso, el espacio de Hilbert sobre el que trabajamos es

$$V = \left\{ \vec{\mathbf{v}} \in (H^1(\Omega))^3 : \vec{\mathbf{v}}|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$$

equipado con el producto interior que hereda de $(H^1(\Omega))^3$. La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ está dada por

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) &\rightsquigarrow a(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{\mathbf{u}}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \, dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

y la forma lineal $L(\cdot)$ se define como

$$\begin{aligned} L : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{\mathbf{v}} &\rightsquigarrow L(\vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, dS \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La continuidad de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. La coercividad no es fácil de probar y su demostración se basa en la siguiente desigualdad conocida como desigualdad de Korn.

Proposición 3.4.4 (Desigualdad de Korn) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera Γ de clase C^1 a trozos. Entonces existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^3 \|\varepsilon_{ij}(\vec{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \geq C \|\vec{\mathbf{v}}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in V.$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en [8]. Gracias a esta desigualdad puede probarse que existe una constante $C_0 > 0$ tal que

$$a(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}) \geq 2\mu C_0 \|\vec{\mathbf{v}}\|_V^2 \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in V,$$

lo que prueba que $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva.

La demostración de la continuidad de $L(\cdot)$ es también consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de la continuidad del operador traza.

Con todo esto se tienen todos los ingredientes necesarios para poder usar el Teorema de Lax-Milgran y deducir así la existencia y unicidad de solución débil del problema (SEL). La dependencia continua de la solución respecto de los datos $\vec{\mathbf{f}}$ y $\vec{\mathbf{g}}$ se deduce inmediatamente de la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$, de la continuidad de $L(\cdot)$ y de nuevo de la continuidad del operador traza, pues gracias a estas propiedades podemos escribir la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{u}}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 &\leq \frac{1}{2\mu C_0} a(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}) = L(\vec{\mathbf{u}}) \\ &\leq C \left(\|\vec{\mathbf{f}}\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\vec{\mathbf{g}}\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \right) \|\vec{\mathbf{u}}\|_{(H^1(\Omega))^3}, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\|\vec{\mathbf{u}}\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C \left(\|\vec{\mathbf{f}}\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\vec{\mathbf{g}}\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \right),$$

como queríamos probar. ■

Aunque a primera vista pueda parecer un tanto artificial el concepto de solución débil para el sistema de elasticidad lineal, sin embargo, dicho concepto también tiene una interpretación física importante. El espacio V representa el espacio de los desplazamientos cinemáticamente admisibles. Si $\vec{\mathbf{v}} \in V$ es un desplazamiento virtual, entonces la forma bilineal dada en (3.9) representa el trabajo de deformación del sólido elástico Ω correspondiente a dicho desplazamiento, mientras que la forma lineal dada en (3.10) representa el trabajo de las fuerzas exteriores. El desplazamiento real $\vec{\mathbf{u}}$ es el desplazamiento cinemáticamente admisible para el que los dos trabajos anteriores son iguales para todo desplazamiento virtual $\vec{\mathbf{v}}$ cinemáticamente admisible. Esta es pues la forma de leer físicamente la Definición 3.4.2.

Por otra parte, si usamos la parte del Teorema de Lax-Milgram que hace referencia a la minimización del funcional de energía, entonces es preciso matizar que el término $\frac{1}{2}a(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}})$ representa físicamente la energía de deformación, mientras que $L(\vec{\mathbf{v}})$ representa la energía potencial de las fuerzas exteriores. El desplazamiento real $\vec{\mathbf{u}}$ es ahora el que minimiza la energía potencial elástica.

Capítulo 4

El Método de los Elementos Finitos

En este capítulo abordamos el problema de la resolución numérica de los problemas de contorno elípticos por medio del Método de los Elementos Finitos. En el capítulo anterior obtuvimos una formulación variacional abstracta de los problemas elípticos. En este capítulo empezaremos por obtener una teoría abstracta de aproximación numérica de dichos problemas. Asimismo estudiaremos algunos problemas concretos. A continuación estudiaremos muy someramente la interpolación de Lagrange en \mathbb{R}^n , lo cual nos proporcionará diferentes posibilidades de elección para los espacios de aproximación que usamos en el MEF. Finalmente veremos algunos resultados sobre el control del error en el MEF.

4.1 Teoría Abstracta de la Aproximación Variacional

Sean $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, y $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Recordemos que en esta situación el teorema de Lax-Milgram nos garantiza que el problema variacional abstracto que consiste en encontrar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H \quad (4.1)$$

tiene una única solución.

El problema que nos planteamos ahora es encontrar una aproximación numérica de dicha solución. Para ello procedemos del siguiente modo general: sea $h > 0$ un número fijo y denotemos por V_h un subespacio vectorial de H de dimensión finita (por tanto, V_h con el producto escalar que hereda de H es también un espacio de Hilbert). Pongamos, por ejemplo, $\dim V_h = N(h)$. Consideremos ahora el problema variacional abstracto en el espacio V_h , es decir, buscamos $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.2)$$

Dado que la restricción de a al subespacio $V_h \times V_h$ sigue siendo una forma bilineal continua y coerciva, y la restricción de L a V_h es una forma lineal continua, de nuevo el teorema de Lax-Milgram nos garantiza la existencia y unicidad de solución para el problema variacional abstracto aproximado (4.2).

El cálculo de u_h se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales. En efecto: sea

$$\{v_h^1, v_h^2, \dots, v_h^{N(h)}\}$$

una base de V_h . Por linealidad, (4.2) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{N(h)} a(v_h^j, v_h^i) u_h^j = L(v_h^i) \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.3)$$

siendo $u = \sum_{j=1}^{N(h)} u_h^j v_h^j$. Si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, la matriz del sistema (4.3) es simétrica. La coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ se traduce en que la matriz del sistema (4.3) es definida positiva.

De esta forma generamos una red $(u_h)_{h>0}$ la cual, si H es separable, converge a la solución u del problema (4.1). Es lo que se deduce del siguiente:

Lema 4.1.1 (Céa) *Existe una constante $C > 0$, que no depende de h , tal que*

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (4.4)$$

Demostración. Como $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

para cualquier $v_h \in V_h$. Teniendo en cuenta que u es la solución de (4.1) y u_h la de (4.2), por linealidad se tiene que

$$a(u - u_h, v_h - u_h) = 0.$$

De la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ se deduce ahora que

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

y por tanto,

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|.$$

Finalmente, tomando ínfimos en la expresión anterior para $v_h \in V_h$ se obtiene (4.4). ■

Corolario 4.1.2 *Supongamos que existe un subespacio W de H denso en H . Supongamos también que para cada $h > 0$ existe una aplicación*

$$r_h : W \rightarrow V_h$$

tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w - r_h(w)\| = 0 \quad \forall w \in W. \quad (4.5)$$

Entonces el método abstracto de aproximación variacional es convergente, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$$

siendo u la solución de (4.1) y u_h la de (4.2).

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo. Como W es denso en H existe $\omega \in W$ tal que $\|u - \omega\| < \varepsilon/2C$, siendo C la constante que aparece en el lema de Céa. Debido a la condición (4.5), para este elemento ω existe un $h(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\omega - r_h(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \forall 0 < h < h(\varepsilon).$$

Del lema de Céa se deduce ahora que

$$\|u - u_h\| \leq C(\|u - \omega\| + \|\omega - r_h(\omega)\|) < \varepsilon \quad \forall 0 < h < h(\varepsilon)$$

lo que concluye la prueba. ■

Concluimos esta sección con el estudio del **método de Galerkin**. Este método puede considerarse como el prepulsor del método de los elementos finitos y juega un papel teórico importante pues las técnicas empleadas en este método son fácilmente extrapolables al estudio de problemas elípticos no lineales. Supongamos que H tiene una base hilbertiana (esto siempre sucede si H es separable). En el método de Galerkin se procede de la siguiente forma: sea

$$V_m = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$$

siendo $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una base de Hilbert de H . Por el teorema de Lax-Milgram sabemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un único $u_m \in V_m$ solución del problema variacional

$$a(u_m, v) = L(v) \quad \forall v \in V_m.$$

A continuación tomamos $h = 1/m$, $V_h = V_m$, $W = H$ y $r_h : H \rightarrow V_h$ la proyección ortogonal de H sobre V_m . Dado que $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de H , es inmediato comprobar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0 \quad \forall v \in H.$$

Del corolario anterior se deduce ahora que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\| = 0.$$

Por tanto, acabamos de probar:

Teorema 4.1.3 (Convergencia del método de Galerkin) *Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces el método de Galerkin descrito anteriormente converge a la única solución de (4.1).*

4.2 Un par de Ejemplos Concretos

El método de los elementos finitos es un método sistemático para construir subespacios de ciertos espacios de Sobolev en los cuales formulamos variacionalmente nuestros problemas de contorno. La idea básica consiste en dividir el dominio Ω donde estudiamos la EDP en subconjuntos que (para fijar ideas trabajaremos en dimensión 2) supondremos son triángulos. Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω , con $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$.

Cuando $h \rightarrow 0$ los triángulos son cada vez más pequeños y de esta forma generamos una fina malla sobre Ω . Pues bien, $V_k^{(h)}$ será un espacio formado por funciones que son polinomios

a trozos subordinados al mallado τ_h . Es decir, fijado un $k \in \mathbb{N}$ por \mathcal{P}_k denotaremos al conjunto de polinomios de 2 variables y grado $\leq k$. Entonces

$$V_k^{(h)} = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_K \in \mathcal{P}_k\}.$$

Por tanto, $V_k^{(h)}$ es de dimensión finita y a medida que $h \rightarrow 0$, $\dim V_k^{(h)} \rightarrow \infty$. Dado que $V_k^{(h)} \subset C(\overline{\Omega})$, si K_1 y K_2 son dos triángulos adyacentes, entonces $v|_{K_1}$ y $v|_{K_2}$ deben satisfacer alguna propiedad de continuidad en su arista común. En general, también habrá que identificar los valores de la derivada de los polinomios en ciertos nodos (todo esto dependerá de como sea el grado de los polinomios que formen los espacios de elementos finitos V_h). A continuación asociamos a cada nodo una función de la base de $V_k^{(h)}$ la cual puede tomar el valor 1 en ese nodo y cero en el resto de grados de libertad. Esta elección tiene la ventaja de que el soporte de cada función de la base es aquellos triángulos que comparten dicho nodo y de esta forma, la matriz del sistema (4.3) será una matriz “hueca”, es decir, con muchos ceros lo que facilitará el cálculo computacional.

Veamos todo esto con detalle en algunos ejemplos concretos.

4.2.1 El Caso Unidimensional

Consideremos de nuevo el problema modelo unidimensional

$$(S-L) \begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{en }]0, l[\\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} p &\in C^1([0, l]; \mathbb{R}), \quad p(x) \geq \alpha > 0, \\ q &\in C([0, l]; \mathbb{R}), \quad q(x) \geq 0, \end{aligned}$$

y $f \in L^2(0, l; \mathbb{R})$.

Por el teorema de Lax-Milgram sabemos que dicho problema tiene una única solución débil, esto es, existe una única función $u \in H_0^1(0, l)$ tal que

$$\int_0^l pu'v' + \int_0^l quv = \int_0^l fv \quad \forall v \in H_0^1(0, l).$$

Veamos como se procede en el MEF para calcular una aproximación numérica de la solución del problema (S-L). Consideremos una partición del intervalo $[0, l]$. Para ello sea $h = \frac{l}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, y escribamos

$$[0, l] = \bigcup_{i=0}^N K_i$$

donde

$$K_i = [c_i, c_{i+1}] \quad , \quad c_i = 0 + ih, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Sea ahora

$$V_h = \{v \in H_0^1(0, l) : v|_{K_i} \in P_1, \quad 0 \leq i \leq N\}$$

donde P_1 denota el espacio de los polinomios de grado ≤ 1 . Como toda función de $H^1(0, l)$ es igual c.t.p. a una función continua y como además toda función continua y de clase C^1 a trozos también está en $H^1(0, l)$, el espacio V_h puede ser caracterizado como:

$$V_h = \{v \in C([0, l]) : v(0) = v(l) = 0 \text{ y } v|_{K_i} \in P_1, \quad 0 \leq i \leq N\}$$

Como ya vimos en el Capítulo 1, V_h es de dimensión finita. De hecho, $\dim V_h = N$ ya que las funciones

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-c_i|}{h} & \text{si } x \in [c_{i-1}, c_{i+1}] \\ 0 & \text{si } x \notin [c_{i-1}, c_{i+1}] \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq N$, llamadas *funciones de forma*, constituyen una base de V_h .

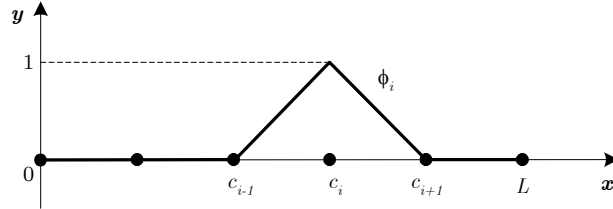


Figura 4.1: Función de forma.

Por tanto, si $u_h \in V_h$ se tiene que

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_h^i \phi_i$$

donde

$$u_h^j = u_h(c_j) \quad \text{ya que} \quad \phi_i(c_j) = \delta_{ij}.$$

Procediendo tal y como hemos indicado en el método de aproximación variacional abstracto, nos planteamos ahora el problema (S-L) en el espacio de dimensión finita V_h , es decir, fijada $f \in L^2(]0, l[)$ buscamos $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_0^l p u_h' v_h' + \int_0^l q u_h v_h = \int_0^l f v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

Otra vez el Teorema de Lax-Migram nos garantiza la existencia de u_h . Además, nótese que para calcular u_h únicamente hemos de resolver un sistema de ecuaciones lineales pues tomando $v_h = \phi_j$ se tiene

$$\sum_{i=1}^N u_h^j \left[\int_0^l p \phi_i' \phi_j' + \int_0^l q \phi_i \phi_j \right] = \int_0^l f \phi_j \quad 1 \leq j \leq N. \tag{4.6}$$

Si denotamos por

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^l p \phi_i' \phi_j' + \int_0^l q \phi_i \phi_j,$$

debido a la forma que tienen las funciones ϕ_i , el sistema (4.6) se escribe en la forma

$$\begin{cases} a(\phi_1, \phi_1) u_h^1 + a(\phi_2, \phi_1) u_h^2 & = \int_0^{c_2} f \phi_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a(\phi_{i-1}, \phi_1) u_h^{i-1} + a(\phi_i, \phi_i) u_h^i + a(\phi_{i+1}, \phi_i) u_h^{i+1} & = \int_{c_{i-1}}^{c_{i+1}} f \phi_i \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a(\phi_{N-1}, \phi_N) u_h^{N-1} + a(\phi_N, \phi_N) u_h^N & = \int_{c_{N-1}}^l f \phi_N \end{cases}$$

Para la resolución del sistema de ecuaciones lineales anterior en las incógnitas $\{u_h^1, \dots, u_h^N\}$ así como para el cálculo de las integrales que aparecen en dicho sistema se pueden aplicar los métodos numéricos clásicos para resolver estos problemas

4.2.2 El Problema de Dirichlet para el Laplaciano en un Rectángulo de \mathbb{R}^2

Sea $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Dada $f \in L^2(\Omega)$ consideremos el problema de Dirichlet homogéneo para el operador de Laplace, esto es,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Ya vimos en el capítulo anterior que el problema variacional consiste en encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde

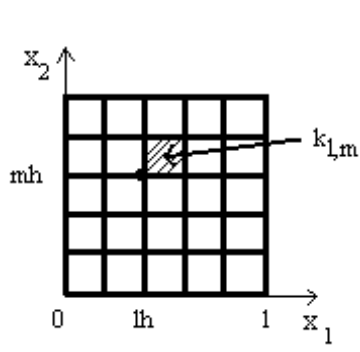
$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

y

$$L(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Para obtener una aproximación numérica de la solución débil de este problema empezaremos por definir los espacios de elementos finitos V_h . Sea M un número natural y $h = 1/(M+1)$. Consideremos un mallado rectangular de Ω donde los nodos son los puntos $a_{l,m} = (lh, mh)$, $0 \leq l, m \leq M$. Denotemos por

$$K_{lm} = [a_{l,m}, a_{l,m+1}] \times [a_{l,m}, a_{l+1,m}].$$



Se tiene pues que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{0 \leq l, m \leq M} K_{lm}.$$

Sea ahora Q_1 el espacio de dimensión 4 generado por los polinomios $1, x_1, x_2$ y $x_1 x_2$. Elegimos el espacio de dimensión finita

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{\Gamma} = 0 \text{ y } v|_{K_{lm}} \in Q_1, 0 \leq l, m \leq M\}$$

Para probar que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.1 Sea $v \in C(\bar{\Omega})$ tal que $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$, $1 \leq r \leq R$, donde:

- (i) $\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R \bar{\Omega}_r$, siendo Ω_r abiertos con frontera Γ_r de clase C^1 a trozos.

(ii) $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$ si $r \neq s$.

Entonces $v \in H^1(\Omega)$.

Demostración. Obviamente $v \in L^2(\Omega)$ por ser v continua en $\bar{\Omega}$. Definamos ahora la función $\omega \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\omega|_{\Omega_r} = \partial_i(v|_{\Omega_r})$$

y veamos que $\omega = \partial_i v$ en el sentido de las distribuciones. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces, por la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned} \langle \omega, \phi \rangle &= \int_{\Omega} \omega \phi \, dx = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega_r} \partial_i(v|_{\Omega_r}) \phi \, dx \\ &= \sum_{r=1}^R \left[\int_{\Gamma_r} \gamma(v) \gamma(\phi) n_i \, d\sigma - \int_{\Omega_r} v \partial_i \phi \, dx \right]. \end{aligned}$$

Como v es continua y ϕ se anula en Γ , entonces

$$\sum_{r=1}^R \int_{\Gamma_r} \gamma(v) \gamma(\phi) n_i \, d\sigma = 0$$

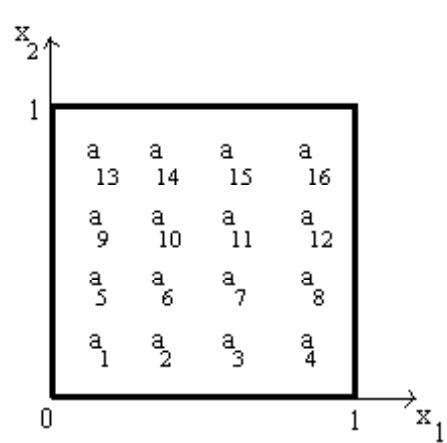
y con ello

$$\langle \omega, \phi \rangle = - \int_{\Omega} v \partial_i \phi = \langle \partial_i v, \phi \rangle$$

lo que concluye la prueba. ■

Como consecuencia inmediata de este resultado se tiene que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Vamos a determinar ahora la dimensión de V_h . Es evidente que cualquier función de Q_1 está unívocamente determinada por sus valores en los vértices de un cuadrado $K_{l,m}$. Como las funciones de V_h son continuas y su restricción a cada cuadrado coincide con una función de Q_1 se tiene que la restricción de cualquier función $v \in V_h$ a cada lado del cuadrado $K_{l,m}$ es una función afín y por tanto, dicha restricción queda determinada si conocemos sus valores en los extremos de dicho lado. Así, la función v es continua sí y sólo si lo es en los $(M+2)^2$ puntos $a_{l,m}$, $0 \leq l, m \leq M+1$. Sin embargo, recordemos que v se anula en Γ y por tanto el valor de v en los $4(M+1)$ puntos $a_{l,m}$ situados en Γ está determinado: vale cero. En resumen, v está determinada unívocamente por los valores que toma en los puntos $a_{l,m}$, $1 \leq l, m \leq M$, es decir, la dimensión de V_h es M^2 .

Con el fin de determinar una base de V_h numeramos los puntos $a_{l,m}$, $1 \leq l, m \leq M$ por filas tal y como se indica en el siguiente gráfico:



En la matriz anterior todos los elementos son nulos salvo los marcados con una X .

La resolución del sistema (4.7) se efectúa por medio de métodos numéricos. Para que estos métodos numéricos sean efectivos es importante que la matriz anterior tenga una estructura como la mostrada en el gráfico anterior. Nótese que la estructura de esta matriz viene determinada por la numeración de los nodos. Por tanto, **es también muy importante elegir una buena numeración de los nodos.**

4.3 Interpolación de Lagrange en \mathbb{R}^n

En la sección anterior hemos analizado el MEF en dos problemas concretos. En particular, hemos visto que una parte importante de todo el proceso es generar una malla sobre el dominio Ω donde se estudia la ecuación y elegir de forma apropiada las funciones de forma que van a ser la base del espacio vectorial de dimensión finita que usamos para obtener una aproximación numérica a la solución débil del problema variacional en cuestión. En esta sección analizaremos de una forma general las distintas posibilidades de mallado y de elección de las funciones de forma.

Consideremos un conjunto de $n + 1$ -puntos de \mathbb{R}^n , $a_i = (a_{ij})_{j=1}^n$, $1 \leq i \leq n + 1$, no situados en el mismo hiperplano, esto es, que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n} & 1 \end{pmatrix}$$

tenga determinante no nulo.

Definición 4.3.1 *A la envolvente convexa de estos $n + 1$ -puntos, es decir, al conjunto*

$$K = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

se le llama simplex n -dimensional.

Si $x \in K$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) a_i$. A los escalares $(\lambda_i(x))_{i=1}^{n+1}$ se les llama coordenadas baricéntricas de x respecto a K . Nótese que $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$.

Los subconjuntos de K que se obtienen al imponer las condiciones $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots = \lambda_{i_r} = 0$ se denominan *caras $n - r$ - dimensionales* de K .

Se llama *baricentro* de K al punto en el que las coordenadas baricéntricas valen $\lambda_i = \frac{1}{n+1}$, $1 \leq i \leq n + 1$.

Definición 4.3.2 Sea K un n -simplex y k un entero positivo. El subconjunto de K ,

$$\sum_k = \left\{ x \in K : \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, 1 \leq j \leq n+1 \right\}$$

se llama k -ésimo retículo de K , o retículo de orden k de K .

Dado $k \in \mathbb{N}$, denotemos por \mathcal{P}_k al espacio vectorial de los polinomios con n -variables y grado menor o igual que k , cuya dimensión es $\binom{n+k}{k}$. Este número coincide con el número de puntos del retículo de orden k . Se dice entonces que el conjunto \sum_k es \mathcal{P}_k -unisolvante lo cual quiere decir que todo polinomio de \mathcal{P}_k queda unívocamente determinado por sus valores en los puntos de \sum_k .

Sea ahora $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) a_i \in \sum_k$. Entonces $x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i a_i$, con $\mu_i \in \{0, 1, \dots, k\}$ y satisface además que $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = k$. Si escribimos ahora $x = a_\mu$, con $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$, entonces se puede probar que el único polinomio $q \in \mathcal{P}_k$ tal que

$$q(a_\mu) = 1 \quad \text{y} \quad q(b) = 0 \quad \forall b \in \sum_k, \quad b \neq a_\mu$$

viene dado por

$$q_\mu(x) = \left[\prod_{j=1}^{n+1} \mu_j! \right]^{-1} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{i=0}^{\mu_j-1} (k\lambda_j(x) - i), \quad \mu_j \geq 1.$$

Definición 4.3.3 Al triplete $(K, \sum_k, \mathcal{P}_k)$ se le llama elemento finito de Lagrange.

Con la ayuda del triplete $(K, \sum_k, \mathcal{P}_k)$ vamos a construir a continuación los espacios de aproximación donde habitan las aproximaciones numéricas de las soluciones que andamos buscando.

4.4 Análisis del MEF

En esta sección analizaremos en detalle el MEF partiendo de los elementos finitos de Lagrange.

4.4.1 Los Espacios de Aproximación $X_k^{(h)}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera regular. Sea \mathcal{T}_h una descomposición de Ω y su clausura en n -símplices que verifican: toda cara de un simplex $K \in \mathcal{T}_h$ es: o bien un subconjunto de $\Gamma = \partial\Omega$ o bien una cara de otro simplex de \mathcal{T}_h , en cuyo caso se dicen adyacentes.

Denotemos por h_K el diámetro del simplex K , y por $h = \max \{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, consideremos los espacios de funciones asociados al mallado \mathcal{T}_h definidos como

$$X_k^{(h)} = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathcal{P}_k \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Obsérvese que $X_k^{(h)}$ está compuesto por funciones continuas en $\bar{\Omega}$ que restringidas a cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ son polinomios de grado menor o igual que k y que además se pegan con continuidad en las caras comunes, es decir, que para cada par de elementos K_1, K_2 los trozos de polinomio definidos sobre ellos coinciden sobre los puntos

$$\sum_k (K_1) \cap \sum_k (K_2).$$

Por tanto, toda función de $X_k^{(h)}$ está unívocamente determinada al conocer sus valores sobre los puntos del conjunto

$$\sum_k^{(h)} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_k (K).$$

Al conjunto \mathcal{T}_h se le llama *triangulación o malla* de Ω y los elementos de $\sum_k^{(h)}$ se denominan *nodos* de la triangulación.

La dimensión del espacio $X_k^{(h)}$ coincide con el número de nodos de la triangulación y es posible encontrar una base de $X_k^{(h)}$ formada por funciones con soporte reducido a unos pocos elementos de \mathcal{T}_h . En concreto, si N_h es el número de nodos que suponemos numerados

$$\sum_k^{(h)} = \{b_i : 1 \leq i \leq N_h\},$$

entonces el nodo b_i contribuye a la base de $X_k^{(h)}$ con la función ϕ_i determinada unívocamente por

$$\phi_i(b_j) = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq j \leq N_h.$$

Nota 4.4.1 Nótese que los espacios de aproximación $X_k^{(h)}$ no son subespacios del espacio de Hilbert H donde estudiamos nuestro problema porque, en principio, las funciones de $X_k^{(h)}$ no satisfacen la condición de contorno del problema. Así, en un problema con condición de contorno Dirichlet homogénea tendríamos que trabajar en el espacio

$$V_k^{(h)} = \left\{ v_h \in X_k^{(h)} : v_h|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

4.4.2 Construcción de la Matriz de Coeficientes y Segundo Miembro del Problema Discretizado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera regular (por ejemplo C^1 a trozos) $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, con $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

Consideremos un operador de segundo orden del tipo

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + a_0 u$$

donde $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ tales que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$, y $a_0 \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ tal que $a_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ pero que no se da la igualdad c.t.p.. Supondremos además que el operador es fuertemente uniformemente elíptico lo cual recordemos significa que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Denotemos por

$$D_{\eta_L} u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u n_j$$

donde $\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$ denota el vector normal unitario exterior a Γ_1 .

Fijadas las funciones $f \in L^2(\Omega)$ y $\beta, g \in L^2(\Gamma_1)$, consideremos el problema mixto Dirichlet-Neumann que para el operador L consiste en encontrar una función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea solución del problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ D_{\eta_L} u + \beta u = g & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (\text{D-N})$$

Si consideramos ahora el espacio de Sobolev

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\},$$

el problema variacional asociado al problema (D-N) consiste en encontrar $u \in V$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u \partial_i v + \int_{\Omega} a_0 uv + \int_{\Gamma_1} \beta uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v \quad \forall v \in V. \quad (4.9)$$

Consideremos ahora el caso particular en que $n = 2$. Vamos a usar elementos finitos triangulares de Lagrange de tipo \mathcal{P}_1 (esto es, polinomios de grado menor o igual que 1). A partir de un mallado \mathcal{T}_h definimos el espacio de aproximación

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathcal{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v_h|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Nos olvidaremos en un primer momento de la condición Dirichlet en Γ_0 la cual incorporaremos al final del todo el proceso. Por el momento consideremos el espacio

$$X_h^{(1)} = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathcal{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Consideremos también los nodos numerados de la triangulación \mathcal{T}_h , esto es,

$$\sum_h^{(1)} = \{b_i : i = 1, 2, \dots, N_h\}.$$

Las funciones de forma ϕ_i (es decir, la base de $X_h^{(1)}$) satisfacen que

$$\phi_i(b_j) = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq N_h$$

y además su soporte son los triángulos que comparten el nodo b_i . La solución del problema variacional en el espacio de aproximación $X_h^{(1)}$ se escribe como

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \phi_i \quad , \quad \text{con } u_i = u_h(b_i).$$

De esta forma, el vector columna

$$u_h = (u_h(b_1), \dots, u_h(b_{N_h}))^t$$

es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$A_h u_h = b_h \quad (4.10)$$

donde

$$(A_h)_{lm} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j \phi_m \partial_i \phi_l + \int_{\Omega} a_0 \phi_m \phi_l + \int_{\Gamma_1} \beta \phi_m \phi_l$$

y

$$b_m = \int_{\Omega} f \phi_m + \int_{\Gamma_1} g \phi_m.$$

La matriz de coeficientes

$$R_{lm} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j \phi_m \partial_i \phi_l$$

se denomina *matriz de rigidez*, y la matriz de coeficientes

$$M_{lm} = \int_{\Omega} a_0 \phi_m \phi_l$$

matriz de masa.

Con el fin de poder elaborar un algoritmo numérico para calcular las matrices anteriores y poder resolver el sistema (4.10) se suele proceder del siguiente modo:

El problema discretizado se escribe como

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_h \partial_i v_h + \int_{\Omega} a_0 u_h v_h + \int_{\Gamma_1} \beta u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h + \int_{\Gamma_1} g v_h. \quad (4.11)$$

El primer sumando de esta expresión se puede reescribir como

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_h \partial_i v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\partial_1 v_h, \partial_2 v_h) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u_h \\ \partial_2 u_h \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Denotemos por

$$E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Sean ahora a_1^K, a_2^K, a_3^K los vértices del triángulo K , y $m_{1K} = a_1^K, m_{2K} = a_2^K, m_{3K} = a_3^K$ los números de esos vértices (es decir, los nodos). Entonces, si $v_h \in X_h^{(1)}$ se tiene que

$$v_h|_K = \sum_{i=1}^3 v_h(a_i^K) p_i^K$$

donde p_i^K es el único polinomio de grado menor o igual que 1 tal que $p_i^K(a_j^K) = \delta_{ij}$. Por tanto,

$$v_h|_K = (p_1^K, p_2^K, p_3^K) \begin{pmatrix} v_h(a_1^K) \\ v_h(a_2^K) \\ v_h(a_3^K) \end{pmatrix} = [P^K]^t (v^K).$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_1 v_h|_K \\ \partial_2 v_h|_K \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 v_h(a_i^K) \partial_1 p_i^K \\ \sum_{i=1}^3 v_h(a_i^K) \partial_2 p_i^K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 p_1^K & \partial_1 p_2^K & \partial_1 p_3^K \\ \partial_2 p_1^K & \partial_2 p_2^K & \partial_2 p_3^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_h(a_1^K) \\ v_h(a_2^K) \\ v_h(a_3^K) \end{pmatrix} \\ &= [DP^K] (v^K). \end{aligned}$$

Si sustituimos esta última expresión en (4.12) obtenemos que

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_h \partial_i v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (v^K)^t [DP^K]^t E [DP^K] (u^K).$$

Un proceso similar para el resto de sumandos nos permite reescribir (4.11) como

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (v^K)^t \left[\int_K [DP^K]^t E [DP^K] + \int_K a_0 [P^K]^t [P^K] \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} \beta [P^K]^t [P^K] \right] (u^K) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (v^K)^t \left[\int_K [P^K]^t f + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} [P^K]^t g \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Los términos entre corchetes se denominan *matriz elemental* y *segundo miembro elemental*, respectivamente, del elemento K .

4.4.3 Ensamblado

Consideremos ahora la matriz

$$[B^K] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

que está compuesta por N_h columnas, tres filas, y los unos que aparecen ocupan las columnas m_{2K} , m_{1K} y m_{3K} , respectivamente. De esta forma, si $v \in X_h^{(1)}$ es un vector de N_h componentes, entonces

$$[B^K] (v) = \begin{pmatrix} v_{m_{1K}} \\ v_{m_{2K}} \\ v_{m_{3K}} \end{pmatrix} = (v^K)$$

es decir, que la matriz $[B^K]$ extrae del conjunto total de N_h grados de libertad de v las tres componentes que corresponden al elemento K .

Con todo ello se tiene que la expresión (4.13) queda como

$$(v_h)^t \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [B^K]^t \left[\int_K [DP^K]^t E [DP^K] + \int_K a_0 [P^K]^t [P^K] \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} \beta [P^K]^t [P^K] [B^K] (u_h) \\
& = (v_h)^t \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [B^K]^t \left[\int_K [P^K]^t f + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} [P^K]^t g \right] \right)
\end{aligned}$$

que de forma condensada se escribe como

$$\begin{cases} A_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [B^K]^t [A_h^K] [B^K], \\ b_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [B^K]^t [b_h^K], \\ A_h u_h = b_h \end{cases}$$

donde

$$[A_h^K] = \int_K [DP^K]^t E [DP^K] + \int_K a_0 [P^K]^t [P^K] + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} \beta [P^K]^t [P^K]$$

y

$$[b_h^K] = \int_K [P^K]^t f + \int_{\partial K \cap \Gamma_1} [P^K]^t g.$$

Estos cálculos se conocen con el nombre de *ensamblado de la matriz y segundo miembro*.

El cálculo de las matrices $[A_h^K]$ y $[b_h^K]$ se hace usando un triángulo de referencia, es decir, se considera el triángulo de referencia \widehat{K} de vértices los puntos $\widehat{a}_1 = (0, 0)$, $\widehat{a}_2 = (1, 0)$ y $\widehat{a}_3 = (0, 1)$. A continuación se construye un aplicación afín que transforma cada triángulo $K \in \mathcal{T}_h$ en el triángulo de referencia anterior y todos los cálculos se efectúan sobre este triángulo de referencia.

Nota 4.4.2 El cálculo de las integrales que aparecen al calcular las matrices $[A_h^K]$ y $[b_h^K]$ se realizan mediante fórmulas de integración numérica. Se puede probar que el orden del error no aumenta si se utiliza una fórmula de cuadratura adecuada en función del tipo de elemento finito utilizado.

4.4.4 Condición de Dirichlet

Recordemos que para todos los cálculos que hemos efectuado hasta el momento hemos utilizado el espacio de aproximación $X_h^{(1)}$ en el que no tenemos en cuenta la condición $u = 0$ sobre Γ_0 . El procedimiento más sencillo para incorporar esta condición Dirichlet consiste en reemplazar la ecuación i -ésima (suponiendo que el nodo i -ésimo está sobre Γ_0) por la ecuación $u_i = 0$. Lo que se hace computacionalmente en la práctica es multiplicar el coeficiente $(A_h)_{ii}$ por un número muy grande, y la componente $(b_h)_i$ por cero. Ésto obliga a que $u_i = 0$.

4.5 Control del Error en el MEF

El control del error en cualquier método numérico es una de las partes más importantes de todo el proceso de aproximación. Los resultados sobre el control del error en el MEF no son nada fáciles de probar y exigen, en un primer paso, probar una regularidad adicional de las soluciones débiles que obtenemos al aplicar el método variacional. Es decir, una vez hemos obtenido una solución débil u que esté en algún espacio de Sobolev, pongamos por ejemplo en H^1 , el primer

paso que hemos de dar es probar que está función $u \in H^m$ para algún $m > 1$, porque esta regularidad va a aparecer como hipótesis de los teoremas de control del error. Por supuesto, probar estas regularidades no es en absoluto nada trivial.

En esta sección daremos (sin demostración) algunos resultados generales de control del error. Empezaremos con la dimensión 1.

4.5.1 El Caso Unidimensional

Consideremos el problema modelo unidimensional

$$(S-L) \quad \begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{en }]0, l[\\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

Teorema 4.5.1 *Sea u la solución débil del problema (S-L). Si $u \in H^{k+1}(0, l)$, $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una constante $C = C(k) > 0$ tal que*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^k \left\| u^{(k+1)} \right\|_{L^2}.$$

Este teorema nos afirma que si $u \in H^{k+1}(0, l)$, entonces el MEF es un método convergente de orden k . Nótese que en la Proposición 3.4.1 probamos que $u \in H^2$ y por tanto, podemos asegurar que el MEF en este problema es al menos de orden 1.

Un resultado que no exige regularidad adicional sobre la solución débil es el siguiente:

Teorema 4.5.2 *Sea $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ una familia de triangulaciones de $[0, l] = \bigcup_{i=0}^N [a_i, a_{i+1}]$ tal que*

$$h = \max_{0 \leq i \leq N} (a_{i+1} - a_i) \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1} = 0.$$

Este resultado es muy útil en situaciones en las que los datos del problema no son regulares (por ejemplo si aparecen deltas de Dirac) y por tanto no es posible obtener regularidad adicional sobre las soluciones débiles.

4.5.2 El Caso de las Dimensiones 2 y 3

A lo largo de esta sección supondremos que $n = 2$ ó 3 .

Supongamos que estamos estudiando un problema elíptico en un determinado espacio de Sobolev V y sean $X_k^{(h)}$ los espacios de aproximación asociados a un determinado mallado \mathcal{T}_h y a unos elementos finitos $(K, \sum_k, \mathcal{P}_k)$. Dada $u \in V$, denotaremos por $\prod_h u$ al elemento de $X_k^{(h)}$ que satisface que $\prod_h u(b_j) = u(b_j)$, siendo $(b_j)_{j=1}^{N_h}$ los nodos del mallado \mathcal{T}_h . Al elemento $\prod_h u$ se le llama interpolante global de u .

Fijado ahora un elemento $K \in \mathcal{T}_h$ denotaremos por $\prod_K u = \prod_h u|_K$, es decir $\prod_K u$ es el polinomio de \mathcal{P}_k que interpola a u en los nodos de K . Introducimos también la siguiente notación:

$$h_K = \max \{ \|x - y\| : x, y \in K \}$$

y

$$\rho_K = \max \{ \text{diam}(S) : S \text{ es una } n\text{-esfera}, S \subset K \}$$

El resultado que sigue establece una estimación del error entre u y $\prod_K u$, y en particular, del error cometido sobre cada elemento finito entre la solución exacta de un problema elíptico y la solución aproximada.

Teorema 4.5.3 *Sea $(K, \sum_k, \mathcal{P}_k)$ un elemento finito de Lagrange de tipo k , con $k \geq 1$. Si $u \in H^{k+1}(K)$, entonces existe una constante $C = C(n, k)$ tal que para todo entero m , $0 \leq m < k+1$, se tiene que*

$$\left| u - \prod_K u \right|_{m,K} \leq C(m, k) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |u|_{k+1,K},$$

donde

$$|u|_{l,K} = \left(\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = l} \left\| \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}.$$

Nota 4.5.1 La conclusión que hemos de sacar del teorema anterior es que con vistas a que los errores de interpolación sean pequeños nos interesa elegir elementos finitos que sean lo más regulares posibles.

Consideremos ahora el caso en que Ω es un abierto poliédrico, es decir, que $\bar{\Omega}$ es unión finita de poliedros de \mathbb{R}^n . Recordemos que un poliedro de \mathbb{R}^n está formado por la intersección finita de subespacios cerrados de \mathbb{R}^n .

Supongamos que \mathcal{T}_h es un mallado regular (se puede dar una definición precisa del término “regular” pero no entraremos por ahora más en detalle) que satisface además las dos siguientes condiciones:

(i) $h = \max \{h_K : K \in \mathcal{T}_h\} \rightarrow 0$.

(ii) Existe una constante $\sigma \geq 1$ tal que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall h \text{ y } \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Teorema 4.5.4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, un abierto poliédrico, y \mathcal{T}_h un mallado regular. Sea V el espacio de Sobolev donde estudiamos un determinado problema variacional que tiene una única solución débil u . Supongamos que $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap V$ es denso en V con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Denotemos por u_h la solución aproximada que obtenemos por medio del MEF. Entonces*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Si además $u \in H^{k+1}(\Omega)$, entonces existe una constante $C > 0$ (que no depende de h) tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Capítulo 5

Simulación de Problemas de Contorno con MATLAB

En este capítulo analizaremos la resolución de algunos problemas de contorno elípticos usando el paquete informático MATLAB, y en particular, su Toolbox de ecuaciones en derivadas parciales. La característica esencial de este paquete informático es su gran transparencia en cuanto a ecuaciones a resolver, condiciones de contorno, dominio donde se estudia la ecuación, propiedades del mallado..... La principal desventaja es que únicamente podemos resolver problemas bidimensionales y además tan sólo tiene implementado un tipo particular de elemento finito: el triángulo de tres nodos.

5.1 La Ecuación de Poisson en el Disco Unidad

Para ilustrar las posibilidades del Toolbox de EDPs de MATLAB, en esta sección estudiaremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. La solución exacta de este problema es la función

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4}.$$

Vamos a resolver este problema usando MATLAB. Una vez hemos ejecutado MATLAB entramos en el Toolbox de EDPs escribiendo **pdetool**. Veremos la pantalla que se muestra a continuación.

A continuación seguiremos los siguientes pasos:

1. Preproceso: en este primer paso dibujaremos el dominio Ω , haremos el mallado de este dominio e introduciremos las condiciones de contorno y los coeficientes de la ecuación.

1.1 Antes de dibujar Ω definiremos el tamaño y la escala de los ejes coordenados: menú **Options** y luego **Axis Limits** . Por ejemplo $x \in [-2, 2]$ e $y \in [-2, 2]$. A continuación definiremos una red para lo cual ejecutaremos **Grid** también desde el menú **Options** . El tamaño de la red se selecciona desde **Grid Spacing** . Por ejemplo pondremos una cuadrícula de tamaño 0.25 . Antes de abandonar **Options** seleccionaremos la opción **Snap** la cual resulta muy útil a la hora de ajustar los recintos que dibujaremos a continuación.

1.2 Para dibujar Ω entramos en la opción **Draw** y seleccionamos **ellipse/circle (centered)** . Ésto lo podemos hacer también picando con el ratón en la barra de herramientas donde aparece dibujado el circulito centrado. Manejando los botones izquierdo y derecho del ratón centramos el círculo y dibujamos también el radio. MATLAB asigna a este círculo la etiqueta C1 que podemos ver en **Set Formula**. Para verificar o cambiar los parámetros del círculo es suficiente con picar dos veces con el ratón sobre el propio círculo.

1.3 Las condiciones de contorno se introducen en el menú **Boundary** y luego seleccionamos **Boundary mode** y **Specify boundary conditions** . Por defecto MATLAB considera condiciones Dirichlet homogéneas bajo la forma general $hu = r$ con $h = 1$ y $r = 0$.

1.4 Elección de la ecuación a resolver. En nuestro caso tenemos una ecuación elíptica la cual se engloba dentro del formato general

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

donde $c = 1$, $a = 0$ y $f = 1$. Para introducir estos datos en MATLAB hemos de ir a menú **PDE** y luego seleccionar **PDE Mode, PDE Specification** .

1.5 Nos ocuparemos ahora de la malla. Para hacer un mallado inicial hemos de ir al menú **Mesh** y seleccionar **Mesh Mode** . MATLAB hace entonces una malla inicial. Podemos ver la numeración de los nodos y de los triángulos seleccionando **Show Node Labels** y **Show Triangle Labels** .

Como ya hemos indicado en la introducción, MATLAB tiene implementado únicamente elementos finitos del tipo triángulos de tres nodos. Otra opción interesante del menú Mesh es **Display Triangle Quality** en la que MATLAB evalúa la calidad de los triángulos que forman el mallado. En concreto, MATLAB asigna a cada triángulo un valor que se obtiene según la fórmula

$$q = \frac{4\sqrt{3} a}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$$

donde h_1, h_2, h_3 son los lados del triángulo, y a el área del mismo. Por tanto, $q = 1$ se obtiene cuando $h_1 = h_2 = h_3$. Según vimos en las fórmulas del error en el MEF, es interesante que los triángulos sean lo más equiláteros posibles. Se considera que la calidad de los triángulos es buena cuando $q > 0.6$.

2. Solución. Para obtener la solución numérica hemos de ir al menú **Solve** y luego seleccionar **Solve PDE**. MATLAB dibuja por defecto la solución en tonos de color. En realidad lo que hace es usar el MEF para obtener la solución aproximada en los nodos y luego interpola entre los distintos nodos para generar la gráfica de colores. La solución numérica en los nodos la podemos visualizar exportando la solución a la línea de comandos de MATLAB. Para ello hemos de seleccionar en el menú **Solve** la opción **Export Solution**. Por defecto el programa toma para la solución el nombre **u**. Si ahora vamos a la línea de comandos y escribimos **u** obtenemos la solución en los nodos numerados de acuerdo a como lo hemos visto en la malla.

3. Postproceso. En esta última parte analizaremos distintas posibilidades de visualización de la solución. Para ello iremos al menú **Plot** y luego seleccionamos **Plot Parameters**. Veremos la siguiente pantalla:

Analizaremos ahora un poco en detalle las distintas posibilidades de esta opción. Dado que el elemento finito de tres nodos tiene asociados polinomios en dos variables y de grado uno, sobre cada elemento finito hemos de ver una función lineal que en este caso estará coloreada de un solo color. Esta opción la obtenemos seleccionando en **Plot style** la opción **flat shading** . Hemos de ver lo que se muestra a continuación.

Dado que el problema que estamos estudiando tiene una solución exacta que además conocemos, podemos ver el error que hemos cometido al obtener la solución aproximada. Para ello es suficiente seleccionar en el menú **Plot style** la opción **Property** y luego donde aparece **u** hemos de poner **user entry** y escribir a la derecha $u - (1 - x.^2 - y.^2) / 4$.

Finalmente podemos volver a los puntos anteriores, refinar la malla, dibujar la solución y analizar la variación del error.

5.2 Usando Interactivamente el Toolbox y la Línea de Comandos

En la mayoría de ocasiones la caja de herramientas **pdetool** de MATLAB se nos queda pequeña cuando queremos resolver algunos problemas concretos. Es entonces necesario acudir a la programación. En esta sección veremos con un ejemplo concreto como se pueden usar de manera conjunta la caja de herramientas de EDPs y la programación en MATLAB.

5.2.1 Introduciendo funciones definidas a trozos

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} u_x \right)_x + \left(\frac{V_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} u_y \right)_y = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $\Omega = [-120, 120] \times [-120, 120]$. Supondremos que

$$\frac{1}{12\mu} h^3 (x, y) = H(x, y) = \begin{cases} 0.00000001 & \text{si } -120 < x < 0 \\ 0.0000000001 & \text{si } 0 \leq x \leq 120 \end{cases}$$

Dado que al derivar h obtenemos una delta de Dirac, sustituiremos el problema (5.1) por el problema

$$\begin{cases} -(Hu_x)_x - (Hu_y)_y = f_\varepsilon(x, y) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde

$$f_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon * 240) & \text{si } -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

y $0 < \varepsilon < 1$. Estudiaremos este problema para distintos valores de ε , lo cual proporciona una aproximación a la delta de Dirac.

Para introducir funciones discontinuas en MATLAB tenemos que definir estas funciones fuera del **pdetool**. Estas funciones se generan en el editor de MATLAB. En concreto, la función H se genera como sigue:

```
function c=coef(x)
if (x > 0.)
    c = 0.000000001;
else
    c = 0.0000000001;
end
```

y después la grabamos con el nombre **coef.m** en el subdirectorio **bin** de MATLAB. De manera similar generamos la función f_ε . En concreto:

```
function f=delta(epsilon,x)
if (x > epsilon)
    f = 0.;
elseif (x < -epsilon)
    f = 0.;
else
    f = 1./(2. * epsilon * 240);
end
```

que también volvemos a grabar ahora con el nombre **delta.m** .

Estas funciones las podemos usar en **pdetool** cuando introducimos los coeficientes de la ecuación. En concreto, una vez definido el dominio, la malla y las condiciones de contorno, introduciremos en el menú **PDE, PDE Specification** los ficheros **coef(x)** y **delta(0.001,x)** en c y f respectivamente. A continuación variamos el parámetro ε , que en el caso anterior vale **0.001** para analizar cómo varía la solución.

5.2.2 Controlando el error y haciendo mallados adaptativos

En esta sección veremos alguna forma de controlar el error que se comete al usar una determinada triangulación para resolver un problema de EDPs. En concreto, veremos una forma de identificar los triángulos que más contribuyen al error con el fin de hacer un mallado más fino en la zona concreta donde el error es mayor. Por supuesto, refinar por completo la malla es algo que tiene un coste computacional elevado, y por ello es necesario refinar sólo determinadas zonas. Es lo que se llama hacer un mallado adaptativo.

Supongamos que hemos resultado usando el mallado inicial del toolbox un determinado problema elíptico, por ejemplo, el problema de Dirichlet para el Laplaciano en el disco unidad. El control del error lo llevaremos a cabo en la línea de comandos de MATLAB y por tanto, lo primero que hemos de hacer es exportar todos los datos que hemos generado en nuestro problema a la línea de comandos. Esto se hace seleccionando la opción **Export** de cada uno de los menús **Draw, Boundary, PDE, Mesh, Solve** . MATLAB asigna por defecto un nombre a cada una de las variables que exportamos. A continuación nos vamos a la línea de comandos.

La función que tiene MATLAB para calcular el error sobre cada triángulo del mallado es **pdejmps** . La sintaxis de este comando es

$$errf = pdejmps(p, t, c, a, f, u, \alpha, \beta, m)$$

donde p, t representan los datos del mallado que hemos exportado, c, a, f son los coeficientes de la ecuación (también los hemos exportado), u es la solución aproximada que hemos calculado, y α, β, m son tres números positivos que hemos de introducir teniendo en cuenta el siguiente criterio: la salida de la función **pdejmps** asocia a cada triángulo del mallado una estimación del error que denotamos por $E(K)$, y que se calcula según la fórmula

$$E(K) = \alpha h_K^m \|(f - u)\|_{L^2(K)} + \beta \left(\frac{1}{2} \sum_{\tau \in \partial K} h_\tau^m [\mathbf{n}_\tau \cdot (c \nabla u)]^2 \right)^{1/2}$$

donde $h_K = \max \{\|x - y\| : x, y \in K\}$, τ denota las aristas de K , h_τ es la longitud de esa arista y \mathbf{n}_τ es el vector normal unitario exterior a la arista τ . Se ha demostrado que la fórmula anterior funciona bien para la ecuación de Poisson en recintos sencillos. En nuestro problema escribiremos en la línea de comandos:

$$\mathbf{errf} = \mathbf{pdejmps}(\mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{1.}, \mathbf{0.}, \mathbf{10.}, \mathbf{u}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$$

Para determinar los triángulos que más contribuyen al error usaremos el comando **pdeadworst** . La sintaxis de este comando es

$$bt = pdeadworst(p, t, c, a, f, u, errf, wlevel)$$

donde p, t son los datos de la malla, c, a, f son los coeficientes de la ecuación, u es la solución, $errf$ es lo que hemos calculado con **pdejmps** y $wlevel$ es un número real que debe estar entre

0 y 1. La salida de este comando son los triángulos que satisfacen la relación

$$errf > wlevel * \max(errf)$$

En nuestro problema escribiremos por ejemplo

$$\mathbf{bt} = \mathbf{pdeadworst}(p, t, 1., 0., 10., u, errf, 0.9)$$

La información obtenida se guarda en la variable bt .

Finalmente, ya podemos hacer un mallado adaptativo para lo cual usaremos el comando **adaptmesh**. La sintaxis de este comando es

$$[u, p, e, t] = \mathbf{adaptmesh}(g, b, c, a, f, \text{PropertyName}', \text{PropertyValue})$$

donde g describe la geometría del dominio, b la frontera, c, a, f son los coeficientes de la ecuación, **PropertyName** son parámetros opcionales y **PropertyValue** son los valores que hemos de asignar a estos parámetros (ver Guía de usuario de MATLAB para una descripción completa de todos los parámetros). A continuación veremos en detalle algunos de estos parámetros, pero por el momento es importante señalar que la salida que obtenemos es una nueva solución aproximada de nuestro problema elíptico que el programa obtiene refinando la malla inicial. Podemos elegir entre dos criterios de refinamiento de la malla: **pdeadworst** y **pdeadgsc**. El primero de ellos refina todos los elementos que satisfacen la relación $errf > 0.5 * \max(errf)$ y no para hasta que el número máximo de triángulos admisibles por MATLAB es completado. No obstante, nosotros podemos decirle que pare antes. Por su parte, **pdeadgsc** refina hasta que se satisface un determinado criterio de tolerancia. Nosotros nos centraremos en **pdeadworst** ya que es más natural cuando la solución tiene singularidades.

En nuestro problema concreto escribiremos por ejemplo

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{adaptmesh}(\mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{1.}, \mathbf{0.}, \mathbf{10.}, \text{'tripick'}, \text{'pdeadworst'}, \text{'Maxt'}, \mathbf{400})$$

y la repuesta que obtenemos es el vector solución obtenido al hacer un mallado tipo **pdeadworst** e incluyendo al menos 400 triángulos.

Es interesante con vistas a dibujar la solución no sólo obtener u con *adaptmesh* sino también los valores relativos al dominio y al mallado. Para ello escribiremos

$$[\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{e}, \mathbf{t}] = \mathbf{adaptmesh}(\mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{1.}, \mathbf{0.}, \mathbf{10.}, \text{'tripick'}, \text{'pdeadworst'}, \text{'Maxt'}, \mathbf{400})$$

Ahora podemos visualizar la solución escribiendo

$$\mathbf{pdeplot}(p, e, t, \text{'xydata'}, u)$$

o también

$$\mathbf{pdesurf}(p, t, u)$$

Finalmente, para ilustrar de nuevo la forma de hacer un mallado adaptativo, resolveremos el problema de Dirichlet anterior pero sobre un dominio tal y como se muestra en la figura siguiente:

Bibliografía

- [1] A. Bermúdez, J. Durany, C. Moreno, P. Quintela, J. M. Viaño, *Simulación Numérica en Ingeniería con Elementos Finitos. Apuntes curso de verano*. Universidad de Santiago de Compostela (1999).
- [2] J. M. Bony, *Distributions et Transformation de Fourier*, École Polytechnique. Paris VII (1988).
- [3] H. Brézis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad Textos (1984).
- [4] E. Casas, *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Cantabria (1992).
- [5] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer (1979).
- [6] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland (1978).
- [7] G. Duvaut, *Mécanique des Milieux Continus*, Dunod (1998).
- [8] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Masson, 1972.
- [9] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Masson, 1972.
- [10] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons (1989).
- [11] A. Liñan, *Mecánica de Fluidos*, Vol. 1, Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Madrid, 2000.
- [12] J. L. Lions, *¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?*. Conferencia dictada en el Congreso de los Diputados en Madrid el día 21 de Enero de 2000 con ocasión de la “Jornada Matemática”, Boletín de SEMA n°15, 59-70, 2000.
- [13] J. Necas, *Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson (1967).
- [14] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson (1988).
- [15] J. I. Richards, H. K. Youn, *Theory of Distributions. A Non-Technical Introduction*, Cambridge Univ. Press (1990).
- [16] J. I. Tello del Castillo, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid (2001).
- [17] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Paris Herman (1950).

- [18] J. L. Vázquez, *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*, Apuntes curso de doctorado UAM, 1998.
- [19] *Partial Differential Equation Toolbox for Use with MATLAB*, User's Guide.