Examen de Teoría. Convocatoria Febrero 2008

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones
$$\min_{u\in\mathcal{A}} \quad I(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(u'(x)\right)^2 - u(x)\right] dx$$
donde
$$\mathcal{A} = \left\{u : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ u \in C^1(0,1) \ , \ u(0) = u(1) = 0\right\}$$
Explica brevemente cómo se resuelve este problema siguiendo el método de los elementos finitos. Se han de explicar, entre otros, los siguientes conceptos: (1) forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange, (2) elementos finitos, (3) funciones de forma y (4) matriz de rigidez.

2. **(1 pto)** Supongamos que disponemos de una agencia matrimonial en la que $N-$hombres, $N \geq 2$, pretenden encontrar pareja de entre las $M-$mujeres, $M \geq 2$, que también han solicitado sus servicios a la agencia. Con el fin de encontrar una compatibilidad lo más idónea posible, la agencia realiza unas encuestas y dependiendo de las respuestas asigna un grado de compatibilidad A_{ij}, con $0 \leq A_{ij} \leq 1$, entre el hombre i y la mujer j. Por otra parte, introduzcamos la variable x_{ij} con posibles valores 1, si el hombre i se empareja con la mujer j, y 0 en caso contrario. Supongamos que sólo los emparejamientos entre personas de distinto sexo están permitidos y que no se admite la poligamia (es decir, un hombre o mujer sólo se puede emparejar con un único hombre o mujer). La agencia pretender maximizar el grado de compatibilidad total entre los emparejamientos que se establezcan para lo cual se ha de decidir de manera óptima cómo son estos emparejamientos. Escribe un modelo matemático para este problema.

3. **(2 ptos)** Consideremos el problema de programación no lineal
$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, x_3)$$
sujeto a la restricción de igualdad
$$g(x_1, x_2, x_3) = 0.$$
Supongamos que f y g son funciones de clase C^1 y que el problema anterior tiene una solución óptima $x^0 = \left(x_1^0, x_2^2, x_3^0\right)$. Demuestra que entonces existe un número real λ (multiplicador de Lagrange) tal que x^0 es solución del sistema de ecuaciones (condiciones de Kuhn-Tucker)
$$\nabla f\left(x^0\right) + \lambda \nabla g\left(x^0\right) = 0$$
donde ∇f, ∇g denota el gradiente de f y g, respectivamente.

4. **(1 pto)** Consideremos el siguiente problema de control óptimo:
$$\text{Minimizar} \quad \int_0^T F(t, x(t), u(t))\, dt$$
sujeto a
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x^0 \\ u(t) \in K \end{cases}$$

donde $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ es el estado, $u(t) = (u_1(t), \cdots, u_m(t))$ es el control, y $K \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto acotado. Explica brevemente cómo se puede resolver este problema haciendo uso del Principio de Pontryagin. Se han de explicar los conceptos de Hamiltoniano y coestado, y se ha de enunciar de manera precisa el mencionado principio de Pontryagin.

5. **(2 ptos)** Consideremos el problema de la transmisión de calor, en regimen estacionario, en una barra cilíndrica, muy delgada, de longitud L, y supongamos que la conductividad térmica de la barra está dada por la función $\kappa(x)$ que satisface

$$\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0, \quad 0 \leq x \leq L,$$

y que existe una fuente interna de calor $Q(x)$. Si denotamos por $u = u(x)$ la temperatura del punto x, entonces podemos asociar a dicho fenómeno una energía calórica que adopta la forma

$$I(u) = \int_0^L \left[\frac{\kappa(x)}{2} |u'(x)|^2 - Q(x)\,u(x)\right] dx.$$

Suponiendo que la barra se mantiene a temperatura cero en los extremos, es decir, $u(0) = u(L) = 0$, y que la temperatura final que adquiere la barra es la que minimiza el funcional $I(u)$ de entre todas las posibles, entonces se puede demostrar, que la función u debe ser solución de la ecuación

$$\text{(E-L)} \begin{cases} -(\kappa u')' = Q & \text{en} \quad [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Demuestra que el recíproco también es cierto, es decir, que si u es solución de (E-L), entonces u es solución del problema variacional

$$\underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \ I(u) = \int_0^L \left[\frac{\kappa(x)}{2} |u'(x)|^2 - Q(x)\,u(x)\right] dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0, L] \to \mathbb{R} : u(0) = u(L) = 0\}.$$