Ingeniero Industrial
Asignatura: *Optimización y Simulación*
Examen de Teoría. Convocatoria Febrero 2009

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \\ \text{sujeto a} & \\ & g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \leq 0, \end{array}\right.$$

donde $g = \left(g_1, \cdots, g_n\right)$. Describe brevemente dos algoritmos numéricos distintos para calcular la solución numérica de este problema.

2. Consideremos el problema de programación no lineal

$$\underset{(x_1,x_2,x_3)\in\Omega}{\text{Minimizar}} \qquad f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

donde

$$\Omega = \left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3, \ x_1 + x_2 + x_3 = 12\right\}.$$

Se pide:

(a) **(0.25 ptos)** ¿Es f convexa en Ω? ¿ Por qué?

(b) **(0.75 ptos)** Calcular el coste del problema dual $\Theta\left(\mu, \lambda\right)$.

(c) **(0.5 ptos)** Sabiendo que $\mu = \frac{12}{5}$ y $\lambda = -\frac{68}{5}$ es solución del problema dual, calcula la solución del primal.

3. Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(PCV) \qquad \underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I\left(u\right) = \int_0^L F\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right) dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \left\{u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es derivable}, \ u\left(0\right) = \alpha, \quad u\left(L\right) = \beta\right\},$$

y

$$\begin{array}{rlcl} F: & [0, L] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(x, \lambda, \xi\right) & \longmapsto & F\left(x, \lambda, \xi\right) \end{array}$$

Se pide:

(a) **(1 pto)** Demuestra que si F es convexa respecto a $\left(\lambda, \xi\right)$ para cada x fijo, y u es solución del problema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right)\right] = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right) \\ u\left(0\right) = \alpha, \quad u\left(L\right) = \beta, \end{array}\right.$$

entonces u es solución de $\left(PCV\right)$.

(b) (0.5 ptos) Consideremos el problema siguiente: encontrar $u \in \mathcal{A}$ tal que

$$\int_0^L \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda} (x, u(x), u'(x)) \, v(x) + \frac{\partial F}{\partial \xi} (x, u(x), u'(x)) \, v'(x) \right] dx = 0$$

para toda v que cumple $v(0) = v(L) = 0$. Explica brevemente qué relación tiene este problema con el problema de Cálculo de Variaciones (PCV).

4. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal

$$\underset{x \in \mathcal{K}}{\text{Minimizar}} \qquad f(x)$$

siendo f una función lineal no nula y $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado. Demuestra que si x^0 es solución de este problema, entonces x^0 es un punto de la frontera del conjunto $\mathcal{K}$.

5. **(2 ptos)** Calcula la solución del problema de control óptimo

$$\underset{u}{\text{Minimizar}} \qquad J(u) = \int_0^1 -[x(t) + u(t)] \, dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + u(t) + t \\ x(0) = 2 \\ u(t) \in [0, 3] \quad \text{para todo } t > 0. \end{cases}$$

Una vez calculado el control óptimo $u(t)$ no es necesario calcular el estado óptimo $x(t)$.

Indicaciones: Duración: 2h 30m. No se permite el uso de calculadora.