Ingeniero Industrial
Asignatura: *Optimización y Simulación*
Examen de Teoría. Convocatoria Febrero 2010

1. **(1 pto)** Explica el algoritmo del simplex para resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar en } x: & c \cdot x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $c = (c_1, \cdots, c_n)$, $A \in \mathcal{M}^{m \times n}$, $m \leq n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

2. **(1 pto)** Supongamos que tenemos una partícula de masa $m = 1$ que se deplaza en línea recta bajo la acción de un campo de fuerzas $u = u(t)$. Supongamos también que en el instante inicial está en reposo y en posición zero. Pretendemos calcular la fuerza $u = u(t)$ que hemos de aplicar sobre dicha partícula para desplazarla 1 metro en el menor tiempo posible. Por supuesto, la fuerza $u(t)$ no puede tomar cualquier valor sino que está acotada entre los valores -2 y 2 (en su unidad física correspondiente). Escribe un modelo matemático apropiado para este problema.

3. Consideremos el problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar} \qquad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Se pide:

(a) (**1 pto**) ¿Tiene solución este problema?. ¿Por qué?.

(b) (**1.5 ptos**) Resuelve el problema haciendo uso de la teoría de la dualidad, es decir, escribe el problema dual y resuélvelo.

4. (**2.5 ptos**) Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$\text{(PCV)} \quad \underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{2u(x)}} dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0, L] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = 0, \quad u(1) = b\}$$

Supongamos que dividimos el intervalo $[0, 1]$ en $N-$subintervalos de igual longitud $h = 1/N$, con N un número par, de modo que

$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_{k-1}, \ x_k], \qquad \text{con } x_0 = 0 \text{ y } x_k = kh, \ 1 \leq k \leq N.$$

Consideremos ahora el conjunto

$$\mathcal{A}_h = \left\{ u : [0, L] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = 0, \quad u(1) = b \text{ y } \left. u \right|_{[x_{k-1}, x_k]} \text{ es un segmento de recta} \right\}$$

y denotemos por $u_k = u(x_k)$. Comprueba que si optimizamos sobre el conjunto $\mathcal{A}_h$, el problema anterior adopta la forma

$$\text{Minimizar en } (u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}) : \qquad I_h(u_1, u_2, \cdots, u_{N-1})$$

donde

$$I_h(u_1, \cdots, u_{N-1}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{2\sqrt{h^2 + (u_k - u_{k-1})^2}}{\sqrt{2u_k} + \sqrt{2u_{k-1}}}$$

¿Qué tipo de problema es el que hemos obtenido?

Indicaciones: Duración: 2h. No se permite el uso de calculadora.