Ingeniero Industrial

Asignatura: *Optimización y Simulación*

Examen de Teoría. Convocatoria Febrero 2013

(1) **(1 pto)** Explica el Método Simplex para resolver el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & c \cdot x \\ \text{sujeto a} & \\ & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(2) **(1 pto)** Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg de chocolate, 100 kg de almendras y 85 kg de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg de chocolate, 1 kg de almendras y 1 kg de frutas; la de tipo B contiene 2 kg de chocolate, 1.5 kg de almendras y 1 kg de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 13 y 13.50 euros, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta?

(3) Consideremos el problema de programación no lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1^2 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Se pide:

(a) **(1 pto)** Escribe y resuelve las ecuaciones de Kuhn-Tucker asociadas a este problema.

(b) **(0.5 ptos)** Para $\epsilon \neq 0$, calcula $f(0,0)$, $f(0,\epsilon)$ y $f(\epsilon,0)$. ¿Es $(0,0)$ un mínimo de f ? ¿Por qué?

(b) **(0.5 ptos)** Calcula $f(0,-1)$. Siendo $\epsilon \neq 0$ y $0 < \delta < 2$ tales que $\epsilon^2 - (-1 + \delta) < 1$, calcula también $f(0+\epsilon, -1+\delta)$. ¿Es $(0,-1)$ un mínimo local de f? ¿Por qué?.

(4) Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(\text{PCV}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & I(u) = \int_0^{2\pi} \left[u'(x)^2 - u(x)^2 \right] dx \\ \text{sujeto a} & u(0) = u(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Se pide:

(a) **(1 pto)** Comprueba que la solución de la ecuación de Euler-Lagrange asocaiada a este problema es $u^\star(x) = \sin(x)$ y que $I(u^\star) = 0$. *Ayuda:* $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

(b) **(0.5 ptos)** Es fácil comprobar que si $v(x) = x(1 - \frac{x}{2\pi})$, entonces $I(v) < 0$. Explica esta aparente contradicción con el resultado del apartado anterior.

(5) **(1.5 ptos)** Consideremos el problema de control óptimo

$$(\text{PCO}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & J(u) = \int_0^T [F(t, x(t), u(t))\, dt \\ \text{sujeto a} & \\ & x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ & x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T \end{cases}$$

Deduce las condiciones necesarias de optimalidad para este problema.

Indicaciones: Duración: 2h. No se permite el uso de calculadora.