Ingeniero Industrial

Asignatura: *Optimización y Simulación*

Examen de Teoría. Convocatoria Julio 2012

(1) **(1 pto)** Explica el Método de los Elementos Finitos para resolver el siguiente problema de cálculo de Variaciones:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{A}\text{Minimizar} & I(u) = \int_0^L \left[\frac{\kappa(x)}{2}(u'(x))^2 - f(x)\,u(x)\right] dx \\ \text{donde} & \mathcal{A} = \{u : [0,L] \to \mathbb{R},\ u \text{ suave},\ u(0) = u(L) = 0\} \end{cases}$$

y siendo $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ una función dada.

(2) **(1 pto)** Un fabricante de quesos mezcla tres tipos distintos de leche (oveja, cabra y vaca) para la elaboración de 5 tipos distintos de queso. La elaboración de cada variedad requiere mezclas de cada tipo de leche, según se indica en la siguiente tabla:

Variedad	V1	V2	V3	V4	V5	Recursos
Leche oveja	4	10	8	10	5	6000
Leche cabra	2	1	6	30	3	4000
Leche vaca	3	2	5	15	5	5000
Precio de venta	12	20	18	40	10	

Los recursos disponibles de cada tipo de leche así como el precio de venta de cada variedad también están indicados en la tabla. Escribe un modelo matemático que nos permitar determinar la producción óptima, es decir, las unidades de cada variedad que maximizan los beneficios.

(3) **(1.5 ptos)** Consideremos el problema de Programación No Lineal

$$(\text{PPNL}) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $g = (g_1, \cdots, g_m)$ y $h = (h_1, \cdots, h_d)$. Consideremos también su sistema de Kuhn-Tucker asociado, es decir,

$$(\text{KT}) \begin{cases} \nabla f(x) + j = 1\sum^{m} \mu_j \nabla g_j(x) + k = 1\sum^{d} \lambda_k \nabla h_k(x) = 0 \\ \mu_j g_j(x) = 0, \quad \mu_j \ge 0, \quad 1 \le j \le m, \\ g(x) \le 0, \quad h(x) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que f y g son de clase C^1 y convexas, y que h es afín. Demuestra que si (x, μ, λ) es solución de (KT), entonces x es solución de (PPNL).

(4) **(1.5 ptos)** Resuelve, usando el método de la dualidad, el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & x_1 \le 4, \quad x_2 \ge 1/4. \end{cases}$$

(5) Consideremos el problema de control óptimo

$$(\text{PCO}) \begin{cases} u\text{Minimizar} & J(u) = \int_0^2 \left[x(t) + u(t)^2\right] dt \\ \text{sujeto a} & \\ & x''(t) = u(t) \\ & x(0) = 0, \quad x'(2) = 0 \\ & u(t) \in [0, 3/4]. \end{cases}$$

Se pide:

(a): (0.5 ptos) Estudia la convexidad del problema, es decir, si toda solución del sistema de optimalidad asociado lo es de (PCO).

(b): (1.5 ptos) Resuleve (PCO), es decir, calcula el control óptimo $u(t)$.

Indicaciones: Duración: 2h 15m. No se permite el uso de calculadora.