Ingeniero Industrial
Asignatura: *Optimización y Simulación*
Examen de Teoría. Convocatoria Septiembre 2007

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones
$$\min_{u\in\mathcal{A}} \quad I(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(u'(x)\right)^2 - u(x)\right] dx$$
donde
$$\mathcal{A} = \left\{u : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ u \in C^1(0,1) \ , \ u(0) = u(1) = 0\right\}$$
Explica brevemente cómo se resuelve este problema siguiendo el método de los elementos finitos. Se han de explicar, entre otros, los siguientes conceptos: (1) forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange, (2) elementos finitos, (3) funciones de forma y (4) matriz de rigidez.

2. **(1 pto)** Un paquete postal (en forma de cubo) debe satisfacer que su altura más la longitud de su contorno no puede exceder de 108 cm. Se pretende diseñar un tal paquete que cumpla con esta restricción y que además posea un volumen máximo. Escribe un modelo matemático para este problema.

3. Responde a las siguientes cuestiones:
   (a) **(0.5 Ptos)** Escribe la forma que adopta el problema dual asociado a un determinidado problema de programación no lineal.
   (b) **(1 Pto)** Interpreta geométricamente el significado del problema dual.
   (c) **(0.5 Ptos)** Enuncia el teorema de dualidad que nos proporciona la relación entre el problema primal y su dual.

4. **(1 pto)** Escribir la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de Cálculo de Variaciones
$$\underset{u}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_0^1 \left(u'(x)\right)^2 dx$$
sujeto a las restricciones
$$\begin{cases} u : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{es derivable} \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 5 \\ \int_0^1 u(x)\cos(2x)\, dx = 0 \end{cases}$$

5. El sistema
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad (1)$$
modeliza, en el caso de pequeñas oscilaciones, la dinámica de un péndulo sometido a la acción de una fuerza $u = u(t)$. De hecho, $x_1 = x_1(t)$ representa el ángulo de oscilación y $x_2 = x_2(t)$ es su velocidad. Se pretende diseñar una estrategia de control que conduzca un par de estados iniciales $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$ a su estado de reposo $(x_1(T), x_2(T)) = (0,0)$ en tiempo mínimo T de modo que el control u satisfaga la restricción $|u(t)| \leq 1$ para todo $t > 0$. Se pide:

(a) (1 pto) Escribir y resolver las ecuaciones que ha de cumplir el coestado $p = (p_1, p_2)$. Deducir de ello, usando el principio de Pontryagin, la forma que ha de tener el control u.

(b) (1 pto) Deduce y dibuja la forma que adopta el plano de fases de este problema.

Observación: Con el fin de integrar las ecuaciones para el coestado y el estado, quizás es más sencillo mirar a dichas ecuaciones no como un sistema de primer orden sino como una ecuación escalar de segundo orden. Por ejemplo, el sistema (1) es equivalente a la ecuación

$$x_1'' + x_1 = u. \tag{2}$$

Recordemos que si $u = C$ constante, entonces la solución general de la ecuación (2) es de la forma

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + C$$

`Solución:` (a) El Hamiltoniano asociado a este problema es

$$H = 1 + (p_1, p_2) \cdot (x_2, -x_1 + u) = 1 + p_1 x_2 + p_2 (-x_1 + u).$$

Por tanto, las ecuaciones para el coestado son

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2(t) \\ p_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t). \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$p_1''(t) + p_1(t) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$p_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

con lo que

$$p_2(t) = p_1'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Consideremos a continuación la ecuación para el control óptimo que obtenemos del Principio de Pontryagin, esto es, para cada t fijo, si $(x(t), u(t), p(t))$ son el estado, control y coestado óptimos, entonces

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = \min_{-1 \le v \le 1} H(t, x(t), v, p(t)).$$

Sustituyendo en la expresión del Hamiltoniano obtenemos

$$p_2(t)\, u(t) = \min_{-1 \le v \le 1} [p_2(t)\, v]$$

con lo que el control óptimo $u(t)$ es un control tipo bang-bang de la forma

$$u(t) = \begin{cases} -1, & p_2(t) > 0 \\ +1, & p_2(t) < 0. \end{cases}$$

Nótese que el número de cambios de control (switchings) coincide con el número de ceros del coestado p_2 en el intervalo $[0, T]$, con T el tiempo óptimo.

(b) Para $u(t)$ constante y con valor $+1$ ó -1, la ecuación de estado se integra fácilmente y obtenemos

$$\begin{cases} x_1(t) = (x_1^0 - u) \cos t + x_2^0 \sin t + u \\ x_2(t) = -(x_1^0 - u) \sin t + x_2^0 \cos t. \end{cases}$$

De aquí se deduce que para $u = +1$, se tiene la igualdad

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \left(x_1^0 - 1\right)^2 + \left(x_2^0\right)^2,$$

es decir, las trayectorias asociadas a un control constante $u = +1$ en el plano de fases (x_1, x_2) son circunferencias centradas en $(1, 0)$ y de radio $\sqrt{(x_1^0 - 1)^2 + (x_2^0)^2}$. De forma análoga se obtiene que las trayectorias asociadas a un control constante $u = -1$ son circunferencias de centro $(-1, 0)$ y radio $\sqrt{(x_1^0 + 1)^2 + (x_2^0)^2}$.