Examen de Teoría. Convocatoria Septiembre 2008

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal sin restricciones

$$\text{Minimizar} \qquad f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

Describe brevemente en qué consisten los algoritmos de descenso tipo gradiente y Cuasi-Newton para aproximar numéricamente la solución de este problema. Se han de explicar los algoritmos siguiendo el esquema: (1) inizialización, (2) iteración, (3) criterio de parada. También se han de justificar porqué las direcciones de descenso propuestas producen un descenso de la función coste. Explicar también qué diferencia hay entre un algoritmo a paso fijo y uno a paso variable. Finalmente, ¿cuál es el principal inconveniente de un algoritmo de descenso, tanto tipo gradiente como cuasi-Newton?

2. Consideremos el problema de programación no lineal

$$\underset{(x_1,x_2,x_3)\in\Omega}{\text{Minimizar}} \qquad f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + x_2 + x_3$$

donde

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \; x_3 \geq 0.5, \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

Se pide:

(a) (0.25 ptos) ¿Tiene solución este problema? ¿Por qué?

(b) (0.25 ptos) ¿Es f convexa en Ω? ¿ Por qué?

(c) (0.5 ptos) Escribe las ecuaciones de Khun-Tucker para este problema.

3. Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(PCV) \qquad \underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I\left(u\right) = \int_0^L \left[\frac{\kappa\left(x\right)}{2} \left(u'\left(x\right)\right)^2 - f\left(x\right) u\left(x\right) \right] dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \left\{ u : [0, L] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable, } u\left(0\right) = u\left(L\right) = 0 \right\}.$$

Se pide:

(a) (1 pto) Demuestra que si u es solución de (PCV), entonces u es solución de los dos problemas siguientes:

(a1) Encontrar $u \in \mathcal{A}$ tal que

$$\int_0^L \kappa\left(x\right) u'\left(x\right) v'\left(x\right) dx = \int_0^L f\left(x\right) v\left(x\right) dx \qquad \forall\, v \in \mathcal{A}. \qquad (1)$$

(a2)

$$\begin{cases} -\left(\kappa\left(x\right)u'\left(x\right)\right)' = f\left(x\right) & \text{en} \quad [0, L] \\ u\left(0\right) = u\left(L\right) = 0. \end{cases}$$

(b) (1 pto) Explica brevemente cómo se resuelve el problema (1) haciendo uso del método de los elementos finitos.

4. **(1 pto)** Calcula la solución del siguiente problema de Cálculo de Variaciones:

$$\underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I\left(u\right) = \int_0^1 \left[2xu'\left(x\right) + \left(u'\left(x\right)\right)^2\right] dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable, } u\left(0\right) = 1\}.$$

5. **(2 ptos)** Calcula la solución del problema de control óptimo

$$\underset{u}{\text{Minimizar}} \quad J\left(u\right) = \int_0^2 \left[x_1\left(t\right) + u^2\left(t\right)\right] dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'\left(t\right) = x_2\left(t\right) \\ x_2'\left(t\right) = u\left(t\right) \\ x_1\left(0\right) = 0 \\ x_2\left(0\right) = 0 \\ u\left(t\right) \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \quad \text{para todo } t > 0. \end{cases}$$

Indicaciones: Duración: 2h 30m. No se permite el uso de calculadora.