Examen de Teoría. Convocatoria Septiembre 2009

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(\text{PCV}) \qquad \underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_0^1 \left[\frac{(u'(x))^2}{2} - f(x)\,u(x) \right] dx,$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = u(1) = 0\}$$

y

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Explica cómo se resuelve este problema numéricamente haciendo uso del Método de los Elementos Finitos.

2. **(1 pto)** Una empresa produce tres bienes cuyos costes e ingresos totales son

$$C = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

y

$$I = 2x_1 + 8x_2 + 10x_3,$$

respectivamente. Las variables x_i, $1 \leq i \leq 3$, representan las cantidades del bien i producido y vendido (se supone que se vende todo lo que se produce). Cada unidad del bien i requiere C_i unidades de materia prima. Supongamos que están disponibles 20 unidades de materia prima y que $C_1 = 4$, $C_2 = 6$ y $C_3 = 8$. Escribe un modelo matemático que nos permita determinar el número de unidades a producir de cada bien para que la empresa maximize sus beneficios.

3. Consideremos el problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar} \qquad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Se pide:

(a) (**0.75 ptos**) ¿Tiene solución este problema?. ¿Por qué?. En caso afirmativo, calcúlala.

(b) (**0.25 ptos**) Respecto a las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn-Tucker para este problema, ¿son suficientes?, es decir, ¿es cierto que toda solución del sistema de Kuhn-Tucker asociado es solución de nuestro problema?. ¿Por qué?.

4. Consideremos el problema de Bolza

$$(\text{PB}) \qquad \underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_0^1 \left[\left((u'(x))^2 - 1 \right)^2 + u^2(x) \right] dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = u(1) = 0\}$$

Se pide:

(a) (**0.25 ptos**) ¿Qué significa que este problema no tenga solución?.

(b) (**0.5 ptos**) Explica el concepto de sucesión minimizante para este problema y describe cómo es una tal sucesión minimizante.

(c) (**0.25 ptos**) ¿Por qué la ecuación de Euler-Lagrange *no* proporciona información útil para poder resolverlo?.

5. **(3 ptos)** Consideremos el problema de control óptimo

$$\underset{u}{\text{Minimizar}} \quad J(u) = \int_0^T dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'(t) = 1 \\ x_2'(t) = u(t) \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \\ x_1(T) = 0 \\ x_1(T) = 0 \\ |u(t)| \leq \frac{\pi}{20} \end{cases}$$

Calcula la solución de este problema en los dos casos siguientes:

(a) $x_1^0 < 0$, $x_2^0 > 0$.

(b) $x_1^0 < 0$, $x_2^0 < 0$.

Indicaciones: Duración: 2h 30m. No se permite el uso de calculadora.