Examen de Teoría. Convocatoria Septiembre 2011

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal

$$(\text{PPNL}) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & \\ & g(x) \leq 0. \end{cases}$$

Supongamos además que $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\} = [a, b]$, con g convexa, y que f es estrictamente convexa en dicho intervalo $[a, b]$. El problema dual asociado a (PPNL) se define como

$$(^{\star}\text{PPNL}) \begin{cases} \text{Maximizar} & \Theta(\mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, u) \\ \text{sujeto a} & \\ & \mu \geq 0, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) + \mu g(x)$. Dibuja $\Theta(\mu)$ para los casos $\mu > 0$, $\mu \to +\infty$, y $\mu = 0$. Demuestra también gráficamente que la solución del dual se obtiene para $\mu = 0$ y que los costes óptimos de (PPNL) y (*PPNL) coinciden.

2. **(1 pto)** Tres empleados de una empresa tienen que realizar seis tareas distintas. El empleado i puede realizar a_{ij} unidades de la tarea j en una hora y se le paga c_{ij} euros por hora de trabajo en la tarea j. El número total de horas que el empleado i puede realizar es b_i, y el número de unidades que se requieren para finalizar la tarea j es d_j. Denotemos por x_{ij} el número de horas que el empleado i dedica a la tarea j. Obviamente se desea minimizar el coste necesario para realizar todas las tareas por lo que se ha de elegir convenientemente el número de horas que cada empleado dedica a cada tarea. Escribe un modelo matemático para este problema.

3. **(1.5 ptos)** Resuelve el siguiente problema de Cálculo de Variaciones

$$\underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x) - u(x))^2 \, dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0, 1] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable, } u(0) = 0\}.$$

Justifica también que el resultado que has obtenido es el correcto.

4. Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(PCV) \quad \underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_0^L F(x, u(x), u'(x)) \, dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [0, L] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable, } u(0) = \alpha, \quad u(L) = \beta\},$$

y

$$\begin{array}{rccc} F: & [0, L] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, \lambda, \xi) & \longmapsto & F(x, \lambda, \xi) \end{array}$$

Se pide:

(a) **(1 pto)** Demuestra que si F es convexa respecto a (λ, ξ) para cada x fijo, y u es solución del problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right] = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u(x), u'(x)) \\ u(0) = \alpha, \quad u(L) = \beta, \end{cases}$$

entonces u es solución de (PCV).

(b) **(0.5 ptos)** Consideremos el problema siguiente: encontrar $u \in \mathcal{A}$ tal que

$$\int_0^L \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u(x), u'(x))\, v(x) + \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\, v'(x)\right] dx = 0$$

para toda v que cumple $v(0) = v(L) = 0$. Explica brevemente qué relación tiene este problema con el problema de Cálculo de Variaciones (PCV).

5. **(2 ptos)** Calcula la solución del problema de control óptimo

$$\underset{u}{\text{Minimizar}} \quad J(u) = \int_0^1 \left[3x_1(t) - 3u(t) - u(t)^2\right] dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ u(t) \in [0, 2] \quad \text{para todo } t > 0. \end{cases}$$

Una vez calculado el control óptimo $u(t)$ no es necesario calcular el estado óptimo.

Indicaciones: Duración: 2h 30m. No se permite el uso de calculadora.