Examen de Teoría. Convocatoria Septiembre 2012

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal sin restricciones

$$\text{Minimizar} \quad f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

El esquema numérico básico para resolver este problema tiene la forma

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

donde el vector inicial $x^0 = \left(x_1^0, \cdots, x_n^0\right)$ se ha de elegir, en la medida de lo posible, cerca del vector solución. Explica brevemente qué son, en el algoritmo anterior, el número α_k y el vector d^k, y explica también cómo se calculan. En el caso del vector d^k, explica cómo se calcula siguiendo un método cuasi-Newton.

2. **(1 pto)** El coste de transportar arena de un lugar a otro en un contenedor (en forma de cubo) de dimensiones x (longitud), y (anchura) y z (altura) es de 2 euros por cada viaje completo. Suponiendo que el precio del material de las paredes superior e inferior, y de los laterales del contenedor son el triple y el doble, respectivamente, de las paredes anterior y posterior, econtrar las dimensiones óptimas del contenedor que minimiza el precio de transporte de $50m^3$ de arena. Nótese que el precio del transporte incluye el precio del contenedor (el cual a su vez depende de las dimensiones de éste) más el número de viajes que se realizen para transportar toda la arena.

3. **(2 ptos)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones siguiente:

$$\underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I\left(u\right) = \int_a^b F\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right) dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \left\{u : [a,b] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable y } u\left(a\right) = u\left(b\right) = 0\right\}.$$

Demuestra que la ecuación de Euler-Lagrange clásica asociada a este problema está dada por

$$\text{(E-L)} \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right)\right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right) \quad \text{en} \quad [a,b] \\ u\left(a\right) = u\left(b\right) = 0. \end{cases}$$

Explica también qué es la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange y cuál es su utilidad.

4. Consideremos el problema de control óptimo

$$\text{Minimizar} \quad \int_0^1 \left(x\left(t\right) + u^2\left(t\right)\right) dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x'\left(t\right) = x\left(t\right) + u\left(t\right) \\ x\left(0\right) = 1. \end{cases}$$

Se pide:

   (a) **(1 pto)** Resuelve el problema anterior y justifica que las condiciones necesarias de optimalidad son también suficientes.

(b) **(1 pto)** Supongamos que en el problema de control óptimo anterior añadimos la restricción

$$|u(t)| \leq 0.5 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Resuelve el problema en este nuevo caso.

5. Responde de manera razonada a las siguientes prefuntas:

(a) **(0.5 ptos)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(\text{PCV}) \begin{cases} \text{Minimizar} & I(u) = \int_0^1 \left[u(x) + e^{u'(x)} \right] dx \\ \text{sujeto a} & \\ & u \text{ suave} \\ & u(1) = 0 \end{cases}$$

¿Cuál es la condición de transversalidad para este problema?

(b) **(0.5 ptos)** ¿ Tiene solución el siguiente problema de programación no lineal? ¿Por qué?

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Indicaciones: Duración: 2h. No se permite el uso de calculadora.