1. **La baquistócrona.** Pese a que desde tiempos de la civilización griega, los problemas de Cálculo de Variaciones han estado de un modo u otro presentes, el problema que planteamos a continuación se puede considerar quizás como el problema que posibilitó el inicio del Cálculo de Variaciones como disciplina de auténtico peso específico dentro del Análisis Matemático. El problema fue formulado por Johann Bernoulli sobre 1696. Sin embargo, fue el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral a cargo de Newton y Leibniz el que permitió a Euler en 1744 descubrir su famosa ecuación de Euler, hoy día conocida como ecuación de Euler-Lagrange, la cual ocupa un lugar destacadísimo dentro del Cálculo de Variaciones. Pero volviendo al problema de la baquistócrona (del griego *bahistos*, el más corto + *cronos*, tiempo), su enunciado es el siguiente: supongamos que queremos diseñar un pequeño tobogán u alambre que conecte un punto A con otro punto situado más abajo B de modo que si pudiéramos hacer desdencer un niño o una pequeña bola (*sin fricción*) por el tobogán u alambre, el tiempo necesario para ir desde A hasta B fuese mínimo. La pregunta es: ¿Cúal ha de ser la forma del tobogán u alambre?. Comprueba, en primer lugar, que el modelo matemático para este problema consiste en minimizar el funcional

$$I(u) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{2gu(x)}}dx$$

sobre el conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{u : [0, a] \to \mathbb{R},\ u \in C^1 \text{ y } u(0) = 0,\ u(a) = b\right\},$$

donde g es la gravedad y $A = (0, 0)$, $B = (a, b)$.

2. **¿Primero optimizar y luego discretizar? o ¿primero discretizar y luego optimizar?** En ocasiones, como sucede con el caso del problema de la baquistócrona, la ecuación de Euler-Lagrange resulta ser tan complicada que es aconsejable usar algún algoritmo numérico adecuado para resolverla. Se produce así un proceso en el que para resolver un problema de Cálculo de Variaciones, *primero se optimiza* (es decir, se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange), *y luego se discretiza* (para resolverla numéricamente). Otro punto de vista diferente para resolver un problema de Cálculo de Variaciones consiste en *primero discretizar y luego optimizar.* Es ésta la alternativa que analizamos en este ejercicio. Para ello, vamos a reducir "ligeramente" nuestro conjunto de admisibilidad para el problema de la baquistócrona. Supongamos que dividimos el intervalo $[0, a]$ en $N-$subintervalos de igual longitud $h = \frac{a}{N}$ de modo que

$$[0, a] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_{k-1}, x_k], \qquad \text{con } x_0 = 0 \text{ y } x_k = kh.$$

Consideremos ahora el nuevo conjunto de admisibilidad

$$\mathcal{A}_N = \left\{u : [0, a] \to \mathbb{R},\ u(0) = 0,\ u(a) = b \text{ y además } u|_{[x_{k-1}, x_k]} \text{ es un segmento de línea recta}\right\}.$$

Comprueba que si optimizamos sobre el conjunto $\mathcal{A}_N$ el tiempo de descenso viene dado por

$$T_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{2\sqrt{h^2 + (u_k - u_{k-1})^2}}{\sqrt{2gu_k} + \sqrt{2gu_{k-1}}}$$

donde $u_k = u(x_k)$. ¿Qué tipo de problema obtenemos si ahora minimizamos en $(u_k)_{k=1}^{n-1}$ el tiempo T_N ?

3. **El problema de la reina Didon de Carthago.** Cuenta Virgilio en la Eneida que cuando la reina Didon fundó la ciudad de Carthago (en Túnez) "*le fue concebida como la superficie que se pudiera encerrar en una piel de buey*". La reina tuvo la feliz idea de recortar esta piel en correas finas y cercar de esta forma la que finalmente sería la expléndida ciudad de Carthago a orillas del mar mediterráneo. En términos matemáticos, el problema se formula de la siguiente forma: calcular la curva de longitud fija L que uniendo los puntos $(0,0)$ y $(D,0)$ encierra mayor área respecto del eje X. Comprueba que el modelo matemático para este problema consiste en maximizar el funcional

$$I(u) = \int_0^D u(x)\,dx$$

sujeto a las restricciones

$$D \geq 0, \quad u(0) = 0, \quad \int_0^D \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx = L.$$

Comprueba también que la solución óptima es un semi-círculo.

4. **Dinámica y Mínima Acción: el principio de Hamilton**. Uno de los retos que ocupan actualmente a muchos físicos teóricos es la búsqueda de un principio (o teoría) general donde tenga cabida conjuntamente las teorías de la relatividad general y de la mecánica cuántica. El problema no es nuevo y ya en el siglo XVIII se buscaba también un principio general que englobase como caso particular la mecánica clásica de Newton. En esta búsqueda, los científicos de la época tuvieron oportunidad de contemplar varios comportamientos curiosos de la naturaleza. Por ejemplo, observaron que un rayo de luz sigue la trayectoria más rápida a través de un medio óptico; que la forma de equilibrio de una cadena colgante es la que minimiza su energía potencial, y que las burbujas de jabón adquieren la forma que tenga la menor superficie para un volumen dado. Todos estos hechos y muchos otros sugirieron a Euler que *la naturaleza se comporta de la mejor manera posible* persiguiendo un objetivo eficiente, económico, lo que hoy llamamos un principio variacional. No debe sorprendernos el dicho: *la naturaleza es sabia o la naturaleza siempre busca lo mejor.* Tuvieron que pasar casi 100 años hasta que el irlandés Willian R. Hamilton (1805-1865) formulase su famoso *principio de mínima acción* el cual, en algún sentido, realizaba el sueño de Euler y que situó, sin ninguna duda, al Cálculo de Variaciones como una de las disciplinas de mayor interés científico. De hecho, científicos de la talla de Feynman consideran a *este principio el más general de que dispone la Física actual.* Justificaremos esta afirmación a lo largo de este ejercicio. En términos mecánicos, para un móvil que se desplaza de un punto a otro siguiendo una trayectoria u en tiempo T, el principio de Hamilton lo podemos formular de una manera sencilla a partir del concepto de acción : ésta se define como la integral de la energía cinética menos la potencial, esto es,

$$I(u) = \int_0^T (T - V)\,dx$$

donde T es la energía cinética y V la potencial. Obviamente, ambas dependen de la trayectoria u. Se tiene entonces:

PRINCIPIO DE HAMILTON: Si una partícula se desplaza de un punto a otro en un tiempo T, entonces la trayectoria que sigue es aquella para la que la acción $I(\cdot)$ toma un valor estacionario.

Veamos algunos ejemplos concretos:

- La segunda ley de Newton a partir del principio de Hamilton: supongamos una partícula de masa m que se mueve por acción de una fuerza conservativa $\mathbf{F}$, es decir,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\nabla V(x,y,z)$$

con $V(x,y,z)$ la energía potencial, y siguiendo una trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Utiliza la ecuación de Euler-Lagrange y el principio de Hamilton par deducir que entonces se ha de verificar la ecuación

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}.$$

- La ecuación de movimiento de un péndulo simple: supongamos que tenemos un péndulo de masa m y longitud L que se mueve sin fricción. Si denotamos por $\theta(t)$ el ángulo que forma el péndulo con la vertical en el instante t, entonces su energía cinética viene dada por

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

y su energía potencia es

$$E_p = mg(L - L\cos\theta).$$

Comprueba que si aplicamos el principio de Hamilton a esta situación, entonces $\theta(t)$ debe ser solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

- La ecuación de ondas: una cuerda o una barra vibrando de longitud L se puede considerar como la versión continua de un muelle vibrando. O dicho de forma más precisa, un conjnunto infinito de muelles vibrando y conectados en horizontal. Podemos entonces calcular su energía cinética y potencial. En concreto, y para el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, la diferencia de ambas, es decir, la acción de Hamilton viene dada por

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^L \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dxdt$$

donde c es una constante que depende de las propiedades físicas de la cuerda o barra y $u(t,x)$ es la posición de la partícula material x en el tiempo t. Comprueba que la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este funcional es precisamente la famosa ecuación de ondas

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- La ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica: supongamos que en el átomo de hidrógeno tenemos un electrón de masa m y energía total E orbitando alrededor de su núcleo. Al igual que en el caso de la mecánica clásica, hay una *acción* asociada a este fenómeno. Schrödinger observó que dicha acción viene dada por

$$I(\psi) = \int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2 + \left(\frac{1}{r} - E\right)\psi^2\right] dxdydz$$

donde $\psi = \psi(x,y,z)$ es la llamada función de onda en mecánica cuántica (nos indica donde demonios puede estar el electrón), $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es la distancia del electrón al núcleo y $\hbar$ es una constante. Comprueba que la ecuación de Euler-Lagrange asociada tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \frac{1}{r}\psi = E\psi,$$

donde $\Delta\psi$ es el Laplaciano de ψ. Esta es la llamada ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica.

5. **El cable colgante.** El modelo matemático para calcular la forma que adopta un cable de longitud L que está sujeto en los extremos (situados a una distancia $D \leq L$ el uno del otro) y sobre el que únicamente actúa la fuerza debida a su propio peso se obtiene a partir de un proceso de minimización donde lo que se minimiza es la energía potencial de dicho sistema. Dicho modelo se formula como el problema variacional

$$\text{Minimizar} \quad I(u) = \omega \int_0^D u(x)\sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$$

bajo las restricciones

$$u(0) = u(D) = 0, \quad L = \int_0^D \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$$

donde ω representa el pseo por unidad de longitud.

Calcula la solución del problema anterior. Dicha solución se denomina *catenaria* y tiene la forma que estamos acostumbrados a ver en los tendidos eléctricos.

6. **Diseño de un canal.** Supongamos que tenemos un canal sobre el que circula un fluido y cuya sección transversal viene representada a traves de la función $u = u(x)$. Habitualmente, el fluido no llena todo el canal y además se producen pérdidas sobre las paredes del mismo. De este modo, interesa el problema de diseño de un canal donde el área transversal está fija (es la región ocupada por el fluido) y de modo que el perímetro de la sección transversal (sobre la que se producen las pérdidas de fluido) es mínima. Simplificando las constantes físicas (coeficiente de fricción, diámetro hidráulico, rugosidad, etc.) que aparecen en este fenómeno, el problema puede ser modelizado matemáticamente a través del problema variacional

$$\text{Minimizar} \quad I(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$$

bajo las restricciones

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u \geq 0, \quad A = \int_0^D u(x)\,dx$$

Resuelve el problema anterior.

7. Se desea diseñar un sistema que genere una señal $x(t)$ para usar en dos procesos distintos. En el primero de estos procesos la señal ideal sería $x(t) = e^{-t}$ mientras que en el segundo lo ideal es que $x'(t) = -1$ para todo $t \in [0,1]$. Como ambas situaciones ideales no pueden conseguirse simultáneamente por ninguna señal $x(t)$ se decide llegar a un compromiso y determinar la mejor señal para la que el funcional

$$I(x) = \int_0^1 \left[\left(x(t) - e^{-t}\right)^2 + \left(x'(t) + 1\right)^2\right] dt$$

sea mínimo. Determinar, caso de existir, la señal óptima si se exige además que $x(0) = 0$, $x(1) = 1/2$.

8. **El problema de Bolza**. Cuando nos enfrentamos a un problema variacional donde falta la propiedad de convexidad nos podemos encontrar con situaciones de no existencia de solución para el problema correspondiente. De hecho, en la actualidad se conoce que este tipo de situaciones aparecen en el diseño óptimo de estructuras, por ejemplo, elásticas, lo que ha dado lugar al estudio de una nueva clase de materiales llamados *composites* o materiales compuestos. Un ejemplo clásico de no existencia de solución para un problema variacional es el llamado problema de Bolza, el cual se formula en los siguientes términos:

$$\text{Minimizar} \qquad I(u) = \int_0^1 \left[\left(u'(x)^2 - 1 \right)^2 + u^2(x) \right] dx$$

sujeto a $u(0) = u(1) = 0$. Comprueba que el ínfimo del funcional anterior es 0 y que por tanto no puede haber mínimo. ¿Cómo crees que pueden ser las sucesiones minimizantes para este problema?

9. Resuelve el siguiente problema variacional

$$\min_{u \in \mathcal{A}} \int_0^1 \left[2xu'(x) + u'(x)^2 \right] dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R},\ u(0) = 1 \}.$$

10. Resuelve el siguiente problema variacional

$$\min_{u \in \mathcal{A}} \int_0^1 u'(x)^2 \, dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \left\{ u : [0,1] \to \mathbb{R},\ u(0) = 0,\ u(1) = 1,\ \int_0^1 u(x)^2 \, dx \le \alpha \right\}$$

11. Resuelve el siguiente problema variacional

$$\min_{u \in \mathcal{A}} \frac{1}{2} \int_0^1 \left(u'(x) - 1 \right)^2 dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R},\ 0 \le u(0) \le 1,\ 0 \le u(1) \le 1/2 \}$$

12. Problemas variacionales con derivadas de orden superior: flexión de una viga elástica. La energía potencial elástica acumulada por una viga de longitud L empotrada en su extremo izquierdo y apoyada en el derecho viene dada (salvo multiplicación por constantes) por

$$P(u) = \int_0^L \frac{u''(x)^2}{\left(1 + u'(x)^2 \right)^{5/2}} dx,$$

donde $u(x)$ es el deplazamiento vertical. Las condiciones de contorno asociadas son

$$u(0) = u'(0) = 0, \qquad u(L) = L_1.$$

Si suponemos que el desplazamiento vertical es muy pequeño, entonces la energía anterior puede ser aproximada por la expresión más sencilla

$$I(u) = \int_0^L u''(x)^2 \, dx.$$

Utiliza el mismo razonamiento que el empleado en clase cuando deducimos la ecuación de Euler-Lagrange para el caso de la flexión de una cuerda elástica para obtener la ecuación de Euler-Lagrange de este problema. En concreto se ha de obtener el problema

$$\begin{cases} u''''(x) = 0, & 0 < x < L \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ u(L) = L_1 \end{cases}$$

Este problema está incompleto: necesitamos una condición de contorno adicional. Comprueba que ésta procede de la correspondiente condición de transversalidad y viene dada por $u''(L) = 0$.

`Los problemas que siguen serán analizados en las prácticas`

13. **Elasticidad Lineal.** Consideremos el siguiente problema de Cálculo de Variaciones

$$\min_{u \in \mathcal{A}} I(u)$$

donde el funcional de energía viene dado por

$$I(u) = \int_0^1 \left[\frac{k(x)}{2} \left(u'(x)\right)^2 - f(x)\,u(x) \right] dx$$

y el conjunto de funciones admisibles es

$$\mathcal{A} = \left\{ u : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ u \in C^1(0,1) \ , \ u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

El funcional $I(\cdot)$ nos mide la energía que posee una cuerda elástica sujeta en los extremos y sobre la que actúa la fuerza f en dirección vertical. La función $k(x)$ depende de las propiedades elásticas de la cuerda y satisface la relación

$$0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1 < \infty.$$

Finalmente, la función $u = u(x)$ nos mide el desplazamiento vertical que experimenta la cuerda.

Calcula y resuelve tanto analíticamente como numéricamente (usando elementos finitos) la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema anterior en los siguientes casos:

(i) $k = 1,\ f(x) = cte.$

(ii) $k = 1,\ f(x) = \sin(n\pi x)\,,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ Estudia, en este caso, el comportamiento del sistema cuando $n \to \infty$.

(iii) $k = 1,\ f(x) = \delta_{1/2}$, es decir una carga puntual situada en el punto medio de la cuerda.

En cada uno de los casos anteriores analiza la diferencia del error entre las soluciones analíticas y las numéricas.

14. **Electrostática.** Sea Ω un disco circular de radio 1 que tiene permitividad eléctrica $\varepsilon = 1$. Supongamos también que sobre dicho disco tenemos una distribución de cargas eléctricas de densidad constante $\rho = 1$. Supongamos finalmente que el potencial sobre la frontera de dicho círculo es constante e igual a cero, esto es, $V = 0$ sobre $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$. Se pide:

(i) Calcula la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional

$$I(u) = \int\int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon}{2} \left| \overrightarrow{\mathbf{E}} \right|^2 - \rho V \right] dxdy$$

(ii) Resuelve la ecuación obtenida en el apartado anterior usando el Toolbox de PDE de MatLab.

(iii) Comprueba que la función

$$u(x,y) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{4}$$

es solución del problema variacional anterior.

(iv) Refina el mallado utilizado para resolver el apartado (ii) y analiza la evolución del error entre la solución numérica que se va obteniendo y la solución exacta dada en (iii).

15. **Superficies minimales**. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Consideremos la superficie

$$S = \{(x, y, u(x,y)) : \quad (x,y) \in \Omega\}.$$

Recordemos del Cálculo Vectorial que el área de S viene dada por la fórmula

$$I(u) = \int\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dxdy.$$

Consideremos ahora el problema siguiente: encontrar la función u de forma que el área asociada a la superficie S sea área mínima, es decir que minimiza $I(u)$, de entre todas las que satisfacen la condición de frontera

$$u = u_0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Se pide:

(i) Comprueba que la ecuación de Euler-Lagrange asociada consiste en el EDP no lineal

$$-\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

(ii) Resuelve dicha ecuación usando el Toolbox de PDE de MatLab para el caso en que Ω es el disco unidad y $u_0(x,y) = x^2$, con $(x,y) \in \partial\Omega$.