1. **Control bang-bang de un sistema modelizado por la ley de Newton.** Consideremos el modelo (o planta)
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \end{cases}$$
donde $x(t) = (x_1(t),\ x_2(t))$ es el estado y $u(t)$ es el control. Nótese que $x_1''(t) = u(t)$ con lo cual el sistema anterior representa la segunda ley de Newton. Típicamente $x_1(t)$ es una trayectoria y $u(t)$ una fuerza. Nos planteamos el siguiente problema de control óptimo: dado un estado inicial $(x_1(0),\ x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$, encontrar el control $u(t)$ de forma que la trayectoria $x(t)$ que parte del estado inicial (x_1^0, x_2^0) en tiempo $t = 0$ alcanza el estado de reposo $(0,0)$ en tiempo mínimo. Es también muy natural imponer algún tipo de restricción sobre el control, por ejemplo, algún tipo de cota de la forma $|u(t)| \leq 1$ (físicamente esto puede representar el hecho de tener una cota sobre la fuerza que actúa sobre el sistema). En lenguaje matemático, nuestro problema se escribe en la forma
$$\text{Minimizar en } u: \quad J(u) = \int_0^T dt$$
sujeto a
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ (x_1(0),\ x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0) \\ (x_1(T),\ x_2(T)) = (0,0) \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$
Resuelve, utilizando el Principio de Pontryagin, este problema. Deduce, a partir de la gráfica del plano de fases, cual es la estrategia de control óptima. Finalmente, elabora un código en Matlab donde se implemente la switching function y utilízala para para calcular las gráficas del control $u(t)$ y estado $x(t)$ óptimos.

2. Resuelve el problema anterior pero eliminando la restricción sobre el control. Dibuja en Matlab las gráficas correspondientes al estado y control óptimos.

3. **Control bang-off-bang de un sistema modelizado por la ley de Newton.** Consideremos de nuevo el sistema descrito en el Ejercicio 1. Bajo las mismas hipótesis sobre los estados iniciales y finales y sobre el control que en dicho ejercicio nos planteamos ahora minimizar el gasto de combustible (control), es decir, pretendemos resolver el problema de control óptimo
$$\text{Minimizar en } u: \quad J(u) = \int_0^T |u(t)|\, dt$$
sujeto a
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ (x_1(0),\ x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0) \\ (x_1(T),\ x_2(T)) = (0,0) \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$
Al igual que en el ejercio 1, resuelve, utilizando el Principio de Pontryagin, este problema. Deduce también cual es la estrategia de control óptima y elabora un código en Matlab donde se implemente la switching function y se dibujen las gráficas del control y estado óptimos.

4. Calcula la solución del problema de control óptimo

$$\text{Minimizar en } u: \qquad J(u) = \int_0^2 \left[x_1(t) + u^2(t) \right] dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ u(t) \in \left[0, \frac{3}{4}\right], \qquad t \geq 0 \end{cases}$$

5. Calcula la solución del problema de control óptimo

$$\text{Minimizar en } u: \qquad J(u) = \int_0^1 u^2(t)\, dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 1 \\ x_1(1) = 0 \end{cases}$$

6. Calcula la solución del problema de control óptimo

$$\text{Minimizar en } u: \qquad J(u) = \int_0^1 -\left[x(t) + u(t)\right] dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + u(t) + t \\ x(0) = 2 \\ u(t) \in [0, 3], \qquad\qquad t \geq 0 \end{cases}$$

7. **Control de las vibraciones de un péndulo lineal.** Resuelve el siguiente problema de tiempo mínimo para el problema del péndulo simple bajo el efecto de pequeñas oscilaciones

$$\text{Minimizar en } u: \qquad J(u) = \int_0^T dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + u(t) \\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0.5 \\ x_1(T) = x_2(T) = 0 \\ u(t) \in [-1, 1], \qquad\qquad t \geq 0 \end{cases}$$