1. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) (0.5 ptos) Consideremos el Problema de Programación No Lineal

$$(\text{PPNL}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{sujeto a} & \\ & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0 \end{cases}$$

   donde $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$. Describe brevemente el algoritmo de Uzawa para resolver numéricamente este problema.

   `Solución. Pregunta de teoría estudiada en clase.`

   (b) (0.5 ptos)¿Tiene solución el siguiente Problema de Programación Lineal? ¿Por qué?

$$(\text{PPL}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

   Solución. El problema no tiene solución ya que el conjunto de admisibilidad (que se corresponde con la región del plano situada por encima de la recta $x_1 - x_2 = 2$) es no acotado. Por tanto, si $x_1, x_2 \to -\infty$ siendo el par (x_1, x_2) admisible, entonces $f(x_1, x_2) \to -\infty$.)

   (c) (0.5 ptos) ¿Qué es una sucesión minimizante en un problema de Cálculo de Variaciones?. ¿Cuál es su importancia?. Pon un ejemplo.

   Solución. Considermos el problema unidimensional típico en el Cálculo de Variaciones

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & J(u) = \int_0^L F(x, u(x), u'(x))\, dx \\ u \in \mathcal{A} & \end{cases}$$

   Se dice que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimizante para (P) si cumple: (a) $u_n \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y (b) $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf\{J(u) : u \in \mathcal{A}\}$.
   Las sucesiones minimizantes tienen un interés especial en aquellos problemas de Cálculo de Variaciones que no tienen solución, es decir, cuando el ínfimo del problema no se alcanza en un elemento admisible. La sucesiones minimizantes permiten aproximarnos al valor del ínfimo a través de elementos admisibles. En este sentido, proporcionan *soluciones casi óptimas*. Un ejemplo típico de sucesión minimizante son las funciones en forma de sierra que estudiamos en clase al analizar el problema de Bolza.

   (d) (0.5 ptos) Un concepto importante en la resolución numérica con elementos finitios de los problemas de Cálculo de Variaciones son las llamadas funciones de forma. ¿Qué son las funciones de forma? ¿Dónde aparecen en el esquema de elementos finitos?. Pon un ejemplo de funciones de forma.

   Solución. Por definición, las funciones de forma son la base del espacio vectorial que utilizamos para aproximar el espacio de admisibilidad de un determinado problema de Cálculo de Variaciones. Se construyen a partir de un mallado del dominio donde se estudia el problema, por ejemplo, pongamos el intervalo $[0,1]$ y un mallado equi-espaciado de tamaño h. Si denotamos por $\mathcal{A}_h$ dicho espacio de aproximación, por ejemplo, el asociado a los polinomios de Lagrange de grado 1 y con condiciones de frontera nulas de tipo Dirichlet, entonces cada función de forma ϕ_j es una función continua, lineal sobre cada elemento y con valor 1 en el correspondiente nodo interior j y cero en el resto. Si $u_h \in \mathcal{A}_h$, entonces $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_h^j \phi_j(x)$. La forma débil discretizada por elementos finitos involucra dichas funciones de forma y las hacen aparecer al calcular tanto la matriz de rigidez como el término independiente.

2. **(1 pto)** Supongamos que una fábrica de cervezas produce tres tipos distintos: negra (N), rubia (R) y sin alcohol (S). Para su obtención son necesarios, además de agua y lúpulo, para los cuales no hay límite, malta y levadura, que limitan la capacidad diaria de producción. La siguiente tabla nos da la cantidad necesaria de cada sustancia para producir un litro de cada una de las respectivas cervezas, los kilos disponibles de cada recurso y el beneficio obtenido por litro de cada cerveza producida.

	N	R	S	Disponibilidad
Malta	2	1	2	30
Levadura	1	2	2	45
Beneficio	4	7	3	

Escribe un modelo matemático que nos permita decidir cuánto se debe fabricar de cada tipo de cerveza para que el beneficio total sea máximo. ¿De qué tipo de problema de optimización se trata?

Solución. Denotemos por x_1, x_2, x_3 la cantidad (medida en litros) de cerveza negra (x_1), rubia (x_2) y sin alcohol (x_3) que se debe producir. El modelo matemático para este problema es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Se trata de un problema de programación lineal entera, aunque a efectos prácticos podríamos considerarlo símplemente como un problema de programación lineal.

3. Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(\text{PCV}) \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx \\ \text{sujeto a} & \\ & 0 \leq u(0) \leq 1 \\ & u(1) = 1 \\ & \int_0^1 u(x)\,dx \leq \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Se pide:

(a) **(1 pto)** Comprueba que si este problema tiene solución $u(x)$, entonces dicha solución es de la forma

$$u(x) = y\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

donde las contantes (y, c_1, c_2) son solución del problema

$$
\text{(PNL)} \quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(y, c_1, c_2) = \frac{1}{6}\left(y^2 + 3yc_1 + 3c_1^2\right) \\
\text{sujeto a} & \\
& \frac{y}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 \leq \frac{1}{2} \\
& c_1 + c_2 + \frac{y}{2} = 1 \\
& 0 \leq c_2 \leq 1 \\
& y \geq 0 \\
& y\left(\frac{y}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 - \frac{1}{2}\right) = 0
\end{array}
\right.
$$

Solución. Dado que se trata de un problema de Cálculo de Variaciones con una restricción integral de desigualdad, consideremos el Lagrangiano aumentado

$$\overline{F}(x, \lambda, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + y\lambda$$

donde y es el multiplicador asociado a la restricción de desigualdad. La ecuación de Euler-Lagrange asociada

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi}\left(x, u(x), u'(x)\right)\right) = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \lambda}\left(x, u(x), u'(x)\right)$$

se escribe como

$$u''(x) = y$$

cuya solución general es

$$u(x) = y\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2.$$

Si sustituimos esta expresión en el coste del problema

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (yx + c_1)^2\, dx = \frac{1}{6}\left(y^2 + 3yc_1 + 3c_1^2\right)$$

que se corresponde con el coste en el problema (PNL).
Si imponemos ahora el resto de restricciones,

$$0 \leq u(0) \leq 1 \implies 0 \leq c_2 \leq 1,$$

$$u(1) = 1 \implies \frac{y}{2} + c_1 + c_2 = 1$$

y

$$\int_0^1 u(x)\, dx \leq \frac{1}{2} \implies \int_0^1 \left(y\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right) dx = \frac{y}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 \leq \frac{1}{2}.$$

Finalmente, recordemos que, al ser la restricción de desigualdad, el multiplicador y satisface $y \geq 0$ y además

$$y\left(\int_0^1 u(x)\, dx - \frac{1}{2}\right) = 0 \implies y\left(\int_0^1 \left(y\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right) dx - \frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{y}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

(b) (1 pto) Resuelve el problema (PNL) para el caso $y = 0$. *Indicación:* se recomienda resolver este problema directamente, sin hacer uso de los diferentes métodos explicados en clase.

`Solución.` `En este caso, el problema se reduce a`

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \frac{c_1^2}{2} \\ \text{sujeto a} & \\ & \frac{c_1}{2} + c_2 \leq \frac{1}{2} \\ & c_1 + c_2 = 1 \\ & 0 \leq c_2 \leq 1 \end{cases}$$

`El conjunto de admisibilidad para este problema se reduce a un único punto` $c_1 = 1,\ c_2 = 0$. `Por tanto, ésta es la única solución del problema.`

4. Consideremos el problema de control óptimo

$$(\mathrm{PC}) \begin{cases} \underset{u}{\text{Minimizar}} & J(u) = \int_0^T F(t, x(t), u(t))\ dt \\ \text{sujeto a} & \\ & x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ & x(0) = x^0 \\ & x(T) = x^T. \end{cases}$$

Se pide:

(a) (1 pto) Demuestra que si (x, u) es solución de (PC), entonces existe una función $p(t)$ de modo que la tripleta (x, p, u) es solución del sistema

$$(\mathrm{SO}) \begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial u} \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x^0 \\ x(T) = x^T, \end{cases}$$

donde $H = F + p \cdot f$ es el Hamiltoniano del sistema.

`Solución.` `Pregunta de teoría estudiada en clase.`

(b) (1 pto) Supongamos que para cada t fijo, F es convexa respecto a (x, u) y f es lineal respecto a (x, u). Demuestra que si (x, p, u) es solución de (SO), entonces (x, u) es solución de (PC).

`Solución.` `Pregunta de teoría estudiada en clase.`

Indicaciones: Duración: 2h 15m. No se permite el uso de calculadora.