Examen de Teoría. Convocatoria Julio 2011

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & \\ & g(x) \leq 0 \end{cases}$$

donde $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Explica el algoritmo de Uzawa para resolver numéricamente este problema.

`Solución. Pregunta teórica explicada en clase.`

2. **(1 pto)** Un armador de barcos tiene un barco con capacidad de hasta 700 toneladas. El carguero transporta contenedores de diferentes pesos para una determinada ruta. En la ruta actual, el carguero puede transportar algunos (no todos, pues el peso total excede las 700 toneladas permitidas) de los siguientes contenedores:

Contenedor	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
Peso	100	155	50	112	70	80	60	118	110	55

Se trata de averiguar cuáles de los anteriores 11 contenedores se han de transportar de modo que se maximize la carga transportada (es decir, el peso total) y de modo que ésta no exceda la capacidad máxima del barco de 700 toneladas. Escribe un modelo matemático para este problema. ¿De qué tipo de problema de optimización se trata?

`Solución.` Si introducimos la variable

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el contenedor } c_j \text{ se carga} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

el problema se formula matemáticamente como

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x_1, \cdots, x_{10}) = 100x_1 + 155x_2 + 50x_3 + 112x_4 + 70x_5 + 80x_6 \\ & \qquad +60x_7 + 118x_8 + 110x_9 + 55x_{10} \\ \text{sujeto a} & \\ & 100x_1 + 155x_2 + 50x_3 + 112x_4 + 70x_5 + 80x_6 + \\ & +60x_7 + 118x_8 + 110x_9 + 55x_{10} \leq 700. \end{cases}$$

Se trata pues de un problema de programación lineal entera (de hecho binaria).

3. **(1.5 ptos)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$(\text{PCV}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx \\ \text{sujeto a} & \\ & u \text{ suave, } u(a) = \alpha \end{cases}$$

Demuestra que si u es solución de (PCV), entonces u es solución del problema de ecuaciones diferenciales

$$(\text{E-L}) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u(x), u'(x)) \\ u(a) = \alpha \\ \frac{\partial F}{\partial \xi}(b, u(b), u'(b)) = 0. \end{cases}$$

Solución. Pregunta teórica explicada en clase.

4. **(1.5 ptos)** Resuelve el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Solución. Se trata de un problema con coste cuadrático (por tanto, convexo) y restricciones de desigualdad lineales (también convexas). De esta forma, podemos garantizar que toda solución del sistema de Kuhn-Tucker asociado es solución de nuestro problema. La ecuaciones de Kuhn-Tucker para este problema son

$$\text{(KT)} \begin{cases} 2x_1 - \mu_1 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu_1 (1 - x_1 - x_2) = 0 \\ \mu_2 (x_2 - 4) = 0 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0. \end{cases}$$

Analizando todos los posibles casos se tiene:

(a) $\mu_1 = \mu_2 = 0$. De las dos primeras ecuaciones se concluye que $x_1 = x_2 = 0$ que no es admisible por no cumplir las restricciones.

(b) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$. Se tiene entonces que $x_2 = 4$ y sustituyendo en la segunda ecuación $\mu_2 = -8$.

(c) $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$. De las dos primeras ecuaciones se tiene $x_1 = x_2 = \mu_1/2$ y sustituyendo en la tercera ecuación, $x_1 = x_2 = 1/2$. Además, $\mu_1 = 1$. Por tanto, en este caso sí que tenemos una solución del sistema (KT).

(d) $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Resolviendo las restricciones de desigualdad, que en este caso son de igualdad, se obtiene $x_1 = -3$ lo que implica $\mu_1 = -6$.

En resumen, la única solución de (KT) se obtiene del caso (c) y por tanto $x_1 = x_2 = 1/2$ es la solución del problema de partida.

5. Consideremos el problema de control óptimo

$$\text{(PCO)} \begin{cases} \underset{u}{\text{Minimizar}} & J(u) = \int_0^{2\pi} \left[x(t) \sin t + u(t)^2 \right] \, dt \\ \text{sujeto a} & \\ & x'(t) = u(t) \\ & x(0) = 0 \\ & u(t) \in [0, 1]. \end{cases}$$

Se pide:

(a) (0.5 ptos) Estudia la convexidad del problema, es decir, si toda solución del sistema de optimalidad asociado lo es de (PCO).

Solución. La función $F(t, x, u) = x \sin t + u^2$ es lineal en x y cuadrática en u. Por tanto, es convexa. Obviamente, la ley de estado es linea y además el conjunto que da las restricciones sobre el control es el intervalo $[0, 1]$, el cual es convexo. Como consecuencia, toda solución del sistema de optimalidad asociado, lo es de (PCO).

(b) (1.5 ptos) Resuleve (PCO), es decir, calcula el control óptimo $u(t)$.

`Solución.` El Hamiltoniano del problema es

$$H = x \sin t + u^2 + pu.$$

Dado que no hay condición final para la variable de estado, la ecuación del estado adjunto viene dada por

$$\begin{cases} p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\sin t \\ p(2\pi) = 0 \end{cases}$$

cuya solución general es $p(t) = \cos t + c$. Imponiendo la condición final se obtiene

$$p(2\pi) = 0 \iff \cos(2\pi) + c = 0 \implies c = -1.$$

Luego,

$$p(t) = \cos t - 1.$$

Estudiamos ahora la condición de Pontryagin

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = \min_{v \in [0,1]} H(t, x(t), p(t), v),$$

es decir,

$$u^2(t) + p(t) u(t) = \min_{v \in [0,1]} \left\{ v^2 + p(t) v \right\}.$$

La función $G(v) = v^2 + p(t) v$ es una parábola (hacia arriba) con vértice en el punto $v = -p(t)/2 = \frac{1-\cos t}{2}$. Por tanto, la solución del problema de programación no lineal

$$\min_{v \in [0,1]} G(v) \tag{1}$$

depende de la localización de dicho vértice respecto del intervalo $[0,1]$. En concreto,

- Si $\frac{1-\cos t}{2} \in [0,1]$, entonces el mínimo es $v = 1 - \cos t$.
- Si $\frac{1-\cos t}{2} < 0$, entonces el mínimo es $v = 0$.
- Si $\frac{1-\cos t}{2} > 1$, entonces el mínimo es $v = 1$.

Como $\frac{1-\cos t}{2} \in [0,1]$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, se tiene que la solución de (1) y también de (PCO) es

$$u(t) = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Indicaciones: Duración: 2h 15m. No se permite el uso de calculadora.