Examen de Teoría. Convocatoria Junio 2007

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal sin restricciones

$$\text{Minimizar} \quad f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

El esquema numérico básico para resolver este problema tiene la forma

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

donde el vector inicial $x^0 = \left(x_1^0, \cdots, x_n^0\right)$ se ha de elegir, en la medida de lo posible, cerca del vector solución. Explica brevemente qué son, en el algoritmo anterior, el número α_k y el vector d^k, y explica también cómo se calculan. En el caso del vector d^k, explica cómo se calcula siguiendo un método cuasi-Newton.

`Solución:` Pregunta teórica explicada en clase de prácticas. Ver los apuntes de clase.

2. **(1 pto)** Una determinada empresa dispone de dos minas A y B dedicadas a la extracción de carbón. La mina A es capaz de producir diariamente 1 tonelada de carbón de máxima calidad, 2 toneladas de calidad media y 6 toneladas de calidad baja. El coste diario que supone mantener abierta y a pleno rendimiento esta mina (es decir, el coste de producción diario) es de 1000 euros. Por su parte, la mina B produce diariamente 2 toneladas de carbón de máxima calidad, 5 toneladas de calidad media y 6 toneladas de calidad baja. El coste de producción diario para la mina B es de 1400 euros. La empresa recibe un pedido de 90 toneladas de carbón de máxima calidad, 120 de calidad media y 180 de baja calidad. Evidentemente, el propietario de la empresa desea averiguar cuántos días se debe trabajar en cada mina para que el pedido sea satisfecho y el coste total de producción sea mínimo. Escribe un modelo matemático para este problema.

`Solución:` Introducimos las siguientes variables:

$$\begin{cases} x_1 = \text{n}^o \text{ de días de trabajo en la mina } A \\ x_2 = \text{n}^o \text{ de días de trabajo en la mina } B. \end{cases}$$

Como la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de máxima calidad y la mina B produce 2 toneladas de este mismo tipo de carbón, con el fin de satisfacer la demanda de 90 toneladas se ha de verificar la relación

$$x_1 + 2x_2 \geq 90.$$

De forma análoga para el carbón de calidad media y baja se tiene respectivamente

$$\begin{gathered} 2x_1 + 5x_2 \geq 120 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 180. \end{gathered}$$

Obviamente, también se ha de tener $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Por otra parte, el coste de producción de ambas minas viene dado por

$$1000x_1 + 1400x_2.$$

Con todo ello se tiene que el modelo matemático para este problema es el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar} \quad f\left(x_1, x_2\right) = 1000x_1 + 1400x_2$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 120 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 180 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. **(2 ptos)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones siguiente:

$$\underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_a^b F\left(x, u(x), u'(x)\right) dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable y } u(a) = u(b) = 0\}.$$

Demuestra que la ecuación de Euler-Lagrange clásica asociada a este problema está dada por

$$\text{(E-L)} \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u(x), u'(x)) \quad \text{en} \quad [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Explica también qué es la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange y cuál es su utilidad.

`Solución:` Pregunta teórica explicada en las clases de teoría. Ver apuntes de teoría.

4. Consideremos el problema de control óptimo

$$\text{Minimizar} \quad \int_0^T dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - u(t) \\ x(0) = x^0 \\ x(T) = 0 \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{para todo } t > 0, \end{cases}$$

donde $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ es la variable de estado y $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ es el control. Se pide:

(a) (1 pto) Escribe las ecuaciones que nos dan el sistema de optimalidad para este problema y deduce de dichas ecuaciones que el coestado óptimo viene dado por

$$p(t) = c_1 e^{-t},$$

el control óptimo tiene la forma

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p(t) > 0 \\ -1 & \text{si} \quad p(t) < 0 \\ \text{indeterminado} & \text{si} \quad p(t) = 0, \end{cases}$$

y que para el caso $u(t) = C$ constante, estado óptimo es

$$x(t) = \left(x^0 - u\right) e^t + u.$$

(b) (1 pto) Analiza los resultados del apartado anterior en los dos casos siguientes y deduce que la estrategia de control óptima es:

Caso $0 < x^0 < 1$: control $u(t) = +1$ para todo $0 < t < T$, con $T = \log\left(-\frac{u}{x^0-u}\right)$ el tiempo óptimo de control (log denota el logaritmo neperiano), y estado óptimo $x(t) = \left(x^0 - u\right)e^t + u$.

Caso $-1 < x^0 < 0$: control $u(t) = -1$ para todo $0 < t < T$, con $T = \log\left(-\frac{u}{x^0-u}\right)$ el tiempo óptimo de control (log denota el logaritmo neperiano), y estado óptimo $x(t) = \left(x^0 - u\right)e^t + u$.

Observación: Nótese que en este problema no es necesario dibujar ningún plano de fases ya que la variable de estado sólo tiene una componente. Simplemente se ha de resolver el sistema de optimalidad asociado y analizar bien la información contenida en este sistema.

`Solución:` (a) El Hamiltoniano asociado a este problema es

$$H = 1 + p \cdot (x - u).$$

Por tanto, la ecuación para el coestado es

$$p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t)$$

cuya solución general es

$$p(t) = c_1 e^{-t}.$$

Consideremos a continuación la ecuación para el control óptimo que obtenemos del Principio de Pontryagin, esto es, para cada t fijo, si $(x(t), u(t), p(t))$ son el estado, control y coestado óptimos, entonces

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = \min_{-1 \leq v \leq 1} H(t, x(t), v, p(t)).$$

Sustituyendo en la expresión del Hamiltoniano obtenemos

$$-p(t)\,u(t) = \min_{-1 \leq v \leq 1} \left[-p_2(t)\,v\right]$$

con lo que el control óptimo $u(t)$ es de la forma

$$u(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } \ p(t) > 0 \\ -1 & \text{si } \ p(t) < 0 \\ \text{indeterminado} & \text{si } \ p(t) = 0. \end{cases}$$

Nótese que debido a la forma del coestado, el control óptimo ha de ser constante a lo largo del tiempo y con valor $+1$ o -1 dependiendo del signo del coestado. Para ese $u = C$ constante, es fácil integrar la ecuación de estado. En concreto, se tiene que

$$x(t) = c_2 e^t + u.$$

Al imponer la condición inicial $x(0) = x^0$ obtenemos $c_2 = x^0 - u$ con lo cual

$$x(t) = \left(x^0 - u\right)e^t + u.$$

(b) Imponemos ahora la condición final $x(T) = 0$ lo que nos lleva a la ecuación

$$0 = \left(x^0 - u\right)e^T + u$$

de donde

$$e^T = -\frac{u}{x^0 - u}.$$

Si tomamos logaritmos neperianos en la expresión anterior,

$$T = \log\left(-\frac{u}{x^0 - u}\right).$$

Como T ha de ser positivo,

$$-\frac{u}{x^0 - u} > 1. \tag{1}$$

Lógicamente, el tiempo óptimo de control depende del estado inicial x^0. Distinguimos dos casos:

Caso $-1 < x^0 < 0$: en este caso, la condición (1) se cumple con $u = -1$ que es, por tanto el control óptimo.

Caso $0 < x^0 < 1$: se tien ahora que (1) se cumple para $u = +1$.

5. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal siguiente

$$(\text{PPNL}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x \\ \text{sujeto a} & \\ & Bx = 0 \end{array} \right.$$

donde A es una matriz de tamaño $n \times n$, simétrica y definida positiva (todos sus autovalores son estrictamente positivos), B otra matriz de talla $m \times n$ con rango igual a m, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ es la variable de optimización y $b = (b_1, \cdots, b_n)$ un vector dado. Supongamos que el par $\left(x^0, \lambda^0\right) \in \mathbb{R}^{n+m}$ es solución del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax - b + B^T\lambda = 0 \\ Bx = 0. \end{array} \right.$$

¿Es cierto que entonces el vector x^0 es solución de (PPNL)? ¿Por qué?

`Solución:` El sistema de ecuaciones anterior constituye las ecuaciones de Kuhn-Tucker asociadas a (PPNL). Efectivamente, si $\left(x^0, \lambda^0\right) \in \mathbb{R}^{n+m}$ es solución de este sistema, entonces x^0 es solución de (PPNL) ya que el problema es convexo. La matriz Hessiana del coste coincide con la matriz A cuyos valores propios son, por hipótesis, positivos. La restricción de igualdad es lineal.