Ingeniero Industrial
Asignatura: *Optimización y Simulación*
Examen de Teoría. Convocatoria Junio 2013

(1) **(1 pto)** Explica el Método de los Elementos Finitos para resolver el siguiente problema de cálculo de Variaciones:

$$\begin{cases} \text{Minimizar en } u \in \mathcal{A}: & I(u) = \int_0^L \left[\frac{\kappa(x)}{2} (u'(x))^2 - f(x)\,u(x) \right] dx \\ \text{donde} & \mathcal{A} = \{u : [0,L] \to \mathbb{R},\ u \text{ suave},\ u(0) = u(L) = 0\} \end{cases}$$

y siendo $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ una función dada.

(2) **(1 pto)** Una empresa de automóviles ha diseado los prototipos de 7 tipos de vehículos distintos. Un estudio de mercado previo le permite preveer los beneficios netos que reportará cada tipo así como los costes de inversión (en millones de euros) que requiere cada uno de ellos, según muestra la siguiente tabla:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
Beneficios	5	3	7	4	1	6	1
Coste de inversión	5	4	8	2	5	4	10

Se desea determinar qué tipos de vehículos han de fabricarse con el fin de maximizar beneficios, sabiendo que la empresa dispone de un capital de 14 millones de euros para gastos de inversión. Escribe un modelo matemático para este problema. ¿De qué tipo de problema de optimización se trata?.

(3) Consideremos el problema de programación no lineal

$$(\text{PPNL}) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 - x_2^2 \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

(a) **(0.5 ptos)** ¿Tiene solución este problema? ¿Por qué ?
(b) **(0.5 ptos)** ¿Es convexo el conjunto de admisibilidad para (PPNL)? ¿Por qué ?. ¿Es f convexa? ¿Por qué ?.
(c) **(0.75 ptos)** Resuleve (PPNL) haciendo uso de la teoría de la dualidad.
(d) **(0.25 ptos)** Interpreta geométricamente (PPNL).

(4) **(1.5 ptos)** Resuelve el siguiente problema de Cálculo de Variaciones

$$(\text{PCV}) \begin{cases} \text{Minimizar} & I(u) = \int_0^\pi u'(x)^2\,dx \\ \text{sujeto a} & u(0) = u(\pi) = 0 \\ & \int_0^\pi u(x)^2\,dx = 1. \end{cases}$$

Ayuda: $\int_0^\pi \sin^2(kx)\,dx = \frac{\pi}{2}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

(5) **(1.5 ptos)** Consideremos el problema de control óptimo

$$(\text{PCO}) \begin{cases} \text{Minimizar} & J(u) = \int_0^T [F(t, x(t), u(t))\,dt \\ \text{sujeto a} & \\ & x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ & x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T \end{cases}$$

Supongamos que F es de clase C^1 y convexa respecto a (x,u) para cada t fijo y que f es lineal respecto a (x,u). Demuestra que si (x,p,u) es solución del sistema de optimalidad

$$(\mathrm{SO})\quad \begin{cases} -p'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial u} \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T \end{cases}$$

entonces (x, u) es solución de (PCO).

Indicaciones: Duración: 2h 15m. No se permite el uso de calculadora.

②

$$\begin{cases} \text{Maximizar } 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + \\ \quad + 1x_5 + 6x_6 + 1 \cdot x_7 \\ \text{Sujeto a} \\ \quad 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ \quad + 4x_6 + 10x_7 \leq 14 \end{cases}$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

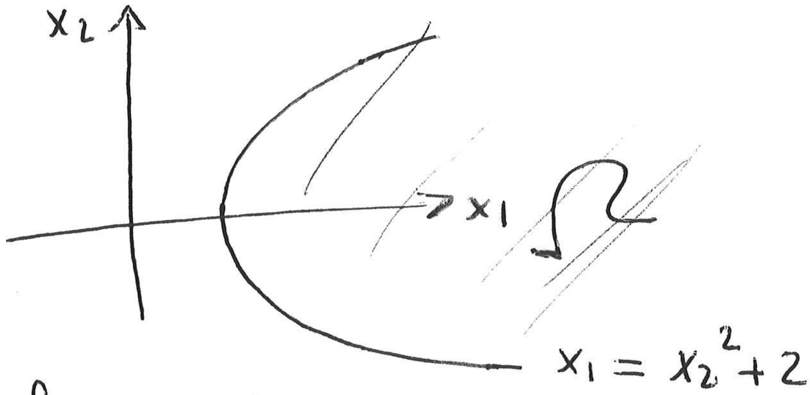
$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se decide fabricar el tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

0

$$(PPNL)\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 - x_2^2 \geq 2 \iff g(x_1,x_2) = -x_1 + x_2^2 + 2 \leq 0 \end{cases}$$

6.5)(1) ¿Tiene solución (PPNL)? ¿Por qué?

- f, g continuas por ser polinomios
- $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2^2 \geq 2\}$ es no acotado



pero f es coerciva en Ω por ser cuadrática.

6.5)(2) ¿Es convexo el conjunto de admisibilidad para este problema? ¿Por qué? ¿Y f, es convexa? ~~en~~

g es convexa pues $Hg(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0.$

f es est^{te} convexa $Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0.$

Por tanto, en efecto f y el conjunto de admisibilidad son convexos.

(0.75) (3) Resuelve este problema haciendo uso de la teoría de la dualidad.

Nótese en primer lugar que como f y g son convexas, el primal y dual son equivalentes.

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \mu(-x_1 + x_2^2 + 2)$$

$$\nabla_{(x_1,x_2)} \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right) = (2x_1 - \mu,\ 2x_2 + 2x_2\mu) = (0,0)$$

$$2x_1 - \mu = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\mu}{2}$$

$$2x_2(1+\mu) = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = 0}$$

$$\searrow \mu = -1 \quad \text{NO}$$

$$\theta(\mu) = \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{2} + 2\mu. = -\frac{\mu^2}{4} + 2\mu$$

<u>Problema dual</u>

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \theta(\mu) = -\frac{\mu^2}{4} + 2\mu \\ \text{sujeto a} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

$$\theta'(\mu) = -\frac{\mu}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 4$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

solución: $x_1 = 2$
$x_2 = 0$

(0.25) (4) Interpreta geométricamente (PPNL).

Se trata de encontrar el punto $(x_1, x_2) \in \Omega$ que está más cerca del $(0,0)$. Obviamente este punto es el $(2,0)$.