Examen de Teoría. Convocatoria Julio 2009

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación no lineal sin restricciones

$$\text{Minimizar} \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Describe brevemente el algoritmo de descenso tipo gradiente a paso óptimo para calcular la solución de este problema.

2. **(1 pto)** El problema de la dieta consiste en determinar las cantidades de distintos alimentos que deben adquirirse de modo que se aseguren ciertas condiciones de nutrición y además se minimize el coste de la compra de dichos alimentos. De manera precisa, sea M el número de nutrientes aconsejado en una determinada dieta, y N el número de alimentos a través de los cuales obtendremos dichos nutrientes. Supongamos conocida la cantidad a_{ij} de nutriente i en el alimento j. Sea ahora b_i, $1 \leq i \leq M$, la cantidad mínima de nutriente i que debe contener nuestra dieta y que puede ser obtenido a través de los distintos alimentos. Finalmente, supongamos conocido el precio c_j, $1 \leq j \leq N$, de cada alimento. Escribe un modelo matemático para determinar la cantidad x_j de cada alimento que hemos de ingerir de modo que se minimize el coste total de la compra y al mismo tiempo se asegure que ingerimos las cantidades mínimas de nutrientes aconsejada. ¿De qué tipo de problema de optimización se trata?

`Solución.` El problema se formula de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad\qquad 1 \leq i \leq M \\ & x_j \geq 0, \qquad\qquad\qquad\quad 1 \leq j \leq N. \end{array}$$

3. Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones

$$\text{(PCV)} \qquad \underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_0^1 \left[\frac{(u'(x))^2}{2} - f(x)\, u(x) \right] dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{ u : [0, L] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = u(1) = 0 \}$$

y

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 0.5 \\ +1 & \text{si} \quad 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Se pide:

(a) **(0.5 ptos)** Escribe la ecuación de Euler-Lagrange asociada a (PCV).

(b) **(0.5 ptos)** ¿Es cierto que cualquier solución de dicha ecuación de Euler-Lagrange también lo es de (PCV)? ¿Por qué?

(c) (1 pto) Supongamos que dividimos el intervalo $[0,1]$ en $N-$subintervalos de igual longitud $h = 1/N$, con N un número par, de modo que

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_{k-1},\ x_k], \qquad \text{con } x_0 = 0 \text{ y } x_k = kh,\ 1 \le k \le N.$$

Consideremos ahora el conjunto

$$\mathcal{A}_h = \left\{ u : [0,L] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = u(1) = 0 \text{ y } \left. u\right|_{[x_{k-1},x_k]} \text{ es un segemento de recta} \right\}$$

y denotemos por $u_k = u(x_k)$. Comprueba que el problema variacional

$$(\mathrm{PCV}_h) \quad \underset{u \in \mathcal{A}_h}{\text{Minimizar}} \qquad I_h(u) = \int_0^1 \left[\frac{(u'(x))^2}{2} - f(x)\, u(x) \right] dx$$

adopta la forma

$$\text{Minimizar en } (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) : \qquad I_h(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$$

donde

$$\begin{aligned} I_h(u_1, \cdots, u_{n-1}) \;=\; & \sum_{k=1}^{N/2} \left[\frac{(u_k - u_{k-1})^2}{2h} + \frac{1}{2}(u_k - u_{k-1})(x_k + x_{k-1}) + (x_k u_{k-1} - x_{k-1} u_k) \right] \\ & + \sum_{N/2+1}^{N} \left[\frac{(u_k - u_{k-1})^2}{2h} - \frac{1}{2}(u_k - u_{k-1})(x_k + x_{k-1}) - (x_k u_{k-1} - x_{k-1} u_k) \right] \end{aligned}$$

¿Qué tipo de problema es el que hemos obtenido?

`Solución.` (a) El Lagrangiano para este problema es

$$F(x, \lambda, \xi) = \frac{\xi^2}{2} - f(x)\,\lambda.$$

Por tanto, la ecuación de Euler-Lagrange clásica ($\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u(x), u'(x))$) para este problema es

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(b) Dado que $F(x, \lambda, \xi)$ es convexa respecto a (λ, ξ) para cada x fijo, efectivamente se tiene que la solución de la ecuación de Euler-Lagrange anterior es también solución de (PCV). Es fácil comprobar que la matriz Hessiana de F viene dada por

$$H_{(\lambda,\xi)} F(x, \lambda, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto sus valores propios son 0 y 1, lo que prueba la convexidad de F respecto a (λ, ξ).

(c) Sobre cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$ cada función $u \in \mathcal{A}_h$ adopta la forma

$$\left. u\right|_{[x_{k-1},x_k]}(x) = \frac{u_k - u_{k-1}}{h} x + \frac{x_k u_{k-1} - x_{k-1} u_k}{h}.$$

Por tanto, si nos limitamos al intervalo $[0, 0.5]$, el coste $I_h(u)$ viene dado por

$$\begin{aligned}
I_h(u) &= \int_0^{0.5} \left[\frac{(u'(x))^2}{2} + u(x) \right] dx \\
&= \sum_{k=1}^{N/2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h} \right)^2 + \frac{u_k - u_{k-1}}{h} x + \frac{x_k u_{k-1} - x_{k-1} u_k}{h} \right] dx \\
&= \sum_{k=1}^{N/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h} \right)^2 h + \frac{u_k - u_{k-1}}{h} \left(x_{k+1}^2 - x_{k-1}^2 \right) + \frac{x_k u_{k-1} - x_{k-1} u_k}{h} h \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N/2} \left[\frac{(u_k - u_{k-1})^2}{2h} + \frac{1}{2} (u_k - u_{k-1})(x_k + x_{k-1}) + (x_k u_{k-1} - x_{k-1} u_k) \right].
\end{aligned}$$

En el intervalo $[0.5, 1]$ se razona de la misma forma pero teniendo ahora en cuenta que $f(x) = 1$ en dicho intervalo.

4. Consideremos el problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 10 \geq 0. \end{array}$$

Se pide:

(a) (0.5 ptos) ¿Tiene solución este problema? ¿Por qué?

(b) (1 pto) Calcula la solución de este problema haciendo uso de la teoría de la dualidad.

(a) Claramente f es coerviva y el conjunto de admisibilidad es no acotado. Por tanto, el problema tiene solución.

(b) El Lagrangiano para este problema viene dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mu(-x_1 - x_2 - x_3 + 10).$$

Por tanto,

$$\nabla_x \mathcal{L} = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - \mu = 0 \\ 2x_2 - \mu = 0 \\ 2x_3 - \mu = 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\mu}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \mu)$ se obtiene el problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \Theta(\mu) = -\frac{3}{4}\mu^2 + 10\mu \\ \text{sujeto a} & \\ & \mu \geq 0. \end{array}$$

Se trata de un problema unidimensional cuya solución se obtiene resolviendo la ecuación

$$\Theta'(\mu) = -\frac{3}{2}\mu + 10 = 0,$$

es decir $\mu = 20/3$. Por tanto, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\mu}{2} = 10/3$.

5. **(1.5 ptos)** Consideremos el problema de control óptimo

$$(\text{PCO}) \left\{ \begin{array}{ll} \underset{u}{\text{Minimizar}} & J(u) = \int_0^T F(t, x(t), u(t)) \, dt \\ \text{sujeto a} & \\ & x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ & x(0) = x^0 \\ & x(T) = x^T. \end{array} \right.$$

Supongamos que para cada t fijo, F es convexa respecto a (x, u) y f es lineal respecto a (x, u). Demuestra que si (x, p, u) es solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial u} \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x^0 \\ x(T) = x^T, \end{array} \right.$$

donde $H = F + p \cdot f$ es el Hamiltoniano del sistema, entonces u es solución de (PCO).

Indicaciones: Duración: 2h 30m. No se permite el uso de calculadora.