PRIMER PARCIAL DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS. ITOP e ITM.

Preguntas	1	2	3	4	5	Total
Puntuación obtenida						

DATOS DEL ALUMNO (RELLÉNALOS TODOS)

Nombre y apellido/s:	
D.N.I.:	
Titulación y grupo:	Firma:
Coordenadas en las que se encuentra sentado: F_____ C_____	
e-mail:	

OBSERVACIONES

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo y D.N.I. o pasaporte.
5. Tienes que rellenar todos los datos solicitados en la tabla de arriba.
6. Duración: 1,5 horas.

---

1. Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + e^x$ de orden 6 y centrado en $a = 0$ (1,5 puntos).

   Solución:

   El polinomio solicitado es $p(x) = 2 + 2\,x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \cdots$.

2. Sean $\beta = \{(1,1,2),(1,3,0),(1,0,0)\}$ y β' dos bases de $\mathbb{R}^3$ y $M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide encontrar la matriz $M_{\beta\beta'}$ (1,5 puntos).

   Solución:

   $$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Estudia si es diagonalizable o no la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y en caso de que lo sea da la matriz diagonal, D, y de paso, P, tales que $D = P^{-1}AP$ (2 puntos).

   Solución:

   La matriz es diagonalizable siendo la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1,2.3,6.5– $\boxed{\text{examen 1}}$

PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICAS. PARTE I

Preguntas	1	2	3	4	5	Total
Puntuación obtenida						

DATOS DEL ALUMNO (RELLÉNALOS TODOS)

Nombre y apellido/s:	Firma:
D.N.I.:	
Titulación y grupo:	
Coordenadas en las que se encuentra sentado: F_____ C_____	
e-mail:	

OBSERVACIONES

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo y D.N.I. o pasaporte.
5. Tienes que rellenar todos los datos solicitados en la tabla de arriba.
6. Duración: 1,5 horas.

---

1. Sea $p(x) = x^5 + 2\,x^4 + 3\,x^2 + 6$ el polinomio de Taylor de una función $f(x)$ centrado en 0. Se pide calcular $f(0) + f'(0) + f''(0) + f'''(0) + f^{(5)}(0)$ (1,5 puntos).

   Solución:

   $f(0) + f'(0) + f''(0) + f'''(0) + f^{(4)} + f^{(5)}(0) = 132.$

2. Sean $\beta = \{(1,1,2),(1,3,0),(1,0,0)\}$ y β' dos bases de $\mathbb{R}^3$ y $M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide encontrar la base β' (1,5 puntos).

$$\beta' = \{(\boxed{},\boxed{},\boxed{}),(\boxed{},\boxed{},\boxed{}),(\boxed{},\boxed{},\boxed{})\}$$

   Solución:

$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $M_{\beta_c\beta'} = M_{\beta_c\beta}M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

luego:

$$\beta' = \{[-3,-5,1],[2,8,-1],[7,-1,-1]\}$$

1,2.3,6.5–$\boxed{\text{examen 2}}$

3. Estudia si es diagonalizable o no la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y rellena los huecos en la matriz diagonal, D, y de paso, P, tales que $D = P^{-1}AP$:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & \square & \square \\ 2 & 1 & 1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square \end{pmatrix} \qquad \underline{(2 puntos)}.$$

Solución:

La matriz es diagonalizable siendo la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICAS. PARTE II

Preguntas	1	2	3	4	5	Total
Puntuación obtenida						

DATOS DEL ALUMNO (RELLÉNALOS TODOS)

Nombre y apellido/s:	Firma:
D.N.I.:	
Titulación y grupo:	
Coordenadas en las que se encuentra sentado: F_____ C_____	
e-mail:	

OBSERVACIONES

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo y D.N.I. o pasaporte.
5. Tienes que rellenar todos los datos solicitados en la tabla de arriba.
6. Duración: 1,5 horas.

---

1. (2 puntos). Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal con matriz asociada respecto de las bases canónicas $M_{\beta_c\beta_c}(f)=\begin{pmatrix}8&7&5\\8&7&5\\5&4&3\end{pmatrix}$ y sea la base $\beta=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, se pide calcular:

   a) La matriz $M_{\beta\beta}(f)=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix}$ **Solución:**

   $$M_{\beta\beta}(f)=\begin{pmatrix}12&9&5\\8&6&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

   b) Las ecuaciones de Im f respecto de la base canónica Im $f=\{(x,y,z):\qquad\qquad\}$
   Solución:
   Im $f=\{(x,y,z):3\,y-3\,x=0\}$

   c) Bases β' y β'' de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\beta'\beta''}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. Calcula la primitiva $\int\frac{x+2}{x^2-2\,x+37}\,dx$ (1,5 puntos).

   El restultado es $\boxed{}$ arctan $\left(\boxed{}\right)+\boxed{}$ log $\left(\boxed{}\right)$

   Solución:

1,2.3,6.5– $\boxed{\text{examen 3}}$

$$\int \frac{x+2}{x^2-2\,x+37}\,dx = \frac{\log\left(x^2-2\,x+37\right)}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{2\,x-2}{12}\right)}{2}$$

3. (1,5 puntos). Sean $U =< [1,1,2]\,, [1,3,0] >$ y $V =< [5,0,0] >$ y $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Se pide:

   a) Calcular las ecuaciones cartesianas de U respecto de la base β **Solución:**

   $$U = \{(x,y,z)_\beta : 6\,z+4\,y+2\,x=0\}$$

   b) Calcular las ecuaciones cartesianas de V respecto de la base β **Solución:**

   $$V = \{(x,y,z)_\beta : x=y=0\}$$

   c) Calcular las ecuaciones cartesianas de $U \cap V$ respecto de la base β **Solución:**

   $$V = \{(x,y,z)_\beta : x=y=z=0\}$$

   d) Calcular una base de $U+V$, expresando las coordenadas de sus vectores en la base β **Solución:** Como $\dim(U+V)=3$ entonces podemos tomar

   $$\beta_{U+V} = \{(1,0,0)_\beta,(0,1,0)_\beta,(0,0,1)_\beta\}$$

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. PARTE II DEL EXAMEN

Preguntas	1	2	3	4	5	Total
Puntuación obtenida						

DATOS DEL ALUMNO (RELLÉNALOS TODOS)

Nombre y apellido/s:	Firma:
D.N.I.:	
Titulación y grupo:	
Coordenadas en las que se encuentra sentado: F_____ C_____	
e-mail:	

OBSERVACIONES

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo y D.N.I. o pasaporte.
5. Tienes que rellenar todos los datos solicitados en la tabla de arriba.
6. Duración: 1,5 horas.

---

1. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ dos funciones definidas por $f(x,y)=\left[y+x^2,\operatorname{sen}\left(y^3+x\right),y+x\right]$ y $g(x,y,z)=\left[e^{y+x},\cos\left(y^2+x^2\right),x\,y^4\,z,z\right]$, encuentra la matriz jacobiana

$$Jg\circ f(0,0)=\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \qquad \underline{(1,5 puntos)}.$$

Solución:

Usando la fórmula $Jg\circ f(0,0)=Jg(f(0,0))\cdot Jf(0,0)=Jg(0,0,0)\cdot Jf(0,0)$ tenemos que:

$$Jg\circ f(0,0)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

1,2.3,6.5–$\boxed{\text{examen 4}}$

2. Calcula qué ternas de números reales positivos sumando entre 6 y 9 se pueden elegir para que tengan producto máximo y mínimo (2 puntos).

   Solución:

   Se trata de maximiar la función $f(x,y,z) = xyz$ en el conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : 6 \leq x+y+z \leq 9\}$. Como Ω es un conjunto compacto y f es continua tenemos que f alcanzará un máximo y un mínimo absoluto en Ω. Vamos a calcularlos.

   Buscamos los extremos relativos de la función en el interior, para ello igualamos el gradiente a 0:

   $$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) = (0,0,0)$$

   Esta ecuación no tiene puntos en el interior de Ω porque sus soluciones son los puntos que están en las aristas del tetraedro que coinciden con los ejes de coordenadas.

   Seguidamente buscamos los candidatos a extremos en la frontera de Ω. Empezamos buscando en el el plano $x+y+z=9$. La función lagrangiana es $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda(x+y+z-9)$ y los candidatos a extremos condicionados satisfacen:

   $$\nabla L(x,y,z) = (yz+\lambda, xz+\lambda, xy+\lambda) = (0,0,0)$$

   Esta ecuación junto a la ligadura $x+y+z=9$, tiene como solución a los puntos:

   $$P_1 = (9,0,0), P_2 = (0,9,0), P_3 = (0,0,9), P_4(3,3,3)$$

   Seguimos buscando en el el plano $x+y+z=6$. La función lagrangiana es $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda(x+y+z-6)$ y los candidatos a extremos condicionados satisfacen:

   $$\nabla L(x,y,z) = (yz+\lambda, xz+\lambda, xy+\lambda) = (0,0,0)$$

   Esta ecuación junto a la ligadura $x+y+z=6$, tiene como solución a los puntos:

   $$P_5 = (6,0,0), P_6 = (0,6,0), P_7 = (0,0,6), P_8(2,2,2)$$

   El resto de puntos de la frontera de Ω forman parte de los planos coordenados y todos los puntos son máximos y mínimos relativos condicionados porque la función f vale 0. A estos puntos los denotaremos genéricamente por Q

   Ya tenemos todos los puntos candidatos a extremos. Calculamos: $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = f(P_5) = f(P_6) = f(P_7) = f(Q) = 0$, $f(P_4) = 27$, $f(P_8) = 8$. Luego P_4 es el máximo absoluto de la función f y todos los puntos denotados genéricamente por Q son mínimos absolutos.

3. Calcula el volumen limitado por las gráficas de las funciones $z_1 = 2(x^2+y^2)$ y $z_2 = 5 - 3(x^2+y^2)$ (1,5 puntos).

   Solución:

   Debemos integrar sobre el recinto $z_1 = z_2$, círculo de centro el origen y radio 1, la diferencia $z_2 - z_1$. Usando coordenadas polares tenemos: $V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (5-5r^2) r d\theta dr = \frac{5\pi}{2}$.