Exámenes de Fundamentos matemáticos. Escuela de Ingeniería Técnica Civil. Ingeniería técnica de minas y obras públicas.

Gabriel Soler López

17 de julio de 2001

Índice General

Capítulo 1

Curso 1999/2000. Ingeniería técnica de minas.

1.1 Primer parcial.

1.1.1 Opción A. 16 de Febrero de 2000.

Ejercicio 1 (2 puntos). *Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Sea* A *una matriz que cumple* $A^{-1} = A^t$*. Calcular* $|A|$.
2. *¨Todo sistema lineal con más ecuaciones que incógnitas tiene siempre solución?*
3. *Definición de sucesión de Cauchy.*
4. *¨Si* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *entonces* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$*?*
5. *Enuncia el criterio de Stolz.*

Nota: las cuestiones que tengan respuesta afirmativa hay que demostrarlas y las que no hay que dar contraejemplo.

Ejercicio 2 (2 puntos). *Discutir el siguiente sistema dependiendo de los valores de* α *y* β*:*

$$\begin{array}{l} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{array}$$

Ejercicio 3 (2 puntos). *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal definida por* $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, z)$. *Se pide:*

(a) *Matriz de* f *respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}^3$

$$C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

(b) *Hallar las ecuaciones y una base de Ker*(f) *e Im*(f).

(c) *Decir si la aplicación lineal* f *es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.*

(d) *Matriz asociada a* f *respecto de la base*

$$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

Ejercicio 4 (2 puntos).

1. *(1'25 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación. En caso de que lo sea, dar la forma diagonal y la matriz de paso* T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *(0'75 puntos) Calcular la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5 (2 puntos). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3+6+\cdots+3n}{n^2}$
2. $\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt[3]{1+n^3}$

1.1.2 Opción B. 16 de Febrero de 2000.

Ejercicio 6 (2 puntos). *Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Sean* A *y* B *dos matrices cuadradas de tamaño* $n\,x\,n$ *tales que ninguna de ellas es la matriz nula. Demostrar que si* $AB = 0$ *entonces ni* A *ni* B *tienen inversa.*

2. *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $f : V \longrightarrow V$ *una aplicación lineal. Sean* λ *y* μ *dos valores propios reales de* f. *¨Se cumple que* $\lambda + \mu$ *es un valor propio de* f*?*

3. *Definir dimensión de un espacio vectorial.*

4. *Definición de sucesión convergente.*

5. *¨Es cierto que*$|2A| = 2|A|$*?*

Nota: las cuestiones que tengan respuesta afirmativa hay que demostrarlas y las que no hay que dar contraejemplo.

Ejercicio 7 (2 puntos). *Discutir el siguiente sistema dependiendo de los valores de α y β:*

$$
\begin{array}{l}
3x + 3y + 5z + 4u = 9 \\
y - az + 3u = 2 \\
2x - y + 3z + u = b \\
x + 3y + 2z + au = 6
\end{array}
$$

Ejercicio 8 (2 puntos). *Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:*

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Calcula:

1. *La expresión analítica de f en la base canónica.*

2. *Ecuaciones y bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$.*

3. *La matriz de f respecto de las bases*

$$\beta_1 = \{(1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0), (1,1,1,1)\}$$

y

$$\beta_2 = \{(1,1), (0,2)\}$$

4. *rango de f.*

Ejercicio 9. 1. *(1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación en función del parámetro α. En caso de que lo sea, dar la forma diagonal y la matriz de paso T.*

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

2. *(0'5 puntos) Calcular la inversa de la matriz*

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 10 (2 puntos). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$

2. $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

1.2 Segundo examen parcial. 8 de Junio de 2000.

Ejercicio 11 (2 puntos). *1. Enunciar el criterio de Abel.*

2. Dar el enunciado de la regla de Barrow.

3. Definición de norma en $\mathbb{R}^n$ *y dar un ejemplo.*

4. Si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ *entonces*
¿Existe $l_{12} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$*? ¿Cuánto vale?*

5. Regla del cambio de variable en la integral doble.

Ejercicio 12 (2 puntos). *1. (0.5 puntos)Demostrar si la serie* $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ *es convergente. Calcular su suma si lo es.*

2. (0.5 puntos)Dada la función $f(x) = \int_x^1 \log(t)dt$ *calcular* $f'(x)$

3. (1 punto) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$ *de la función* $f(x) = \int_0^x te^{-t}dt$ *y calcular el valor aproximado de* $\int_0^{0.1} te^{-t}dt$*. Estimar el error cometido en la aproximación con el resto de Lagrange.*

Ejercicio 13 (2 puntos). *1. Estudiar el carñcter de convergencia de la integral de primera y segunda especie*

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(e^x+7)}dx$$

2. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

Ejercicio 14 (2 puntos). *Comprobar que la ecuación* $xye^z + z\cos(x^2+y^2) = 0$ *define a* z *como función implícita de* (x,y) *en el punto* $(x,y,z) = (0,0,0)$ *y calcular sus dos derivadas parciales.*

Ejercicio 15 (2 puntos). *Calcular la integral* $\iint_\Omega (x+y)dxdy$ *siendo* $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, x^4 < y < x^3\}$

El olvido de las matemáticas perjudica a todo el conocimiento, ya que el que las ignora no puede conocer las otras ciencias ni las cosas de este mundo. **(Roger Bacon)**

1.3 Examen Final de Junio. 30 de junio de 2000.

Parte de Álgebra

Ejercicio 16 (1 punto). *Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaño $n\,x\,n$ tales que ninguna de ellas es la matriz nula. Demostrar que si $AB = 0$ entonces ni A ni B tienen inversa.*

2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Sean λ y μ dos valores propios reales de f. ¨Se cumple que $\lambda + \mu$ es un valor propio de f?*

3. *Definir dimensión de un espacio vectorial.*

Ejercicio 17 (1 punto). 1. *Definición de sucesión convergente.*

2. *¿Es cierto que$|2A| = 2|A|$?*

Ejercicio 18 (2 puntos). *Discutir el siguiente sistema dependiendo de los valores de α y β:*

$$\begin{array}{l} 3x + 3y + 5z + 4u = 9 \\ y - az + 3u = 2 \\ 2x - y + 3z + u = b \\ x + 3y + 2z + au = 6 \end{array}$$

Ejercicio 19 (2 puntos). *Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. *La expresión analítica de f en la base canónica.*

2. *Ecuaciones y bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$.*

3. *La matriz de f respecto de las bases*

$$\beta_1 = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

y

$$\beta_2 = \{(1, 1), (0, 2)\}$$

4. *rango de f.*

Ejercicio 20. 1. *(1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación en función del parámetro α. En caso de que lo sea, dar la forma diagonal y la matriz de paso T.*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. *(0'5 puntos) Calcular la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21 (2 puntos). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$

2. $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

Parte de Análisis

Ejercicio 22 (1 punto). *1. Definir serie absolutamente convergente de números reales.*

2. Criterio de comparación para integrales de primera especie.

3. Dibujar el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ *y decir si es cerrado o abierto.*

Ejercicio 23 (1 punto). *1. Definir la derivada direccional de* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *respecto a un vector* $v \in \mathbb{R}^n$

2. ¿En qué consiste el cambio a coordenadas esféricas? Calcular su Jacobiano.

Ejercicio 24 (2 puntos). *Comprobar que la ecuación* $xye^{xz} - z\log(y) + 1 = 0$ *define a* z *como función implícita de* x *e* y *en un entorno del punto* $(x, y) = (-1, 1)$ *con* $z(-1, 1) = 0$. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = z(x, y)$ *en el punto* $(-1, 1)$

Ejercicio 25 (2 puntos). *Calcular* $\lim_{a\to+\infty} \int_2^a \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ *demostrando previamente con los criterios habituales que la integral de segunda especie* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-1)}dx$ *es convergente.*

Ejercicio 26 (2 puntos). *1. Calcular* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}$ *para los valores de* $\alpha = 2, 3$.

2. Calcular la integral doble $\int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{-1/2} dydx$ *haciendo un cambio a coordenadas polares.*

Ejercicio 27 (2 puntos). *1. Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n}$ *es convergente y calcular su suma.*

2. Demostrar si son convergentes y absolutamente convergentes las series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$

Notas:

Las cuestiones que tengan respuesta afirmativa hay que demostrarlas y las que no hay que dar contraejemplo.

Los alumnos que se presentan a toda la asignatura deben responder a los ejercicios 1,4,5,8,9,10.

Los que se presenten al primer parcial que respondan a los ejercicios 1,2,3,4,5,6.

Los que se presenten al segundo parcial que respondan a los ejercicios 7,8,9,10,11,12.

SUERTE.

La que llamamos "casualidad"no es más que la ignorancia de las causas físicas. **(Leibnitz)**

1.4 Examen Final de Junio. 7 de septiembre de 2000.

Parte de Álgebra

Ejercicio 28 (1 punto). *Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Discutir si es verdad el enunciado siguiente: si los sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$ son compatibles, entonces también lo es $Ax = b$ donde $b = b_1 + b_2$.*

2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Sean λ y μ dos valores propios reales de f. ¿Se cumple que $\lambda\mu$ es un valor propio de f?*

3. *Dar un ejemplo de un conjunto de vectores generador pero no linealmente independiente en un espacio vectorial.*

Ejercicio 29 (1 punto). 1. *Definición de sucesión de Cauchy.*

2. *¿Es cierto que $|nA| = n|A|$ donde n es el tamaño de la matriz?*

Ejercicio 30 (2 puntos). *Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ y $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ calcular:*

(a) *Un conjunto generador linealmente independiente de W_1 y W_2.*

(b) *Calcular $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.*

(c) *¿Es la suma de W_1 y W_2 directa?.*

(d) *Calcular las dimensiones de* $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

Ejercicio 31 (2 puntos). *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal definida por:*

$$f(1,1,1,1) = (0,0,1) \qquad f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$$
$$f(1,1,1,0) = (0,0,-1) \qquad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$$

Se pide calcular:

1. *La matriz de* f *respecto a las bases canónicas.*
2. *La dimensión y ecuaciones de* $\mathrm{Ker}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *La matriz de* f *respecto de las bases* $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0), (1,1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$, *así como las ecuaciones del núcleo y la imagen de* f *en estas bases.*
4. *El rango de la aplicación.*

Ejercicio 32 (2 puntos). *Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación en función del. En caso de que lo sea, dar la forma diagonal y la matriz de paso* T.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 33 (2 puntos). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n-4}}{\sqrt{n-7}}\right)^{\sqrt{n}}$

Parte de Análisis

Ejercicio 34 (1 punto). 1. *Definición de sucesión de funciones y de convergencia puntual.*

2. *¿Cuál es el Jacobiano de una composición de funciones?.*

3. *Enunciar el teorema de la función inversa.*

Ejercicio 35 (1 punto). 1. *Regla del cambio de variables en la integral doble.*

2. *Enuncia el Teorema Fundamental del cálculo integral*

Ejercicio 36 (2 puntos). *Comprobar que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(x, y, z) = (6, -3, -2)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $(6, -3)$*

Ejercicio 37 (2 puntos). *Dadas la funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x, y) = (y^2, xy, x^3)$ y $g(x, y, z) = (x - z^3, 2x^2 - y, xyz)$ hallar $J(g \circ f)(-1, 1)$ y $J(g \circ f)(0, 0)$.*

Ejercicio 38 (2 puntos). 1. *Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la integral*

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$$

2. *Calcula la integral $f(a) = \int_1^a e^{-x} \sin x \, dx$*

3. *Calcula $\lim_{a \to +\infty} f(a)$*

Ejercicio 39 (2 puntos). 1. *Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+5}{2^n}$ es convergente y calcular su suma.*

2. *Calcular el volumen limitado por $z = 1$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Notas:

Las cuestiones que tengan respuesta afirmativa hay que demostrarlas y las que no hay que dar contraejemplo.

Los alumnos que se presentan a toda la asignatura deben responder a los ejercicios 1,4,5,8,9,10.

Los que se presenten al primer parcial que respondan a los ejercicios 1,2,3,4,5,6.

Los que se presenten al segundo parcial que respondan a los ejercicios 7,8,9,10,11,12.

SUERTE.

No entiendes realmente algo a menos que seas capaz de explicárselo a tu abuela. **(Rousseau)**

1.5 Examen de Diciembre. 13 de diciembre de 2000.

Parte de Álgebra

Ejercicio 40 (1 punto). *Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Sean A y B dos matrices invertibles de tamaño $n \times n$, demostrar que AB es invertible calculando su inversa.*

2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Sean λ y μ dos valores propios reales de f. ¿Se cumple que $\lambda + \mu$ es un valor propio de f?*

3. *Dar la fórmula de la dimensión de suma de subespacios vectoriales.*

Ejercicio 41 (1 punto). 1. *Enuncia el Criterio de Stolz.*

2. *¿Es cierto que$|2A| = 2^n|A|$? (donde n es el número de filas de la matriz A)*

Ejercicio 42 (2 puntos). *Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales generados por $S_1 = \{(1,1,1,1),(1,-1,-1,1)\}$ y $S_2 = \{(1,1,0,1),(1,2,-1,-2),(3,5,-2,5)\}$. Calcular:*

(a) *La base y la dimensión de $< S_1 >$ y $< S_2 >$.*

(b) *Calcular $< S_1 > \cap < S_2 >$ y $< S_1 > + < S_2 >$ dando bases de dichos subespacios.*

(c) *¿Pertenece el vector $(4,0,-2,1)$ a $< S_1 > \cap < S_2 >$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto a la base obtenida en la parte (b).*

(d) *¿Pertenece el vector* $(4,0,-2,1)$ *a* $< S_1 > + < S_2 >$*? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto a la base obtenida en la parte (b)?*

Ejercicio 43 (2 puntos). *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la base* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *y la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida respecto a esta base por la relación:*

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$$

Se pide:

1. *Calcular la matriz de* f *respecto a la base* $\mathcal{B}$.
2. *Calcular el núcleo y la imagen de* f*, es decir: calcular las ecuaciones de ambos subespacios y una base de cada uno de los dos.*
3. *Ampliar la base anterior del núcleo a una base de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Hallar la matriz de* f *respecto a esta nueva base.*
5. *Calcular el rango de* f.

Ejercicio 44. 1. *(1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación en función del parámetro* α.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

2. *(0'5 puntos) Calcular la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 45 (2 puntos). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+2^2+2^3+\cdots+3^n}{n^2+2n+2}$
2. $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

Parte de Análisis

Ejercicio 46 (1 punto). *1. Definir serie absolutamente convergente de números reales.*

2. Criterio de comparación para integrales de segunda especie.

3. Dibujar el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ *y decir si es cerrado o abierto.*

Ejercicio 47 (1 punto). *1. Dada* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *¿Qué es el Jacobiano de* f *en un punto* $a \in \mathbb{R}^n$*?*

2. ¿En qué consiste el cambio a coordenadas cilíndricas? Calcular su Jacobiano.

Ejercicio 48 (2 puntos). *Comprobar que la ecuación* $xye^{xz} - z\log(y) + 1 = 0$ *define a* z *como función implícita de* x *e* y *en un entorno del punto* $(x,y) = (-1,1)$ *con* $z(-1,1) = 0$. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = z(x,y)$ *en el punto* $(-1,1)$

Ejercicio 49 (2 puntos). *1. (1 punto)Probar que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+2}{3^n}$ *es convergente utilizando los criterios habituales y en caso de que lo sea calcular su suma.*

2. (1 punto) Calcular la integral triple $\int_\Omega x dxdydz$ *donde* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Ejercicio 50 (2 puntos). *Calcular* $\lim_{a\to+\infty} \int_2^a \frac{1}{x^2+1}dx$ *demostrando previamente con los criterios habituales que la integral de segunda especie* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ *es convergente.*

Ejercicio 51 (2 puntos). *1. (0,75 puntos) Calcular* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

2. (0,5 puntos)Demostrar si son convergentes y absolutamente convergentes las series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$

3. (0,75 puntos)Dada la función $f(x) = \int_{x^2}^{1} \log(t)dt$ *calcular* $f'(x)$

Notas:

Las cuestiones que tengan respuesta afirmativa hay que demostrarlas y las que no hay que dar contraejemplo.

Los alumnos que se presentan a toda la asignatura deben responder a los ejercicios 1,4,5,8,9,10.

Los que se presenten al primer parcial que respondan a los ejercicios 1,2,3,4,5,6.

Los que se presenten al segundo parcial que respondan a los ejercicios 7,8,9,10,11,12.

SUERTE.

El progreso y el perfeccionamiento de las matemáticas están íntimamente ligados a la prosperidad del Estado. **(Napoleón)**

Capítulo 2

Curso 2000/2001. Ingeniería técnica de obras públicas.

2.1 Primer parcial.

Ejercicio 52 (2 puntos). *En los siguientes apartados se os plantean unas cuestiones. Aquellas que sean verdaderas debéis demostrarlas y para las falsas se os pide dar un contraejemplo. Otros apartados se limitan a pediros unas definiciones.*

a. *La matriz asociada a una aplicación lineal es siempre invertible.*

b. *Dadas dos matrices cuadradas A y B, se tiene que $|A - B| = |A| - |B|$.*

c. *El método de bipartición se puede aplicar a la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ para resolver la ecuación $f(x) = 0$. En caso de que tu respuesta sea afirmativa da un intervalo donde aplicarlo.*

d. *Define lo que es el desarrollo de Taylor de una función.*

e. *¿Qué entiendes por suma directa de dos subespacios vectoriales V y W?*

f. *Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre es compatible indeterminado.*

Ejercicio 53 (2 puntos). *En este ejercicio debes elegir el apartado (a) o el (b):*

a. *Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:*

$$\begin{aligned} ax+y+z+t&=1\\ x+ay+z+t&=b\\ x+y+az+t&=b^2\\ x+y+z+at&=b^3 \end{aligned}$$

b. *Dados los conjuntos* $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+2y=0, y=-z\}$ *y* $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0, y+x=0, y-x=0\}$ *responde a los siguientes apartados:*

(i) Demuestra que V *es un subespacio vectorial.*

(ii) Calcula una base de V *y otra de* W*. Da su dimensión.*

(iii) Determina las ecuaciones de $V\cap W$ *y* $V+W$*.*

(iv) ¿Es la suma $V+W$ *directa?*

Ejercicio 54 (2 puntos). *Sea* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. *La expresión analítica de* f *en la base canónica.*
2. *Ecuaciones y bases de* $\mathrm{Ker}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$*.*
3. *La matriz de* f *respecto de las bases*

$$\beta_1=\{(1,1),(-1,1)\}$$

y

$$\beta_2=\{(1,1,0),(0,2,0),(0,0,-1)\}$$

4. *rango de* f*.*

Ejercicio 55. 1. *(1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación. En caso de que lo sea dar la matriz de paso y la matriz diagonal.*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. *(0'5 puntos) Calcular la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 56 (2 puntos). 1. *¿Qué error máximo cometemos aproximando* $\sin(x)+\cos(x)$ *por* $1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$ *en el intervalo [0,1]?*

2. *Calcular el valor del número* $e^{\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{4})$ *con un error máximo de* 10^{-2}

3. *Calcular* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sin(x)}\right)$

Notas:

No se puede fumar durante toda la prueba.

Poned en todos los folios que utilicéis vuestro nombre, apellidos y D.N.I.

Colocad el D.N.I. sobre la mesa.

Cambio de tutorías para el segundo parcial: Martes y Miércoles de 9h. 30mn. a 12h. 30mn.

SUERTE.

La geometría es el arte de pensar bien, y dibujar mal. **(Poincaré)**

Capítulo 3

Curso 2000/2001. Ingeniería técnica de minas.

3.1 Primer parcial.

Ejercicio 57 (2 puntos). *En los siguientes apartados se os plantean unas cuestiones. Aquellas que sean verdaderas debéis demostrarlas y para las falsas se os pide dar un contraejemplo.*

1. *Dados dos subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$ V *y* W *se tiene que* $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W)$
2. *Define lo que entiendes por aplicación lineal y rango de una aplicación lineal.*
3. *Un sistema con más incógnitas que ecuaciones puede ser compatible determinado.*
4. *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *define lo que se entiende por polinomio característico y espectro de la matriz* A *(denotados por* $p_A(x)$ *y* σ_A *respectivamente).*
5. *¿Se puede aplicar el método de iteración directa o del punto fijo a la función* $f(x) = e^{x-1}$ *en el intervalo* $[0,1]$*?*
6. *La matriz asociada a una aplicación lineal es siempre invertible.*
7. *Dadas dos matrices cuadradas* A *y* B, *se tiene que* $|A-B| = |A| - |B|$.
8. *El método de bipartición se puede aplicar a la función* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *para resolver la ecuación* $f(x) = 0$. *En caso de que tu respuesta sea afirmativa da un intervalo donde aplicarlo.*

9. *Define lo que es el desarrollo de Taylor de una función.*

10. *Da el enunciado de la Regla de L'Hôpital.*

11. *¿Qué entiendes por suma directa de dos subespacios vectoriales V y W?*

12. *Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre es compatible indeterminado.*

Ejercicio 58 (2 puntos). *Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:*

$$\begin{array}{l} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{array}$$

Ejercicio 59 (2 puntos). *Sea $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. *La expresión analítica de f en la base canónica.*

2. *Ecuaciones y bases de* $\mathrm{Ker}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$.

3. *La matriz de f respecto de las bases*

$$\beta_1 = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1)\}$$

y

$$\beta_2 = \{(1,1,0),(0,2,0),(0,0,-1)\}$$

4. *rango de f.*

Ejercicio 60. 1. *(1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación en función de los parámetros α y β.*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta+2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *(0'5 puntos) Calcular la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 61 (2 puntos). 1. *¿Qué error máximo cometemos aproximando* $\cos(x)$ *por* $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ *en el intervalo [-1,1]?*

2. *Calcular el valor del número e con un error máximo de* 10^{-4}

3. *Calcular* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$

Parte de Análisis

Ejercicio 62 (1 punto). *1. Definir serie absolutamente convergente de números reales.*

2. Criterio de comparación para integrales de primera especie.

3. Dibujar el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ *y decir si es cerrado o abierto.*

Ejercicio 63 (1 punto). *1. Definir la derivada direccional de* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *respecto a un vector* $v \in \mathbb{R}^n$

2. ¿En qué consiste el cambio a coordenadas esféricas? Calcular su Jacobiano.

Ejercicio 64 (2 puntos). *Comprobar que la ecuación* $xye^{xz} - z\log(y) + 1 = 0$ *define a* z *como función implícita de* x *e* y *en un entorno del punto* $(x,y) = (-1,1)$ *con* $z(-1,1) = 0$. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = z(x,y)$ *en el punto* $(-1,1)$

Ejercicio 65 (2 puntos). *Calcular* $\lim_{a\to+\infty}\int_2^a \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ *demostrando previamente con los criterios habituales que la integral de segunda especie* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-1)}dx$ *es convergente.*

Ejercicio 66 (2 puntos). *1. Calcular* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}$ *para los valores de* $\alpha = 2, 3$.

2. Calcular la integral doble $\int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{-1/2} dydx$ *haciendo un cambio a coordenadas polares.*

Ejercicio 67 (2 puntos). *1. Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n}$ *es convergente y calcular su suma.*

2. Demostrar si son convergentes y absolutamente convergentes las series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$

Notas:

Las cuestiones que tengan respuesta afirmativa hay que demostrarlas y las que no hay que dar contraejemplo.

Los alumnos que se presentan a toda la asignatura deben responder a los ejercicios 1,4,5,8,9,10.

Los que se presenten al primer parcial que respondan a los ejercicios 1,2,3,4,5,6.

Los que se presenten al segundo parcial que respondan a los ejercicios 7,8,9,10,11,12.

SUERTE.

La que llamamos "casualidad"no es más que la ignorancia de las causas físicas. **(Leibnitz)**

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Ingeniería técnica de Obras Públicas
2 de diciembre de 2005

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. Los valores de n y de m.

Solución: Los valores de n y de m son respectivamente 2 y 3, es decir, el número de columnas y filas de la matriz A.

2. La expresión analítica de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Solución: $f(x,y) = \left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^t = (2x, x+y, 2y)$.

3. El núcleo y la imagen de f.

Solución:

El núcleo

El núcleo de la aplicación f estará formado por aquellos vectores (x,y) tales que $f(x,y) = (0,0,0)$. Es decir, serán los vectores (x,y) que verifican el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ x + y = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$$

Así que resolviendo el sistema se ve que $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$, que una base es $\beta_{\mathrm{Ker} f} = \emptyset$ y que la dimensión es 0.

La imagen

La imagen es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores columna de la matriz A, es decir $\mathrm{Im} f = < (2,1,0),(0,1,2) >$. Como los dos vectores generadores también son linealmente independientes entonces son una base de $\mathrm{Im} f$ y por lo tanto la dimensión del subespacio imagen es 2.

Calculamos ahora sus ecuaciones. Un vector (x,y,z) estará en la imagen si:

$$(x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(0,1,2),$$

es decir:

$$\begin{cases} x = 2\alpha, \\ y = \alpha + \beta, \\ z = \alpha + 2\beta. \end{cases}$$

Ahora eliminamos los parámetros α y β anteriores y obtenemos la ecuación que define a la imagen:

$$z - 2y + \frac{x}{2} = 0.$$

4. La matriz de f respecto de las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),\ (1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$

Solución: Vamos a calcular esta matriz utilizando la definición de la misma. Para ello debemos calcular las imágenes de los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$ por la aplicación f y a calcular las coordenadas de esas imágenes en la base $\mathcal{B}'$:

$$f(1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = (0,0,2)_{\mathcal{B}'},$$
$$f(1,0) = (2,1,0) = (1,0,0) + (1,1,0) = (1,1,0)_{\mathcal{B}'}.$$

Así que la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. El rango de f.

Solución: Es el valor de la dimensión del conjunto imagen, es decir 2.

Ejercicio 2 (2,5 puntos). 1. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso de que sea diagonalizable da la matriz diagonal y la matriz de paso que la diagonaliza (1,5 puntos).

Solución:
Para empezar calculamos el polinomio característico de la matriz A:

$$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{pmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & -2 & 1-x \end{pmatrix} = (x-3)^2(x-1)$$

Calculamos el espectro de A resolviendo la ecuación $p_A(x) = 0$ que tiene como soluciones a 1 y a 3. Por lo tanto $\sigma_A(x) = \{1, 3\}$, $m(1) = 1$ y $m(3) = 2$.
Para ver si la matriz es diagonalizable sólo debemos comprobar que $\dim V_3 = m(3) = 2$ porque la igualdad $\dim V_1 = m(1)$ se satisface por ser $m(1) = 1$.
La matriz $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ tiene, claramente, rango 1. Así que $\dim V_3 = 3 - \text{rg}(A - 3I_3) = 3 - 1 = 2 = m(1)$.
Por lo tanto hemos demostrado que la matriz A es diagonalizable. Encontremos una matriz de paso que la diagonaliza y la matriz diagonal. Para ello es necesario encontrar bases de los subespacios vectoriales V_1 y V_3.
V_1 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el vector $(1, 0, -1)$ satisface esta ecuación y es linealmente independiente. Así que una base de V_1 es:

$$\beta_{V_1} = \{(1, 0, -1)\}.$$

V_3 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, -1, 1)$ satisfacen esta ecuación y son linealmente independientes. Así que una base de V_1 es:

$$\beta_{V_3} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}.$$

Si tomamos como matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces una matriz de paso será: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La inversa de esta matriz es: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y se verifica la igualdad:

$$D = P^{-1}AP.$$

2. Calcula un valor aproximado de sen $\left(\frac{1}{5}\right)$ usando el polinomio de Taylor de orden 3. Da una estimación del error cometido en la aproximación. (1 punto).

Solución:
Para responder a este apartado hay que usar el desarrollo de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrado en el punto $a = 0$:

$$\operatorname{sen} x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

donde $\xi \in (0, x)$.
La aproximación solicitada es:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{5} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{5} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{(1/5)^3}{6} = \frac{149}{750}.$$

Ahora estimamos el error cometido en la aproximación:

$$|E| = \left|\frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}\left(\frac{1}{5}\right)^4\right| \leq \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 5^4} = \frac{1}{15000} = 0,0000666667.$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos). 1. Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función dada por $f(x,y) = x^2+8xy+8x+4y^2$ en el recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \geq 0, x+y \leq 2, x-y \leq 2\}$ (2 puntos).

2. Calcula los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2$ y di si se tratan de un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla (0,5 puntos).

Ejercicio 4 (2,5 puntos). 1. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 - (y+1)^2$ en el punto $(1,0)$ (0,5 puntos).

2. Calcula la integral doble

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y\}$ (0,5 puntos).

3. Calcula la integral $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}dx$ (0,5 puntos).

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} y)$. Calcula la matriz jacobiana de f en el punto $(0, \frac{\pi}{2})$ (0,5 puntos).

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Comprueba si se verifica la igualdad

$$f_x(x,y) + f_y(x,y) = 2f_u(u,v),$$

donde $u = x+y$, $v = x-y$ (0,5 puntos).

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería (Primer parcial)
Ingeniería técnica de Obras Públicas
13 de junio de 2005

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. La expresión analítica de f en las bases canónicas.
   Solución.
   $$f(x,y,z) = [A(x,y,z)^t]^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]^t = (x, x+y+2z)$$
2. El núcleo y la imagen de f.
   Solución.

   Núcleo de f

   El núcleo de f son los vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (0,0)$, así que se tiene que verificar:
   $$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ x+y+2z = 0, \end{array} \right. \Rightarrow (S) \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y+2z = 0. \end{array} \right.$$
   Como la matriz asociada al sistema S, que llamaremos B, tiene rango 2 entonces el núcleo de f tiene dimensión $3 - \operatorname{rg} B = 3 - 2 = 1$.
   Una base de este núcleo sería:
   $$\beta_{\text{Nuc } f} = \{(0,-2,1)\}.$$

   Imagen de f

   Para empezar sabemos que la dimensión de la imagen es
   $$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Nuc} f = 3 - 1 = 2.$$
   Una base de esta imagen se puede obtener eligiendo dos vectores linealmente independientes de las columnas de la matriz asociada a f:
   $$\beta_{\text{Im } f} = \{(1,1),(0,1)\}.$$
   Así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, ya que la dimensión de $\operatorname{Im} f$ es 2 e $\operatorname{Im} f$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
3. La matriz de f respecto a las bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,2),\ (0,1)\}$.
   Solución.
   Teniendo en cuenta el diagrama:
   $$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \beta_c^3) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^2, \beta_c^2) \\ \text{Id} \uparrow & & \downarrow \text{Id} \\ (\mathbb{R}^3, \beta) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^2, \beta'), \end{array}$$
   deducimos:

$$M_{\beta\beta'}(f) = M_{\beta_c^2\beta'}(\mathrm{Id})M_{\beta_c^3\beta_c^2}(f)M_{\beta\beta_c^3}(\mathrm{Id}) = M_{\beta'\beta_c^2}M_{\beta_c^3\beta_c^2}(f)M_{\beta_c^3\beta} =$$

$$M_{\beta_c^2\beta'}^{-1}M_{\beta_c^3\beta_c^2}(f)M_{\beta_c^3\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. El rango de f.
   Solución.
   El rango de f, por definición, es la dimensión de la imagen de f. Es decir, el rango de f es 2.

Ejercicio 2 (2,5 puntos)**.** 1. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso de que sea diagonalizable da la matriz diagonal y la matriz de paso que la diagonaliza (1,25 puntos).

Solución.

Para empezar calculamos el polinomio característico de la matriz A:

$$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{pmatrix} 3-x & -2 & 2 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 2 & -2 & 3-x \end{pmatrix} = 3 - 7x + 5x^2 - x^3 = -(x-3)(x-1)^2$$

Calculamos el espectro de A resolviendo la ecuación $p_A(x) = 0$ que tiene como soluciones a 1 y a 3. Por lo tanto $\sigma_A(x) = \{1, 3\}$, $m(1) = 2$ y $m(3) = 1$.

Para ver si la matriz es diagonalizable sólo debemos comprobar que $\dim V_1 = m(1) = 2$ porque la igualdad $\dim V_3 = m(3)$ se satisface por ser $m(3) = 1$.

La matriz $A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene, claramente, rango 1. Así que $\dim V_1 = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - 1 = 2 = m(1)$.

Por lo tanto hemos demostrado que la matriz A es diagonalizable. Encontremos una matriz de paso que la diagonaliza y la matriz diagonal. Para ello es necesario encontrar bases de los subespacios vectoriales V_1 y V_3.

V_1 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$ satisfacen esta ecuación y son linealmente independientes. Así que una base de V_1 es:

$$\beta_{V_1} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

V_3 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el vector $(1, 1, 0)$ satisface esta ecuación, por lo que una base de V_3 es:

$$\beta_{V_3} = \{(1, 1, 1)\}.$$

Si tomamos como matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces una matriz de paso será: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La inversa de esta matriz es: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y se verifica la igualdad:

$$D = P^{-1}AP.$$

2. Calcula un valor aproximado de $\cos\left(\frac{1}{4}\right)$ usando el polinomio de Taylor de orden 3. Da una estimación del error cometido en la aproximación. (1,25 puntos).

Solución.

Para responder a este apartado hay que usar el desarrollo de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrado en el punto $a = 0$:

$$\cos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

donde $\xi \in (0, x)$.

La aproximación solicitada es:

$$\cos\frac{1}{4} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{4} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \frac{(1/4)^2}{2} = \frac{31}{32}.$$

Ahora estimamos el error cometido en la aproximación:

$$|E| = \left|\frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\right| \leq \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4^4} = \frac{1}{6144} = 0,00016276.$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos)**.** Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} S &= <(1,1,1,1),(1,0,0,0)>, \\ T &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y, 2z = t\}, \end{aligned}$$

se pide:

(a) Calcula una base de S y da su dimensión (0,5 puntos).

Solución. Puesto que los dos vectores de S dados son generadores y linealmente entonces forman una base. Así que:

$$\beta_S = \{(1,1,1,1),(1,0,0,0)\}.$$

(b) Calcula una base de T y da su dimensión (0,5 puntos).

Solución. Debido a que la matriz asociada al sistema que define el subespacio T tiene rango 2 entonces T tiene dimensión igual a $4-2=2$. Basta pues con dar un conjunto de dos vectores de T linealmente independientes:

$$\beta_T = \{(2,1,0,0),(0,0,1,2)\}.$$

(c) Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio S respecto de la base de $\mathbb{R}^4$ que sigue

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),\ (1,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (1,1,0,0)\} \qquad \text{(0,5 puntos).}$$

Solución. Puesto que la dimensión de S es 2 necesitaremos $4-2=2$ ecuaciones linealmente independientes para definir al subespacio S. Sea $(x,y,z,t)_{\beta_1} \in S$, entonces:

$$\begin{aligned} &(x,y,z,t)_{\beta_1} = \\ x(1,1,1,0)+y(1,0,0,0)+z(1,1,1,1)+t(1,1,0,0) &= \alpha(1,1,1,1)+\beta(1,0,0,0) = \\ (x+y+z+t, x+z+t, x+z, z) &= (\alpha+\beta, \alpha, \alpha, \alpha) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=\alpha+\beta, \\ x+z+t=\alpha, \\ x+z=\alpha, \\ z=\alpha. \end{cases}$$

Podemos eliminar los parámetros α y β y obtener las dos ecuaciones cartesianas requeridas:

$$\begin{cases} t=0, \\ x=0. \end{cases}$$

(d) Calcula las ecuaciones cartesianas, una base y la dimensión del subespacio $S \cap T$ (0,5 puntos).

Solución.

Si $(x,y,z,t) \in S$ entonces:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,0,0,0) = (\alpha+\beta, \alpha, \alpha, \alpha) \quad \text{y}$$

$$x = 2y, \quad 2z = t.$$

Por lo tanto:

$$\alpha+\beta = 2\alpha \quad \text{y} \quad 2\alpha = \alpha$$

y se obtiene que $\alpha = \beta = 0$.

Así que $S \cap T = (0,0,0,0)$, $\beta_{S\cap T} = \emptyset$, $\dim S \cap T = 0$ y las ecuaciones cartesianas son $x=y=z=t=0$.

(e) Calcula una base y la dimensión de $S+T$ (0,5 puntos).

Solución.

Usando la fórmula de Grassman sabemos que $\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 2+2-0 = 4$, por lo tanto $S+T = \mathbb{R}^4$ y una base de él puede ser por ejemplo la base canónica usual. Además no se pueden dar ecuaciones en este caso por ser $S+T$ todo el espacio vectorial.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)**.** Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,0)\}$$

y

$$\beta' = \{v_1 = (1,0,5), v_2 = (0,2,1), v_3 = (1,0,2)\}.$$

Se pide:

1. Calcular la matriz de cambio de base de β a β' (0,6 puntos).

   Solución. Para calcular esta matriz hace falta obtener las coordenadas de los vectores de la base β' en la base β:

$$v_1 = 5u_1 - 4u_3, \quad v_2 = -u_1 + 2u_2 + u_3, \quad v_3 = 2u_1 - u_3.$$

   Ahora disponemos estas coordenadas en una matriz por columnas para obtener la matriz de cambio de base solicitada:

$$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular la matriz de cambio de base de β' a β (0,6 puntos).

$$M_{\beta'\beta} = M_{\beta\beta'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 4/3 & -1/6 & 5/3 \end{pmatrix}$$

3. Calcula, si es posible, la inversa de la suma de las matrices de los dos apartados anteriores (0,6 puntos).

   Solución.

   La matriz solicitada es:

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 4/3 & -1/6 & 5/3 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & -1/10 & 7/10 \end{pmatrix}$$

4. Usando alguna de las matrices anteriores calcula las coordenadas del vector $(-1,1,3)_{\beta'}$ en la base β (0,7 puntos).

Solución.

$$M_{\beta\beta'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\beta}.$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, EXAMEN PARCIAL

INGENIERÍA TÉCNICA DE OBRAS PÚBLICAS
31 DE ENERO DE 2005 9H30MN-13H00MN

Nombre y apellidos:
DNI:
Fila:
Columna:
E-mail:

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Puntuación					

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$$

y

$$\beta' = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,3,1), v_3 = (3,4,2)\}.$$

Se pide:

1. Calcular la matriz de cambio de base de β a β' (0,6 puntos).

   Solución. Para calcular esta matriz de cambio de base tenemos que calcular las coordenadas de los vectores de β' en la base β:

$$v_1 = (1,2,1) = -u_1 + u_2 + u_3,$$

$$v_2 = (2,3,1) = -u_1 + 2u_2 + u_3,$$

$$v_3 = (3,4,2) = -u_1 + 2u_2 + 2u_3.$$

   Así que la matriz de cambio de base será:

$$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calcular la matriz de cambio de base de β' a β (0,6 puntos).

   Solución. Para calcular esta matriz de cambio de base tenemos que calcular las coordenadas de los vectores de β en la base β':

$$u_1 = (1,0,0) = -2v_1 + v_3,$$

$$u_2 = (1,1,0) = v_2 - v_1,$$

$$u_3 = (1,1,1) = v_3 - v_2.$$

Así que la matriz de cambio de base será:

$$M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula la inversa de la suma de las matrices de los dos apartados anteriores (0,6 puntos). Denotamos a la matriz suma por A, es decir:

$$A = M_{\beta\beta'} + M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos el determinante de A y la matriz adjunta de A:

$$\det A = -17,$$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ 5 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Así que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{Adj} A)^t = \frac{1}{-17}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ -1 & -7 & 2 \\ -5 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}$$

4. Usando alguna de las matrices anteriores calcula las coordenadas del vector $(-1,2,3)_\beta$ en la base β' (0,7 puntos).

Solución.

$$M_{\beta'\beta}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\beta'}.$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)**.** Se consideran en $\mathbb{R}^4$ dos subespacios vectoriales, V y W. La definiciones de estos subespacios son las que siguen:

Definición de V**:** $V = < G >$[1], donde $G = \{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$.

Definición de W**:** $W = \{(x,y,z,t) : y - x + z = 0\}$.

Responde a las siguientes cuestiones:

(a) Calcula una base de V y da su dimensión (0,5 puntos).

Solución. Puesto que los vectores de G son generadores de V y también linealmente independientes serán una base de V. Así que tomamos como base:

$$\beta_V = \{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\},$$

[1]Recuerda que $< G >$ denota el espacio generado por los vectores de G

y al haber dos elementos en la base se tiene que la dimensión de V es 2.

(b) Calcula una base de W y da su dimensión (0,5 puntos).

Solución. Debido a que W viene definido por una única ecuación se tiene que $\dim W = 4 - 1 = 3$. Ahora elegimos tres vectores linealmente independientes que satisfagan la ecuación $y - x + z = 0$. Como los vectores $(0, 1, -1, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ son linealmente independientes, satisfacen la ecuación que define a W y la dimensión de W es tres, podemos elegir la base:

$$\beta_W = \{(0, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

(c) Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio V respecto de la base de $\mathbb{R}^4$ que sigue

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 0, 0, 0),\ (1, 1, 1, 1)\} \qquad \text{(0,5 puntos).}$$

Solución. Se trata de encontrar las ecuaciones que satisfacen las coordenadas de un vector $(x, y, z, t)_{B_1} \in W$. Sabemos pues que:

$$(x, y, z, t)_{B_1} = x(1, 1, 1, 0) + y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 0, 0) + t(1, 1, 1, 1) = \\ \alpha(0, 1, 1, 0) + \beta(1, 0, 0, 1)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= \beta, \\ x + y + t &= \alpha, \\ x + t &= \alpha, \\ t &= \beta. \end{aligned}$$

Por otro lado el número necesario de ecuaciones necesarias para describir el subespacio V son $4 - \dim V = 4 - 2 = 2$.

Así que las dos ecuaciones que buscamos son:

$$\begin{aligned} x + y + z = 0 &\quad \text{se obtiene restando las ecuaciones primera y cuarta anteriores,} \\ y = 0 &\quad \text{se obtiene restando las ecuaciones segunda y tercera anteriores.} \end{aligned}$$

(d) Calcula las ecuaciones cartesianas, una base y la dimensión del subespacio $V \cap W$ (0,5 puntos).

Solución. Empezamos calculando las ecuaciones cartesianas que satisfacen las coordenadas de un vector $\mathbf{v} = (x, y, z, t) \in V \cap W$.

Ya que $\mathbf{v} \in V$, se tiene que $v = \alpha(0, 1, 1, 0) + \beta(1, 0, 0, 1) = (\beta, \alpha, \alpha, \beta)$.

Ahora por verificarse también que $\mathbf{v} \in W$ se tiene que $x - y + z = \beta - \alpha + \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$.

Por lo tanto $\mathbf{v} = \alpha(0, 1, 1, 0)$. Esto quiere decir que $V \cap W =< (0, 1, 1, 0) >$ y por lo tanto $\beta_{V\cap W} = \{(0, 1, 1, 0)\}$ y $\dim V \cap W = 1$.

(e) Calcula una base y la dimensión de $V+W$ (0,5 puntos).

Solución. Utilizando la fórmula de Grassman tenemos que:

$$\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim V\cap W = 2+3-1 = 4.$$

Por lo tanto $V+W=\mathbb{R}^4$ y una base de la suma es la base canónica:

$$\beta_{V+W} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos)**.** Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$f(1,1,1,1)=(0,0,1) \qquad f(1,0,1,0)=(1,1,0)$$

$$f(1,1,1,0)=(0,0,-1) \qquad f(-1,-2,0,0)=(1,1,2)$$

Se pide calcular:

1. La matriz de f respecto a las bases canónicas.

Solución. Para responder a esta pregunta hay que calcular las imágenes por f de los vectores de da base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f(e_1) = f(-2v_2+2v_3-v_4) = -2f(v_2)+2f(v_3)-f(v_4) = (1,1,0),\\ f(e_2) = f(v_2-v_3) = f(v_2)-f(v_3) = (-1,-1,-1),\\ f(e_3) = f(2v_2-v_3+v_4) = 2f(v_2)-f(v_3)+f(v_4) = (0,0,0),\\ f(e_4) = f(v_1-v_2) = f(v_1)-f(v_2) = (0,0,2). \end{aligned}$$

Así que:

$$M_{B_c^4B_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. La dimensión y ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Solución.

Ker (f)

Los vectores de $\mathrm{Ker}(f)$ son aquellos que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La matriz asociada al sistema tiene rango 2 puesto que las dos primeras filas son iguales. Por lo tanto la dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$ es $4-2=2$ y las ecuaciones son:

$$x-y=0,$$

$$-y+2t=0.$$

Im (f)

Teniendo en cuenta la fórmula $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ se tiene que $\dim \mathrm{Im} f = 4 - 2 = 2$.

De las columnas de la matriz asociada a f (que son un sistema generador de $\mathrm{Im}f$) podemos extraer una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}f} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}.$$

Ahora sabemos que si $(x,y,z) \in \mathrm{Im}f$ entonces $(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1)$. Por lo tanto:

$$x = \alpha,$$
$$y = \alpha,$$
$$z = \beta.$$

Ahora teniendo en cuenta que sólo necesitamos una ecuación para determinar a $\mathrm{Im}f$ (porque el número de ecuaciones es igual a $\dim \mathbb{R}^3 - \dim Imf$), si restamos a la segunda ecuación anterior la primera obtenemos la ecuación que define a $\mathrm{Im}f$:

$$y - x = 0.$$

3. La matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base de $\mathbb{R}^3$ siguiente

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}.$$

Solución.

Teniendo en cuenta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, \beta_c^4) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^3, \beta_c^3) \\ \mathrm{Id} \uparrow & & \downarrow \mathrm{Id} \\ (\mathbb{R}^4, \beta_c^4) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^3, \beta), \end{array}$$

deducimos:

$$M_{\beta_c^4 \beta}(f) = M_{\beta_c^3 \beta}(\mathrm{Id}) M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) M_{\beta_c^4 \beta_c^4}(\mathrm{Id}) = M_{\beta \beta_c^3} M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) M_{\beta_c^4 \beta_c^4} =$$

$$M^{-1}_{\beta_c^3 \beta} M_{\beta_c^4 \beta_c^3}(f) M_{\beta_c^4 \beta_c^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. La matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   Teniendo en cuenta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, \beta_c^4) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^3, \beta_c^3) \\ \mathrm{Id} \uparrow & & \downarrow \mathrm{Id} \\ (\mathbb{R}^4, \beta_1) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^3, \beta_2), \end{array}$$

   deducimos:

$$M_{\beta_1\beta_2}(f) = M_{\beta_c^3\beta_2}(\mathrm{Id}) M_{\beta_c^4\beta_c^3}(f) M_{\beta_1\beta_c^4}(\mathrm{Id}) = M_{\beta_2\beta_c^3} M_{\beta_c^4\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^4\beta_1} =$$

$$M_{\beta_c^3\beta_2}^{-1} M_{\beta_c^4\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^4\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 (2,5 puntos). 1. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso de que sea diagonalizable da la matriz diagonal y la matriz de paso que la diagonaliza (1,25 puntos).

Solución.

Para empezar calculamos el polinomio característico de la matriz A:

$$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{pmatrix} 3-x & -2 & 2 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 2 & -2 & 3-x \end{pmatrix} = 3 - 7x + 5x^2 - x^3 = -(x-3)(x-1)^2$$

Calculamos el espectro de A resolviendo la ecuación $p_A(x) = 0$ que tiene como soluciones a 1 y a 3. Por lo tanto $\sigma_A(x) = \{1, 3\}$, $m(1) = 2$ y $m(3) = 1$.

Para ver si la matriz es diagonalizable sólo debemos comprobar que $\dim V_1 = m(1) = 2$ porque la igualdad $\dim V_3 = m(3)$ se satisface por ser $m(3) = 1$.

La matriz $A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene, claramente, rango 1. Así que $\dim V_1 = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - 1 = 2 = m(1)$.

Por lo tanto hemos demostrado que la matriz A es diagonalizable. Encontremos una matriz de paso que la diagonaliza y la matriz diagonal. Para ello es necesario encontrar bases de los subespacios vectoriales V_1 y V_3.

V_1 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ satisfacen esta ecuación y son linealmente independientes. Así que una base de V_1 es:

$$\beta_{V_1} = \{(1,1,0),(0,1,1)\}.$$

V_3 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el vector $(1,1,0)$ satisface esta ecuación, por lo que una base de V_3 es:

$$\beta_{V_3} = \{(1,1,1)\}.$$

Si tomamos como matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces una matriz de paso será: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La inversa de esta matriz es: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y se verifica la igualdad:

$$D = P^{-1}AP.$$

2. Calcula un valor aproximado de sen $\frac{1}{10}$ con un error menor de 10^{-4} (1,25 puntos).

Solución.

Para responder a este apartado hay que usar el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrado en el punto $a = 0$:

$$\operatorname{sen} x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

donde $\xi \in (0,x)$.

Haremos la aproximación

$$\operatorname{sen}\frac{1}{10} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{10} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

cuando

$$|E| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right| < 10^{-4}.$$

Calculamos primero el valor adecuado de n.

$$|E| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{10^{n+1}(n+1)!} \overset{?}{<} 10^{-4}.$$

Para que se satisfaga la desigualdad de la interrogación basta con tomar $n = 3$. Así que aproximamos el valor de sen $\frac{1}{10}$ por:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{10} \approx \operatorname{sen}(0) + \cos(0)\frac{1}{10} + \frac{-\operatorname{sen}(0)}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 =$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{600-1}{6000} = \frac{599}{6000} = 0,09983.$$

Observaciones:

1. Aquellos que sacaron más de un 3 en el examen anterior pueden elegir responder sólo a las preguntas 3 y 4 y obtener su nota del parcial como la media entre los dos exámenes, siempre y cuando en este examen saquen más de un 3.
2. Empezad cada pregunta en una cara nueva de un folio.
3. No se puede fumar durante el desarrollo de la prueba.
4. La duración del examen es 3 horas y media.
5. No es obligatorio presentar el examen.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, EXAMEN PARCIAL

INGENIERÍA TÉCNICA DE OBRAS PÚBLICAS
11 DE ENERO DE 2005 16H00MN-18H30MN

Nombre y apellidos: **DNI:**

Pregunta	**1**	**2**	**Total**
Puntuación			

Ejercicio 1 (5 puntos). **(Apartado A. 4 puntos):** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2\alpha \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix}$.

Se pide:

1. Calcular el determinante de la matriz A (1,5 punto).
Solución.
$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} =$
$7 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} = 14\alpha - 14$

2. Discutir el sistema (1,5 puntos)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \beta \\ 2x + 5y + 2\alpha z = -2 \end{cases}$$

Solución.

- Si $14\alpha - 14 \neq 0$, es decir $\alpha \neq 1$, entonces rg $A =$ rg $(A|b) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Ahora si $\alpha = 1$ veamos qué pasa.
$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \beta \\ 2 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 0 & 1-2\beta \\ 1 & 4 & 1 & \beta \\ 0 & -3 & 0 & -2-2\beta \end{array}\right)$
$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 21 & 0 & 6\beta-3 \\ 1 & 4 & 1 & \beta \\ 0 & -21 & 0 & -14-14\beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 21 & 0 & 6\beta-3 \\ 1 & 4 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -17-8\beta \end{array}\right).$
Dependiendo de los valores de β tenemos:
  a) Si $-17 - 8\beta = 0$, es decir $\beta = \frac{-17}{8}$, entonces el sistema es compatible indeterminado ya que rg $A = 2 =$ rg $(A|b)$.
  b) Si $\beta \neq \frac{-17}{8}$, es decir $-17 - 8\beta \neq 0$, entonces el sistema es incompatible porque rg $A = 2 \neq$ rg $(A|b) = 3$.

3. Resolver el sistema anterior cuando es compatible e indeterminado (1 punto).
Se trata de resolver el sistema que tiene como matriz asociada ampliada la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 21 & 0 & -75/8 \\ 1 & 4 & 1 & \frac{-17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Necesitamos un parámetro para la resolución del sistema, tomaremos $x = \lambda$. De la primera ecuación se tiene $y = \frac{-75}{168} = -\frac{25}{56}$ y finalmente, de la segunda: $z = \frac{-17}{8} - \lambda + 4\frac{25}{56} = \frac{-119-56\lambda+100}{56} = \frac{-19-56\beta}{56}$.

(Apartado B. 1 punto): Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$$

y

$$\beta' = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)\}.$$

Se pide:

1. Calcular la matriz de cambio de base de β a β' (0,5 puntos).
   Solución.
   Para construir esta matriz necesitamos calcular las coordenadas de los vectores v_i en la base β. Es evidente que estas coordenadas son:

   $$v_1 = u_3 = (0,0,1)_\beta, \quad v_2 = u_2 = (0,1,0)_\beta, \quad v_3 = u_1 = (1,0,0)_\beta.$$

   Así que:

   $$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Usando la matriz anterior calcula las coordenadas del vector $(1,2,3)_{\beta'}$ en la base β (0,5 puntos).
   Solución.
   Llamemos $(x,y,z)_\beta$ a las coordenadas del vector $(1,2,3)_{\beta'}$ en la base β. Entonces:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta = M_{\beta\beta'} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_\beta .$$

   Hemos obtenido que las coordenadas son $(3,2,1)_\beta$.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales generados por $S_1 = \{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1)\}$ y $S_2 = \{(1,1,0,1), (1,2,-1,-2), (3,5,-2,5)\}$ respectivamente. Calcular:

(a) Bases y dimensiones de $L(S_1)$ y $L(S_2)$ (2 puntos).
Solución.

- **Subespacio $\mathbf{L(S_1)}$.** Como los vectores de S_1 son linealmente independientes además de generadores tenemos que $\beta_{L(S_1)} = \{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1)\}$ y la dimensión de $L(S_1)$ será 2.
- **Subespacio $\mathbf{L(S_2)}$.** Ponemos los vectores de S_2 en una matriz por filas y hacemos combinaciones lineales por filas para extraer un subconjunto linealmente independiente.
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
  Como esta matriz tiene rango 3 los tres vectores son linealmente independientes y se puede tomar como base las filas de cada una de las tres matrices anteriores. Tomaremos:
  $$\beta_{L(S_2)} = \{(1,1,0,1), (0,1,-1,-3), (0,0,0,8)\}.$$
  En este caso la dimensión del espacio es 3.

(b) Ecuaciones cartesianas de ambos subespacios (1,5 puntos).

Solución.

- **Subespacio $\mathbf{L(S_1)}$.**
Es conveniente tener en cuenta que necesitamos 2 ecuaciones (dimensión de $\mathbb{R}^4$ menos dimensión de $L(S_1)$) linealmente independientes. Cualquier vector $(x, y, z, t) \in L(S_1)$ debe satisfacer para ciertos α y β la igualdad:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, -1, -1, 1),$$

es decir:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = \alpha - \beta, \\ z = \alpha - \beta, \\ t = \alpha + \beta. \end{cases}$$

Por lo tanto obtenemos las ecuaciones restando a la última la primera y a la tercera la segunda:

$$\begin{cases} t - x = 0, \\ z - y = 0. \end{cases}$$

- **Subespacio $\mathbf{L(S_2)}$.** Ahora necesitamos 1 ecuación para describir a este subespacio. Cualquier vector de $L(S_2)$ satisface para determinados α, β y γ:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 1, 0, 1) + \beta(0, 1, -1, -3) + \gamma(0, 0, 0, 8),$$

es decir:

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha + \beta, \\ z = -\beta, \\ t = \alpha - 3\beta + 8\gamma. \end{cases}$$

Por último obtenemos la ecuación cartesiana de este subespacio restando a la segunda ecuación la primera y sumando la tercera:

$$y - x + z = 0.$$

(c) Calcular las ecuaciones cartesianas y bases de $L(S_1) \cap L(S_2)$ y $L(S_1) + L(S_2)$ (1,5 puntos).

- **Subespacio $\mathbf{L(S_1) \cap L(S_2)}$.** Las ecuaciones de este espacio son:

$$\begin{cases} t - x = 0, \\ z - y = 0, \\ y - x + z = 0. \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ahora la dimensión de la intersección se calcula restando a la dimensión del espacio ambiente el rango de la matriz A. Así que la dimensión de $L(S_1) \cap L(S_2)$ es $4 - \text{rg } A = 4 - 3 = 1$.
Una base de $L(S_1) \cap L(S_2)$ será cualquier vector de la intersección. Por ejemplo:

$$\beta_{L(S_1) \cap L(S_2)} = \{(2, 1, 1, 2)\}$$

- **Subespacio $\mathbf{L}(\mathbf{S_1}) + \mathbf{L}(\mathbf{S_2})$.** Usando la fórmula de Grassman tenemos:

$$\dim L(S_1) + L(S_2) = \dim L(S_1) + \dim L(S_2) - \dim L(S_1) \cap L(S_2) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

  $L(S_1)+L(S_2) = \mathbb{R}^4$ y por lo tanto los vectores de este espacio no satisfacen ninguna ecuación. Una base de este espacio es, por ejemplo, la base canónica:

$$\beta_{L(S_1)+L(S_2)} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),\}.$$

Fundamentos matemáticos de la ingeniería, primer parcial.

Escuela de ingeniería técnica civil. I.T. Minas.

13 de diciembre de 2002 16h00mn-19h30mn.

Ejercicio 1 (1 punto). a. Define lo que entiendes por *espacio generador*, *sistema de vectores linealmente independientes* y *base* de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

b. Calcula el polinomio de Taylor centrado en $x = 0$ y de orden 4 de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

c. Expresa en términos de $\det A$ el determinante de la matriz A^{-1}.

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^t$$

Calcula:

1. La expresión analítica de f en la base canónica. (0,3 puntos)
2. Ecuaciones cartesianas de $\operatorname{Ker}(f)$ (mínimo número posible). (0,3 puntos)
3. Base de $\operatorname{Ker}(f)$. (0,2 puntos)
4. Base de $\operatorname{Im}(f)$ y rango de f. (0,2 puntos)
5. Ecuaciones cartesianas de $\operatorname{Im}(f)$ (sólo una). (0.4 puntos)
6. La matriz de f respecto de la base $\beta_1 = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)\}$, es decir, $M_{\beta_1\beta_1}(f)$. (0.6 puntos)

Ejercicio 3 (2 puntos). 1. (1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación. Caso de ser diagonalizable calcular la matriz de paso y la matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (0'5 puntos) Calcular el determinante de la matriz $B = (\det A)\, A^{-1} + A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 (0,5 puntos). Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^{x+1}$ en el punto $x = 0$, de grado el necesario para obtener una aproximación de $e^{1+\frac{1}{10}}$ con un error máximo de 10^{-3} (da dicha aproximación).

Observaciones:
Prohibido fumar durante toda la prueba.
Poned en todos los folios que utilicéis vuestro nombre, apellidos y D.N.I.

Fundamentos matemáticos de la ingeniería, primer parcial.

Escuela de ingeniería técnica civil. I.T. Minas.

16 de septiembre de 2002 9h30mn-13h00mn.

Ejercicio 1 (0.5 pt. por apartado). a. Define lo que entiendes por aplicación lineal y rango de una aplicación lineal.

b. Calcula el polinomio de Taylor centrado en $x = 0$ y de orden 5 de la función $f(x) = x^3 - x^7$.

c. ¿Es el conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + y = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifica tu respuesta.

d. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, define lo que se entiende por polinomio característico y espectro de la matriz A (denotados por $p_A(x)$ y σ_A respectivamente).

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. La expresión analítica de f en la base canónica. (0,3 puntos)
2. Ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)$ (sólo dos). (0,2 puntos)
3. Base de $\mathrm{Ker}(f)$. (0,2 puntos)
4. Base de $\mathrm{Im}(f)$. (0,2 puntos)
5. Ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Im}(f)$ (sólo una). (0.4 puntos)
6. La matriz de f respecto de la base $\beta_1 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, es decir, $M_{\beta_1\beta_1}(f)$. (0.5 puntos)
7. rango de f (0,2 puntos).

Ejercicio 3 (2 puntos; 2/3 puntos por apartado). Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 0,\ x - y = 0\}, \\ T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

calcular:

(a) Una base y la dimensión de S y T.

(b) Calcular $S \cap T$ y $S + T$, dando una base de dichos subespacios.

(c) ¿Es la suma $S + T$ directa?

Ejercicio 4 (2 puntos). 1. (1'5 puntos) Estudiar si es diagonalizable o no la matriz que damos a continuación. Caso de ser diagonalizable calcular la matriz de paso y la matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (0'5 puntos) Calcular $\det(A^{-1} + B)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5 (2 puntos). 1. ($\frac{2}{3}$ puntos) ¿Qué error máximo cometemos aproximando $\cos(x)$ por $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ en el intervalo [0,1]?

2. ($\frac{2}{3}$ puntos) Calcular el valor del número $e^{\frac{1}{10}}$ con un error máximo de 10^{-3}.

3. ($\frac{2}{3}$ puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{x^2 \mathrm{sen}^2 x}$

Observaciones:

No se puede fumar durante toda la prueba.

Poned en todos los folios que utilicéis vuestro nombre, apellidos y D.N.I.

	Ingeniería Técnica de Obras Públicas **Fundamentos Matemáticos** **2 de febrero de 2006, 9h30mn-12h30mn**

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	1	2	3	4	5	Total
Puntuación						

Observaciones

- Tienes que entregar la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un folio nuevo y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final de cada uno de los apartados** debe estar dentro de un **recuadro fácil de identificar**, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

PRIMER PARCIAL: ALGEBRA LINEAL

Ejercicio 1 (Diagonalización, 2.5 puntos). De una matriz diagonalizable A sabemos que tiene como polinomio característico $p(x) = (x-1)(x-3)^2(x+1)$. Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuál es la dimensión del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 3x\}$? *(0,5 puntos)*

   Solución:

   Por ser la matriz diagonalizable se tiene que la dimensión del subespacio anterior V_3 coincide con la multiplicidad de 3 en el polinomio característico. Así que $\dim V_3 = 2$.

2. ¿Cuál es el determinante de A? ¿Por qué? *(0,5 puntos)*

   Solución:

   Por ser la matriz A diagonalizable se tiene que $P^{-1}AP = D$, así que $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A| = |D| \Rightarrow |A| = |D|$. Así que $|A| = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -9$.

3. Escribe una matriz diagonal, D, para A *(0,5 puntos)*.

Solución:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. ¿Cuál es el tamaño de la matriz A? *(0,5 puntos)*

Solución:

El tamaño es el mismo que el tamaño de D, es decir, 4×4.

5. De los subespacios invariantes V_1, V_3 y V_{-1} conocemos unas bases: $\beta_{V_1} = \{(1,0,0,0)\}$, $\beta_{V_3} = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $\beta_{V_{-1}} = \{(1,1,0,0)\}$. Da la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos). ▪ Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)\},$$

$$\beta_C = \{w_1 = (1,1,0), w_2 = (0,1,1), w_3 = (0,0,1)\}, \quad B = \{(2,2,1)_{\beta_C}\}$$

y se pide:

6. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A \beta_C}$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_C respecto a β_A. Calculamos esas coordenadas:

- $w_1 := (1,1,0) = 2v_1 - v_2 - v_3 = (2,-1,-1)_{\beta_A}$,
- $w_2 := (0,1,1) = v_2 = (0,1,0)_{\beta_A}$,
- $w_3 := (0,0,1) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1,1,1)_{\beta_A}$.

Así que:

$$M_{\beta_A \beta_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C \beta_A}$ *(0,5 puntos)*.

Solución:

Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_A respecto a β_C.

- $v_1 := (1,1,1) = w_1 + w_3 = (1,0,1)_{\beta_C}$,

- $v_2 := (0,1,1) = w_2 = (0,1,0)_{\beta_C}$,
- $v_3 := (1,0,1) = w_1 - w_2 + 2w_3 = (1,-1,2)_{\beta_C}$,

así que:

$$M_{\beta_C\beta_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A *(0,3 puntos)*.

<u>Solución:</u>

Usando la matriz $M_{\beta_A\beta_C}$ es fácil calcular esas coordenadas:

- $\left[M_{\beta_A\beta_C}(2,2,1)^t_{\beta_C}\right]^t = (3,1,-1)_{\beta_A}$.

Por lo tanto:

$$B = \{(3,1,-1)_{\beta_A}\}.$$

9. Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A *(0,5 puntos)*.

<u>Solución:</u>

Antes de nada tenemos claro que se necesita 1 ecuación (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de $< B >$).

Un vector $(x,y,z)_{\beta_A} \in < B >$ si y sólo si

$$(x,y,z)_{\beta_A} = \alpha(3,1,-1)_{\beta_A} = (3\alpha, \alpha, -\alpha)_{\beta_A}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha, \\ y = \alpha, \\ z = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x - 3y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}}$$

- Calcula el límite siguiente usando desarrollos de Taylor:

10. $\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x^4}{1-\cos(x^2)}$ *(0,7 puntos)*.

<u>Solución:</u>

Hacemos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + o(x^4)}{1 - 1 + x^4/2 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = 4.$$

SEGUNDO PARCIAL: CÁLCULO

Ejercicio 3 (2,5 puntos). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un campo de vectores. Define los siguientes conceptos:

(3.1) Derivada de f en un punto $a \in \Omega$ en la dirección de un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n$ *(0,5 puntos)*.

(3.2) Diferencial de f en un punto $a \in \Omega$ *(0,5 puntos)*.

¿Qué relación existe entre la diferencial de f en a y la derivada de f en a en la dirección de un vector u?*(0,25 puntos)*

Como aplicación para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se pide:

(3.3) Estudiar la diferenciabilidad en $(0,a)$ con $a \in \mathbb{R}$ *(0,75 puntos)*.

(3.4) Estudiar si se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \textit{(0,25 puntos)}.$$

(3.5) ¿Es $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$? *(0,25 puntos)*.

Ejercicio 4 (2,5 puntos). (4.1) Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Define rigurosamente el concepto de integral de Riemann de f en el intervalo $[a,b]$ *(1 punto)*.

(4.2) Sea Ω el paralelepípedo de vértices $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,-3)$ y $(0,3)$. Calcula $\int\int_\Omega (x+y)dxdy$ *(1 punto)*.

(4.3) Estudia los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = sen(x) + sen(y) + cos(x+y)$$

cuando $x, y \in (0, 2\pi)$ *(0,5 puntos)*.

	Ingeniería Técnica de Obras Públicas **Fundamentos Matemáticos** **2 de febrero de 2006, 9h30mn-12h30mn**

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

Ejercicio 1 (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcular el polinomio característico p_A (0,2 puntos).

   Solución:

   $$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 \\ -3 & 3 & 5-x \end{vmatrix} = 20 - 24x + 9x^2 - x^3 = -(x-5)(x-2)^2$$

2. Calcular el espectro σ_A y especificar la multiplicidad de cada raíz (0,2 puntos).

   Solución:

   $\sigma_A = \{5, 2\}$. Además $m(5) = 1$ y $m(2) = 2$.

3. Justificar si la matriz A es diagonalizable (0,5 puntos).

   Solución:

   Según se vio en teoría, por ser $m(5) = 1$ entonces $\dim V_5 = m(5) = 1$.

   Falta ahora por ver, para demostrar que A es diagonalizable, que $\dim V_2 = m(2) = 2$.

   Pero esto es cierto porque $\dim V_2 = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$

   Por lo tanto A es una matriz diagonalizable.

4. Dar la matriz diagonal D (0,3 puntos).

   Solución:

   Elijo $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Dar la matriz de paso P (0,5 puntos).

Solución:

Para dar esta matriz calculamos bases de V_5 y de V_2.

$V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_5$ si y sólo si[1]

$$\begin{cases} -3x + 3z = 0, \\ -3x + 3y = 0. \end{cases}$$

Así que una base de V_5 es $\beta_5 = \{(1, 1, 1)\}$.

$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x, y, z) \in V_2$ si y sólo si[2]

$$\{ -3x + 3y + 3z = 0 \ \Rightarrow \{ -x + y + z = 0$$

Así que una base de V_2 es $\beta_2 = \{(0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$.

Ahora obtenemos ya:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Especificar la relación entre A, D y P (0,3 puntos).

Solución:

$$D = P^{-1}AP.$$

Ejercicio 2 (1,5 puntos). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3(x^2)}{1 - \cos(x^3)}.$$

Solución:

Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 6:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$,
- $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$,
- $\sin^3 x^2 = x^6 + o(x^6)$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$,
- $\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2!} + o(x^6)$,
- $1 - \cos x^3 = \frac{x^6}{2!} + o(x^6)$.

[1] Fíjate que he quitado la primera ecuación porque $A - 5I_3$ tiene rango 2 y por lo tanto sólo son necesarias dos ecuaciones linealmente independientes.

[2] Fíjate que me he quedado con una única ecuación porque $A - 2I_3$ tiene rango 1.

Así que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{\frac{x^6}{2!} + o(x^6)} = \frac{1 + \frac{o(x^6)}{x^6}}{\frac{1}{2!} + \frac{o(x^6)}{x^6}} = 2.$$

Ejercicio 3 (2 puntos). Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}, \quad \beta_C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad B = \{(1,2,1),(0,1,0)\}$$

y se pide:

1. Comprobar que β_A es una base de $\mathbb{R}^3$ (0,4 puntos), **Solución:**

   Para comprobar que es una base basta con ver que el determinante que de la matriz formada al poner los vectores de β_A por columnas:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$ (0,6 puntos).

   Solución:

   Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_C respecto a β_A. Calculamos esas coordenadas (para simplificar la notación denotaremos a los vectores de la base β_A por v_1, v_2 y v_3):

   - $e_1 = (1,0,0) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_{\beta_A}$,
   - $e_2 = (0,1,0) = v_2 - v_3 = (0,1,-1)_{\beta_A}$,
   - $e_3 = (0,0,1) = v_3 = (0,0,1)_{\beta_A}$.

   Así que:

   $$M_{\beta_A\beta_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$ (0,3 puntos).

   Solución:

   Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_A respecto a β_C. Así que:

   $$M_{\beta_C\beta_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A (0,3 puntos).

   Usando la matriz $M_{\beta_A\beta_C}$ es fácil calcular esas coordenadas:

   - $[M_{\beta_A\beta_C}(1,2,1)^t]^t = (1,2,-2)_{\beta_A}$.

- $[M_{\beta_A\beta_C}(0,1,0)^t]^t = (0,1,-1)_{\beta_A}$.

Por lo tanto:

$$B = \{(1,2,-2)_{\beta_A}, (0,1,-1)_{\beta_A}\}.$$

5. Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A (0,4 puntos).

Solución:

Antes de nada tenemos claro que se necesita 1 ecuación (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de $< B >$).

Un vector $(x,y,z)_{\beta_A} \in < B >$ si y sólo si

$$(x,y,z)_{\beta_A} = \alpha(1,2,-2)_{\beta_A} + \beta(0,1,-1)_{\beta_A} = (\alpha, 2\alpha+\beta, -2\alpha-\beta)_{\beta_A}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = 2\alpha+\beta, \\ z = -2\alpha-\beta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \boxed{y+z=0.}$$

Ejercicio 4 (2,5 puntos). Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ que verifica:

$$f(1,0,1) = (1,0), \quad f(0,1,1) = (2,3), \quad f(0,0,1) = (1,1).$$

En este ejercicio usaremos la notación β_A para denotar a la base definida en el ejercicio anterior. Además β_C^3 y β_C^2 serán respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Se pide:

1. Decir quiénes son n y k (0,3 puntos).

Solución:

$n = 3$ y $k = 2$.

2. Calcular $M_{\beta_A\beta_C^2}(f)$ (0,4 puntos).

Solución:

De las imágenes que nos dan de los vectores de β_A obtenemos:

$$M_{\beta_A\beta_C^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcular $M_{\beta_C^3\beta_C^2}(f)$ (0,8 puntos).

Solución:

$$M_{\beta_C^3\beta_C^2}(f) = M_{\beta_C^2\beta_C^2} M_{\beta_A\beta_C^2}(f) M_{\beta_A\beta_C^3} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$ (0,6 puntos).

Solución:

Un vector (x,y,z) pertenece a $\operatorname{Ker} f$ si y sólo si $M_{\beta_C^3\beta_C^2}(f)(x,y,z)^t = \mathbf{0}$. Así que:

$$\left\{ \begin{array}{l} y+z=0, \\ -x+2y+z=0. \end{array} \right.$$

Por lo tanto $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} M_{\beta_C^3\beta_C^2}(f) = 1$ y $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,-1)\}$.

5. Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$ (0,4 puntos).

Solución:

Sabemos que
$$\operatorname{Im} f =< (0,-1),(1,2),(1,1) >$$
. Como el primer y segundo vector forman un conjunto de vectores linealmente independientes y maximal entonces $\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(0,-1),(1,2)\}$. Así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y no se pueden dar ecuaciones de este subespacio.

Ejercicio 5 (2 puntos). En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:
$$S =< (1,0,0,0),(0,1,1,1) > \quad \text{y} \quad T = \{(x,y,z,t) : x = 0, 2y - z - t = 0\}$$
y se pide:

1. Una base, la dimensión y las ecuaciones de S (0,4 puntos).

Solución:

Los dos vectores que generan S también son linealmente independientes, por lo tanto son una base de S:
$$\beta_S = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1)\}.$$
Ahora calculamos las ecuaciones que debe satisfacer un vector $(x,y,z,t) \in S$:
$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \beta, \\ t = \beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{cases}}$$

2. Una base y la dimensión de T (0,4 puntos).

Solución:

Como la dimensión de T es 2 ($\dim \mathbb{R}^4$-número de ecuaciones linealmente independientes que definen a T) bastará con encontrar dos vectores linealmente independientes en T para dar una base:
$$\beta_T = \{(0,0,1,-1),(0,1,2,0)\}.$$

3. Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S \cap T$ (0,4 puntos).

Solución:

Las ecuaciones de $S \cap T$ se obtienen como la unión de las ecuaciones de S con las ecuaciones de T:
$$\begin{cases} x = 0, \\ 2y - z - t = 0, \\ y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} F_2 - F_3 - F_4 \\ \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{cases}}$$
Así que $\dim S \cap T = 4 - \mathrm{rg}A = 1$ (A es la matriz asociada al sistema que define $S \cap T$).

Ahora obtenemos la base de $S \cap T$:
$$\beta_{S \cap T} = \{(0,1,1,1)\}.$$

4. Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S+T$ (0,4 puntos).

Solución:

Usando la fórmula de Grassman se tiene que:

$$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S\cap T = 2+2-1 = 3.$$

Un conjunto generador de $S+T$ se obtiene uniendo conjuntos generadores de S y de T, es decir:

$$S+T =< (1,0,0,0), (0,1,1,1), (0,0,1,-1), (0,1,2,0) >,$$

de estos cuatro vectores ahora nos quedamos con tres que sean linealmente independientes y tendremos una base de $S+T$. Es fácil darse cuanta que los tres primeros vectores son linealmente independientes, luego:

$$\beta_{S+T} = \{(1,0,0,0), (0,1,1,1), (0,0,1,-1)\}.$$

Acabamos dando las ecuaciones que satisface el subespacio $S+T$, para ello tomamos $(x,y,z,t) \in S+T$ y recordamos que necesitamos 1 ecuación ($\dim \mathbb{R}^4 - \dim S+T$), entonces:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,1,1) + \gamma(0,0,1,-1) = (\alpha, \beta, \beta+\gamma, \beta-\gamma) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \beta+\gamma, \\ t = \beta-\gamma. \end{cases} \Rightarrow \boxed{z+t-2y=0.} \quad (2)$$

5. Dada la base $\beta = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$, justifica si el vector $(1,2,3,4)_\beta$ pertenece a alguno de los subespacios $S, T, S\cap T, S+T$ (0,4 puntos).

Solución:

Obtenemos fácilmente las coordenadas del vector $(1,2,3,4)_\beta$ en la base canónica:

$$(1,2,3,4)_\beta = (1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + 3(1,1,1,0) + 4(1,1,1,1) = (10,9,7,4).$$

Se comprueba fácilmente que este vector no satisface las ecuaciones de ninguno de los subespacios dados. Así que $(1,2,3,4)_\beta$ no pertenece a ninguno de los subespacios propuestos.

Observaciones

- Tienes que entregar la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un folio nuevo y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final de cada uno de los apartados** debe estar dentro de un **recuadro fácil de identificar**, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Desde ese mismo momento tendréis disponible en copistería el examen resuelto y también en la página web de la asignatura.

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería (Primer parcial)
Ingeniería técnica de Obras Públicas
3 de septiembre de 2005

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. La expresión analítica de f en las bases canónicas.
2. El núcleo y la imagen de f.
3. La matriz de f respecto a las bases
$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$
4. El rango de f.

Ejercicio 2 (2,5 puntos)**.**

1. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso de que sea diagonalizable da la matriz diagonal y la matriz de paso que la diagonaliza (1,25 puntos).
2. Calcula un valor aproximado de $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ usando el polinomio de Taylor de orden 3. Da una estimación del error cometido en la aproximación. (1,25 puntos).

Ejercicio 3 (2,5 puntos)**.** Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} S &= <(1,0,0,0),(1,1,1,0)>, \\ T &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 4y, z = t\}, \end{aligned}$$

se pide:

(a) Calcula una base de S y da su dimensión (0,5 puntos).

(b) Calcula una base de T y da su dimensión (0,5 puntos).

(c) Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio S respecto de la base de $\mathbb{R}^4$ que sigue
$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),\ (1,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (1,1,0,0)\} \qquad \text{(0,5 puntos).}$$

(d) Calcula las ecuaciones cartesianas, una base y la dimensión del subespacio $S \cap T$ (0,5 puntos).

(e) Calcula una base y la dimensión de $S + T$ (0,5 puntos).

Ejercicio 4 (2,5 puntos)**.** Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,1)\}$$

y

$$\beta' = \{v_1 = (1,0,3), v_2 = (0,2,1), v_3 = (1,0,2)\}.$$

Se pide:

1. Calcular la matriz de cambio de base de β a β' (0,6 puntos).
2. Calcular la matriz de cambio de base de β' a β (0,6 puntos).
3. Calcula, si es posible, la inversa de la suma de las matrices de los dos apartados anteriores (0,6 puntos).
4. Usando alguna de las matrices anteriores calcula las coordenadas del vector $(-1,1,3)_{\beta'}$ en la base β (0,7 puntos).

	Ingeniería Técnica de Minas **Fundamentos Matemáticos** **12 de junio de 2006, 9h30mn-12h30mn**

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

Ejercicio 1 (Integración múltiple. 2,5 puntos). 1. Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas: $\Phi(r,\theta,\phi) = \ldots$ *(0,2 puntos).* **Solución:**

$\Phi(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta \text{sen}\phi, r\text{sen}\theta\text{sen}\phi, r\cos\phi)$

2. ¿En qué rango máximo (abierto) varían r y los ángulos θ y ϕ para que Φ sea biyectiva? *(0,4 puntos).* **Solución:**

$(r,\theta,\phi) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$

3. Calcula el jacobiano de Φ y di cuál es el valor absoluto de su determinante (este determinante no hace falta que lo calcules explícitamente) *(0,4 puntos).*

Solución:

$$J\Phi(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\text{sen}\phi & -r\text{sen}\theta\text{sen}\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \text{sen}\theta\text{sen}\phi & r\cos\theta\text{sen}\phi & r\text{sen}\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\text{sen}\phi \end{pmatrix}$$

$$|\det J\Phi(r,\theta,\phi)| = r^2\text{sen}\phi$$

4. Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x,y,z) : 25 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 49, y \geq 0\}$ *(0,75 puntos).*

Solución:

$$V = \iiint_\Omega 1dxdydz = \int_5^7 \int_0^\pi \int_0^\pi r^2\text{sen}\phi d\phi d\theta dr = [r^3/3]_5^7[-\cos\phi]_0^\pi\pi$$
$$= \frac{2\pi}{3}(7^3-5^3) = \frac{436\pi}{3}$$

5. Calcula la integral $\iiint_\Omega \text{sen}[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]dxdydz$ *(0,75 puntos).*

Solución:

$$\iiint_\Omega \text{sen}[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]dxdydz = \int_5^7\int_0^\pi\int_0^\pi r^2\text{sen}(r^3)\text{sen}\phi d\phi d\theta dr$$
$$= \frac{1}{3}\int_5^7\int_0^\pi\int_0^\pi 3r^2\text{sen}(r^3)\text{sen}\phi d\phi d\theta dr = \frac{1}{3}[-\cos(r^3)]_{r=5}^{r=7}[-\cos\phi]_{\phi=0}^{\pi}\pi$$
$$= \frac{2\pi}{3}(\cos(125)-\cos(343))$$

Ejercicio 2 (Topología-Continuidad. 2,5 puntos).

1. Da una razón que justifique que la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, definida por $f(x,y)=|\cos(x)\cos(y+x)|$, no es una norma *(0,5 puntos)*.

   Solución:

   La aplicación no es una norma porque $f(0,0)=1\neq 0$.

2. Da una razón por la que el conjunto $K=\{(x,y): x^2+y^2>4\}$ no es compacto *(0,5 puntos)*.

   Solución:

   No es compacto porque no es ni cerrado ni acotado.

3. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ *(1,5 puntos)*.

   Solución:

   Estudiamos el límite utilizando coordenadas polares:

   $$\lim_{r\to 0}\frac{3r^4\cos^3\theta\text{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to 0}3r^3\cos^3\theta\text{sen}\theta = 0$$

   Ahora, si $f(x,y)=\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, intentamos acotar $|f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)-0|$ con una función $F(r)$ que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

   $$|f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)-0| = |3r^3\cos^3\theta\text{sen}\theta| \leq 3r^3 = F(r)$$

   Como $F(r)\to 0$ cuando $r\to 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}=0$.

Ejercicio 3 (Matriz jacobiana. 2,5 puntos).

1. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definidas por:

   $$f(x,y)=(x+y^2x, xy) \qquad g(x,y)=(x+e^{xy}, y-x, \text{sen}(xy)).$$

   Se pide:

   a) $Jf(x,y)$ *(0,4 puntos)*.
   Solución:

   $$Jf(x,y)=\begin{pmatrix}1+y^2 & 2yx\\ y & x\end{pmatrix}$$

   b) $Jg(x,y)$ *(0,4 puntos)*.
   Solución:

   $$Jg(x,y)=\begin{pmatrix}1+e^{xy}y & xe^{xy}\\ -1 & 1\\ y\cos(xy) & x\cos(xy)\end{pmatrix}$$

c) Da la expresión de la aplicación $g \circ f$ *(0,3 puntos)*.

Solución:

$$g \circ f(x,y) = g(x + y^2x, xy) = \left(x + y^2x + e^{(x+y^2x)xy}, xy - x - y^2x, \operatorname{sen}[(x + y^2x)xy]\right)$$

d) Usando la fórmula del jacobiano de una composición de aplicaciones se pide calcular $Jg \circ f(0,1)$ *(0,4 puntos)*.

Solución:

$$\begin{aligned} Jg \circ f(0,1) &= Jg(f(0,1))Jf(0,1) = Jg(0,0)Jf(0,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) A la vista del resultado del apartado anterior, se piden los valores de $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial g \circ f}{\partial y}(0,1)$ *(0,4 puntos)*.

Solución:

Según la teoría estas parciales aparecen en las columnas de la matriz calculada en el apartado anterior. Es decir:

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,1) = (2, -1, 0),$$
$$\frac{\partial g \circ f}{\partial y}(0,1) = (0, 0, 0).$$

2. Si $h : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{2000}$ es una aplicación de clase C^1, responde a las siguientes cuestiones para un $a \in \mathbb{R}^{2000}$ *(0,2 puntos por apartado)*.

a) ¿Cuál es el tamaño de $Jh(a)$?

Solución:

El tamaño es 2000×2000.

b) ¿Es la matriz $Jh(a)$ simétrica?

Solución:

No se puede asegurar que sea simétrica, si fuera de clase C^2 sí lo podríamos asegurar.

c) ¿Qué condición le exigirías a h para asegurar que $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_{2000}}(a) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_{2000} \partial x_1}(a)$?

Solución:

Que la función sea de clase C^2.

Ejercicio 4 (Extremos relativos-Diferenciabilidad. 2,5 puntos). 1. Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + 2x^2y^2 + 3y^2$ y di si son máximos o mínimos *(1,6 puntos)*.

Solución:

Hacemos las parciales e igualamos a 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4xy^2 = 2x(1 + 2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4yx^2 + 6y = 2y(2x^2 + 3) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Así que el único punto candidato a que haya un extremo relativo es $(0,0)$. Estudiamos en él el Hessiano:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1+2y^2) & 8xy \\ 8xy & 2(2x^2+3) \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Como la sucesión $1, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 12$ está formada sólo por miembros positivos tenemos que en $(0,0)$ hay un mínimo relativo.

2. En las siguientes cuestiones nos referiremos a una aplicación $g : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$. Se hacen algunas preguntas para verificar que conoces la relación entre *continuidad, derivabilidad respecto a cualquier dirección, diferenciabilidad y clase* C^1.

   a) Si la aplicación g es derivable respecto a sus 2006 variables ¿Podemos decir que g es continua? ¿Y diferenciable? *(0,3 puntos).*

   Solución:

   Como se vio en teoría en este caso no se puede asegurar ni que g sea continua ni diferenciable.

   b) Ahora suponemos que g es diferenciable ¿Qué dos propiedades más puedes asegurar de g? *(0,3 puntos).*

   Solución:

   Podemos asegurar que es continua y que es derivable respecto de cualquier dirección.

   c) ¿Y si g es de clase C^1 qué puedes decir? *(0,3 puntos).*

   Solución:

   Podemos decir que es diferenciable, continua y derivable respecto de cualquier dirección.

Observaciones

- Tienes que entregar la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un folio nuevo y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final de cada uno de los apartados** debe estar dentro de un **recuadro fácil de identificar**, en el que debéis poner el número del apartado.

	Ingeniería Técnica de Minas **Fundamentos Matemáticos** **6 de febrero de 2006, 9h30mn-12h30mn**

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

Ejercicio 1 (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcular el polinomio característico p_A (0,2 puntos).

   <u>Solución:</u>

   $$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 \\ -3 & 3 & 5-x \end{vmatrix} = 20 - 24x + 9x^2 - x^3 = -(x-5)(x-2)^2$$

2. Calcular el espectro σ_A y especificar la multiplicidad de cada raíz (0,2 puntos).

   <u>Solución:</u>

   $\sigma_A = \{5, 2\}$. Además $m(5) = 1$ y $m(2) = 2$.

3. Justificar si la matriz A es diagonalizable (0,5 puntos).

   <u>Solución:</u>

   Según se vio en teoría, por ser $m(5) = 1$ entonces $\dim V_5 = m(5) = 1$.

   Falta ahora por ver, para demostrar que A es diagonalizable, que $\dim V_2 = m(2) = 2$. Pero esto es cierto porque $\dim V_2 = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$

   Por lo tanto A es una matriz diagonalizable.

4. Dar la matriz diagonal D (0,3 puntos).

   <u>Solución:</u>

   Elijo $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Dar la matriz de paso P (0,5 puntos).

Solución:

Para dar esta matriz calculamos bases de V_5 y de V_2.

$V_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x,y,z) \in V_5$ si y sólo si[1]

$$\begin{cases} -3x + 3z = 0, \\ -3x + 3y = 0. \end{cases}$$

Así que una base de V_5 es $\beta_5 = \{(1,1,1)\}$.

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$, es decir $(x,y,z) \in V_2$ si y sólo si[2]

$$\{\ -3x + 3y + 3z = 0 \quad \Rightarrow \{\ -x + y + z = 0$$

Así que una base de V_2 es $\beta_2 = \{(0,1,-1),(1,1,0)\}$.

Ahora obtenemos ya:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Especificar la relación entre A, D y P (0,3 puntos).

Solución:

$$D = P^{-1}AP.$$

Ejercicio 2 (1,5 puntos). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x^2)}{1-\cos(x^3)}.$$

Solución:

Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 6:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$,
- $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$,
- $\sin^3 x^2 = x^6 + o(x^6)$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$,
- $\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2!} + o(x^6)$,
- $1 - \cos x^3 = \frac{x^6}{2!} + o(x^6)$.

[1]Fíjate que he quitado la primera ecuación porque $A - 5I_3$ tiene rango 2 y por lo tanto sólo son necesarias dos ecuaciones linealmente independientes.

[2]Fíjate que me he quedado con una única ecuación porque $A - 2I_3$ tiene rango 1.

Así que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6+o(x^6)}{\frac{x^6}{2!}+o(x^6)} = \frac{1+\frac{o(x^6)}{x^6}}{\frac{1}{2!}+\frac{o(x^6)}{x^6}} = 2.$$

Ejercicio 3 (2 puntos). Se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$$\beta_A = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}, \quad \beta_C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad B = \{(1,2,1),(0,1,0)\}$$

y se pide:

1. Comprobar que β_A es una base de $\mathbb{R}^3$ (0,4 puntos), **Solución:**

   Para comprobar que es una base basta con ver que el determinante que de la matriz formada al poner los vectores de β_A por columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_A a la base canónica, es decir $M_{\beta_A\beta_C}$ (0,6 puntos).

   Solución:

   Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_C respecto a β_A. Calculamos esas coordenadas (para simplificar la notación denotaremos a los vectores de la base β_A por v_1, v_2 y v_3):

   - $e_1 = (1,0,0) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_{\beta_A}$,
   - $e_2 = (0,1,0) = v_2 - v_3 = (0,1,-1)_{\beta_A}$,
   - $e_3 = (0,0,1) = v_3 = (0,0,1)_{\beta_A}$.

   Así que:

$$M_{\beta_A\beta_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la matriz de cambio de base de la base β_C a la base β_A, es decir $M_{\beta_C\beta_A}$ (0,3 puntos).

   Solución:

   Esta matriz se construye poniendo por columnas las coordenadas de los vectores de la base β_A respecto a β_C. Así que:

$$M_{\beta_C\beta_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dar las coordenadas de los vectores del conjunto B en la base β_A (0,3 puntos).

   Usando la matriz $M_{\beta_A\beta_C}$ es fácil calcular esas coordenadas:

   - $[M_{\beta_A\beta_C}(1,2,1)^t]^t = (1,2,-2)_{\beta_A}$.

- $[M_{\beta_A \beta_C}(0,1,0)^t]^t = (0,1,-1)_{\beta_A}$.

Por lo tanto:

$$B = \{(1,2,-2)_{\beta_A}, (0,1,-1)_{\beta_A}\}.$$

5. Calcular las ecuaciones del subespacio $< B >$ respecto de la base β_A (0,4 puntos).

   <u>**Solución:**</u>

   Antes de nada tenemos claro que se necesita 1 ecuación (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de $< B >$).

   Un vector $(x,y,z)_{\beta_A} \in < B >$ si y sólo si

$$(x,y,z)_{\beta_A} = \alpha(1,2,-2)_{\beta_A} + \beta(0,1,-1)_{\beta_A} = (\alpha, 2\alpha+\beta, -2\alpha-\beta)_{\beta_A}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = 2\alpha + \beta, \\ z = -2\alpha - \beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{y + z = 0.}$$

Ejercicio 4 (2,5 puntos). Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ que verifica:

$$f(1,0,1) = (1,0), \quad f(0,1,1) = (2,3), \quad f(0,0,1) = (1,1).$$

En este ejercicio usaremos la notación β_A para denotar a la base definida en el ejercicio anterior. Además β_C^3 y β_C^2 serán respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Se pide:

1. Decir quiénes son n y k (0,3 puntos).

   <u>**Solución:**</u>

   $n = 3$ y $k = 2$.

2. Calcular $M_{\beta_A \beta_C^2}(f)$ (0,4 puntos).

   <u>**Solución:**</u>

   De las imágenes que nos dan de los vectores de β_A obtenemos:

$$M_{\beta_A \beta_C^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcular $M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f)$ (0,8 puntos).

   <u>**Solución:**</u>

$$M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f) = M_{\beta_C^2 \beta_C^2} M_{\beta_A \beta_C^2}(f) M_{\beta_A \beta_C^3} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$ (0,6 puntos).

   <u>**Solución:**</u>

   Un vector (x,y,z) pertenece a $\operatorname{Ker} f$ si y sólo si $M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f)(x,y,z)^t = \mathbf{0}$. Así que:

$$\left\{ \begin{array}{l} y + z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{array} \right.$$

   Por lo tanto $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} M_{\beta_C^3 \beta_C^2}(f) = 1$ y $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,-1)\}$.

5. Calcular una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$ (0,4 puntos).

   Solución:

   Sabemos que
$$\operatorname{Im} f =< (0,-1),(1,2),(1,1) >$$
   . Como el primer y segundo vector forman un conjunto de vectores linealmente independientes y maximal entonces $\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(0,-1),(1,2)\}$. Así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y no se pueden dar ecuaciones de este subespacio.

Ejercicio 5 (2 puntos). En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:
$$S =< (1,0,0,0),(0,1,1,1) > \quad \text{y} \quad T = \{(x,y,z,t) : x = 0, 2y - z - t = 0\}$$
y se pide:

1. Una base, la dimensión y las ecuaciones de S (0,4 puntos).

   Solución:

   Los dos vectores que generan S también son linealmente independientes, por lo tanto son una base de S:
$$\beta_S = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1)\}.$$
   Ahora calculamos las ecuaciones que debe satisfacer un vector $(x,y,z,t) \in S$:
$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,1,1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \beta, \\ t = \beta \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{array}\right.}$$

2. Una base y la dimensión de T (0,4 puntos).

   Solución:

   Como la dimensión de T es 2 ($\dim \mathbb{R}^4$-número de ecuaciones linealmente independientes que definen a T) bastará con encontrar dos vectores linealmente independientes en T para dar una base:
$$\beta_T = \{(0,0,1,-1),(0,1,2,0)\}.$$

3. Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S \cap T$ (0,4 puntos).

   Solución:

   Las ecuaciones de $S \cap T$ se obtienen como la unión de las ecuaciones de S con las ecuaciones de T:
$$\left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ 2y - z - t = 0, \\ y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} F_2 - F_3 - F_4 \\ \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y - z = 0, \\ y - t = 0 \end{array}\right.}$$
   Así que $\dim S \cap T = 4 - \operatorname{rg} A = 1$ (A es la matriz asociada al sistema que define $S \cap T$).

   Ahora obtenemos la base de $S \cap T$:
$$\beta_{S \cap T} = \{(0,1,1,1)\}.$$

4. Una base, la dimensión y las ecuaciones de $S+T$ (0,4 puntos).

   Solución:

   Usando la fórmula de Grassman se tiene que:

$$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S\cap T = 2+2-1 = 3.$$

   Un conjunto generador de $S+T$ se obtiene uniendo conjuntos generadores de S y de T, es decir:

$$S+T = <(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,-1),(0,1,2,0)>,$$

   de estos cuatro vectores ahora nos quedamos con tres que sean linealmente independientes y tendremos una base de $S+T$. Es fácil darse cuanta que los tres primeros vectores son linealmente independientes, luego:

$$\beta_{S+T} = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,-1)\}.$$

   Acabamos dando las ecuaciones que satisface el subespacio $S+T$, para ello tomamos $(x,y,z,t) \in S+T$ y recordamos que necesitamos 1 ecuación ($\dim \mathbb{R}^4 - \dim S+T$), entonces:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,1,1) + \gamma(0,0,1,-1) = (\alpha,\beta,\beta+\gamma,\beta-\gamma) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \beta+\gamma, \\ t = \beta-\gamma. \end{cases} \Rightarrow \boxed{z+t-2y=0.} \tag{2}$$

5. Dada la base $\beta = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, justifica si el vector $(1,2,3,4)_\beta$ pertenece a alguno de los subespacios $S, T, S\cap T, S+T$ (0,4 puntos).

   Solución:

   Obtenemos fácilmente las coordenadas del vector $(1,2,3,4)_\beta$ en la base canónica:

$$(1,2,3,4)_\beta = (1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + 3(1,1,1,0) + 4(1,1,1,1) = (10,9,7,4).$$

   Se comprueba fácilmente que este vector no satisface las ecuaciones de ninguno de los subespacios dados. Así que $(1,2,3,4)_\beta$ no pertenece a ninguno de los subespacios propuestos.

Observaciones

- Tienes que entregar la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un folio nuevo y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final de cada uno de los apartados** debe estar dentro de un **recuadro fácil de identificar**, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Desde ese mismo momento tendréis disponible en copistería el examen resuelto y también en la página web de la asignatura.

Ingeniería Técnica de Minas
Fundamentos Matemáticos
19 de junio de 2006, 9h30mn-12h30mn

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Total**
Puntuación								

Observaciones

- Tienes que entregar la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un folio nuevo y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final de cada uno de los apartados** debe estar dentro de un **recuadro fácil de identificar**, en el que debéis poner el número del apartado.
- Los alumnos que se presentan sólo al segundo parcial deben responder a las preguntas 3, 4, 5 y 6.
- Los alumnos que se presentan a toda la materia deben responder a los ejercicios 1, 2, 3 y 4.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística el jueves 22 de junio de 2006. Las revisiones de examen está previsto que se hagan el martes 27 y jueves 29 de junio (se confirmarán estas fechas en la publicación de las notas).

Primer parcial

Ejercicio 1 (2,5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. Los valores de n y de m *(0,2 puntos)*.

   Solución:

   Los valores de n y de m son respectivamente 2 y 3, es decir, el número de columnas y filas de la matriz A.

2. La expresión analítica de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ *(0,3 puntos)*.

   Solución:

   $$f(x,y) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^t = (2x, x+y, 2y).$$

3. El núcleo y la imagen de f: bases, ecuaciones y dimensión de cada uno *(0,75 puntos)*..

   Solución:

   El núcleo

   El núcleo de la aplicación f estará formado por aquellos vectores (x,y) tales que $f(x,y) = (0,0,0)$. Es decir, serán los vectores (x,y) que verifican el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

   $$\begin{cases} 2x = 0, \\ x+y = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$$

   Así que resolviendo el sistema se ve que Ker $f = \{(0,0)\}$, que una base es $\beta_{\text{Ker } f} = \emptyset$ y que la dimensión es 0.

   La imagen

   La imagen es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores columna de la matriz A, es decir Im $f =< (2,1,0), (0,1,2) >$. Como los dos vectores generadores también son linealmente independientes entonces son una base de Im f y por lo tanto la dimensión del subespacio imagen es 2.

   Calculamos ahora sus ecuaciones. Un vector (x,y,z) estará en la imagen si:

   $$(x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(0,1,2),$$

   es decir:

   $$\begin{cases} x = 2\alpha, \\ y = \alpha + \beta, \\ z = 2\beta. \end{cases}$$

   Ahora eliminamos los parámetros α y β anteriores y obtenemos la ecuación que define a la imagen:

   $$x - 2y + z = 0.$$

4. La matriz de f respecto de las bases

   $$\mathcal{B} = \{(1,1),\ (1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$

   (0,75 puntos).

   Solución:

   Vamos a calcular esta matriz utilizando la definición de la misma. Para ello debemos calcular las imágenes de los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$ por la aplicación f y a calcular las coordenadas de esas imágenes en la base $\mathcal{B}'$:

   $$f(1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = (0,0,2)_{\mathcal{B}'},$$
   $$f(1,0) = (2,1,0) = (1,0,0) + (1,1,0) = (1,1,0)_{\mathcal{B}'}.$$

Así que la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Responde:

5. ¿Se puede hacer la composición $f \circ f$? ¿Qué tamaño tendría la matriz asociada a $f \circ f$? *(0,2 puntos).*

   Solución:

   No se puede hacer la composición porque el espacio de partida y llegada de f no coinciden.

6. ¿Es la aplicación f invertible? *(0,3 puntos).*

   Solución:

   No, porque para que sea invertible tiene que ser un endomorfismo.

Ejercicio 2 (2,5 puntos). 1. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

En caso de que sea diagonalizable da la matriz diagonal y la matriz de paso que la diagonaliza *(1,75 puntos).*

Solución:

Para empezar calculamos el polinomio característico de la matriz A:

$$p_A(x) = |A - xI_3| = \begin{pmatrix} 3-x & -2 & 2 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 2 & -2 & 3-x \end{pmatrix} = 3 - 7x + 5x^2 - x^3 = -(x-3)(x-1)^2$$

Calculamos el espectro de A resolviendo la ecuación $p_A(x) = 0$ que tiene como soluciones a 1 y a 3. Por lo tanto $\sigma_A(x) = \{1, 3\}$, $m(1) = 2$ y $m(3) = 1$.

Para ver si la matriz es diagonalizable sólo debemos comprobar que $\dim V_1 = m(1) = 2$ porque la igualdad $\dim V_3 = m(3)$ se satisface por ser $m(3) = 1$.

La matriz $A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene, claramente, rango 1. Así que $\dim V_1 = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) = 3 - 1 = 2 = m(1)$.

Por lo tanto hemos demostrado que la matriz A es diagonalizable. Encontremos una matriz de paso que la diagonaliza y la matriz diagonal. Para ello es necesario encontrar bases de los subespacios vectoriales V_1 y V_3.

V_1 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$ satisfacen esta ecuación y son linealmente independientes. Así que una base de V_1 es:

$$\beta_{V_1} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

V_3 es el espacio de vectores que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el vector $(1, 1, 0)$ satisface esta ecuación, por lo que una base de V_3 es:

$$\beta_{V_3} = \{(1, 1, 1)\}.$$

Si tomamos como matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces una matriz de paso será:
$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La inversa de esta matriz es: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y se verifica la igualdad:

$$D = P^{-1}AP.$$

2. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos^2(x^2)]\text{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)}$$

(0,75 puntos).

Solución:

Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 7:

- $\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$,
- $\text{sen}^2 x = x^2 + \frac{x^6}{36} - 2\frac{x^4}{3!} + 2\frac{x^6}{5!} + o(x^7)$,
- $\text{sen}^3 x = \text{sen}x\text{sen}^2 x = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} + \frac{x^7}{36} + o(x^7)$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$,
- $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^7)$,
- $\cos^2 x^2 = 1 - 2\frac{x^4}{2!} + o(x^7)$.
- $1 - \cos^2 x^2 = 2\frac{x^4}{2!} + o(x^7)$.
- $[1-\cos^2 x^2]\text{sen}^3 x = x^7 + o(x^7)$.
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$.
- $\log(1+x^6) = x^6 + o(x^7)$.
- $x\log(1+x^6) = x^7 + o(x^7)$.

Así que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos^2(x^2)]\text{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^7 + o(x^7)}{x^7 + o(x^7)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^7)}{x^7}}{1 + \frac{o(x^7)}{x^7}} = 1$$

$$\boxed{\textsc{Segundo parcial}}$$

Ejercicio 3 (Integración múltiple. 2,5 puntos). 1. Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas: $\Phi(r, \theta, z) = \dots$ *(0,2 puntos)*. **Solución:**

$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r\text{sen}\theta, z)$

2. ¿En qué rango máximo (abierto) varían r, θ y z para que Φ sea biyectiva? *(0,4 puntos)*. **Solución:**

$(r, \theta, z) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

3. Calcula el jacobiano de Φ y calcula el valor absoluto de su determinante (este determinante lo tienes que calcular explícitamente) *(0,4 puntos)*.

Solución:

$$J\Phi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\text{det} J\Phi(r, \theta, \phi)| = |r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)| = r$$

4. Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x, y, z) : 16 \leq x^2 + y^2 \leq 81, x \leq 0, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ *(1,5 puntos)*.

Solución:

$$V = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \int_4^9 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{r^2} r dz d\theta dr = \int_4^9 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} r^3 d\theta dr = [r^4/4]_4^9 \pi = \frac{6305\pi}{4}$$

Ejercicio 4 (Extremos condicionados-Diferenciabilidad. 2,5 puntos). 1. Usando el método explicado para encontrar extremos condicionados, calcula los extremos condicionados de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ con ligadura $xy = 4$. Di si son máximos o mínimos condicionados *(1,6 puntos)*.

Solución:

Empezamos escribiendo la lagrangiana del problema $L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 4)$.

Imponemos las condiciones necesarias para que existan extremos condicionados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = 2x + y\lambda = 0 &\Rightarrow 2x = -y\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = 2y + x\lambda = 0 &\Rightarrow 2y = -x\lambda \\ g(x, y) = xy - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$. Ahora utilizamos esta igualdad en la tercera ecuación: $\pm x^2 = 4$. Ahora se ve que el signo menos en esta ecuación no tiene sentido por lo que $x = \pm 2$ y los puntos en los que podemos tener un extremo condicionado son:

- $P_1 = (2, 2)$ con $\lambda = -2$.
- $P_2 = (-2, -2)$ con $\lambda = -2$.

Calculamos ahora el Hessiano de f:

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow HL(P_1) = HL(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tomamos vectores $h^i = (h_{1,i}, h_{2,i}) \neq 0$ que verifiquen $dg(P_i)(h^i) = 0$ y vemos si las expresiones $h^i HL(P_i)(h^i)^t$ son positivas o negativas. Antes de calcular esos vectores computamos la expresión $h^i HL(P_i)(h^i)^t$ por si no intervinieran los valores de los vectores h^i para determinar el signo.

$$h^i HL(P_i)(h^i)^t = 2h_{1,i}^2 - 2h_{1,i}h_{2,i} + 2h_{2,i}^2 = 2(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 - 2h_{1,i}h_{2,i}) = 2(h_{1,i} - h_{2,i})^2 > 0.$$

Así que en los dos puntos, $(2,2)$ y $(-2,-2)$, tenemos mínimos condicionados.

2. En las siguientes cuestiones nos referiremos a una aplicación $g : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}$. La letra a denota un punto de $\mathbb{R}^{2006}$.

   a) Si $\frac{\partial g}{\partial x_{1003}}(a) > 0$ ¿Puede tener la función g un máximo relativo? ¿Y un mínimo? *(0,3 puntos)*.

   Solución:

   No puede tenerlos porque para que existan dichos extremos necesitamos que todas las parciales se anulan y el enunciado dice que hay una parcial que no se anula.

   b) Si $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{1003}^2}(a) > 0$ ¿Se puede asegurar que g tiene un mínimo relativo?*(0,3 puntos)*.

   Solución:

   No porque, por ejemplo, no sabemos si se anulan las parciales primeras.

   c) Si la función g es derivable respecto de cualquier dirección entonces ¿Puedes asegurar que es continua? ¿Y diferenciable? ¿Y de clase C^1? ¿Y de clase C^2? *(0,3 puntos)*.

   Solución:

   No se puede asegurar nada.

PREGUNTAS COMPLEMENTARIAS DEL SEGUNDO PARCIAL

Ejercicio 5 (Matriz jacobiana. 2,5 puntos). 1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x,y) = (x + xe^y, x + y, y^2 \mathrm{sen} x) \qquad g(x,y,z) = (x + e^{xyz}, y - xz).$$

Se pide:

a) $Jf(x,y)$ *(0,4 puntos)*.

Solución:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + e^y & xe^y \\ 1 & 1 \\ y^2 \cos x & 2y \mathrm{sen} x \end{pmatrix}$$

b) $Jg(x,y)$ *(0,4 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+e^{zxy}yz & e^{xyz}zx & e^{xyz}xy \\ -z & 1 & -x \end{pmatrix}$$

c) ¿Se puede hacer la composición $g \circ f$? En caso afirmativo da la matriz $J(g \circ f)(0,0)$ *(0,3 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

Sí se puede hacer la composición porque f se aplica sobre $\mathbb{R}^3$ y g parte de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} Jg \circ f(0,0) &= Jg(f(0,0))Jf(0,0) = Jg(0,0,0)Jf(0,0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Usando la fórmula del jacobiano de una composición de aplicaciones se pide calcular $Jf \circ g(0,0,0)$ *(0,4 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

$$\begin{aligned} Jf \circ g(0,0,0) &= Jf(g(0,0,0))Jg(0,0,0) = Jf(1,0)Jg(0,0,0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) A la vista de los resultados de antes se piden los valores de $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f \circ g}{\partial y}(0,0,0)$ *(0,4 puntos).*

<u>**Solución:**</u>

Según la teoría estas parciales aparecen en las columnas de la matrices calculadas en los dos apartados anteriores. En concreto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g \circ f}{\partial x}(0,0) &= (2,1), \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial y}(0,0,0) &= (1,1,0). \end{aligned}$$

2. Si $h : \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$ es una aplicación de clase C^2, responde a las siguientes cuestiones para un $a \in \mathbb{R}^{2006}$ *(0,2 puntos por apartado).*

a) Si $\det Jh(a) \neq 0$ sabemos que la aplicación h es localmente invertible de manera única. Llamemos h^{-1} a la inversa local de h ¿Quién es $Jh^{-1}(h(a))$?

<u>**Solución:**</u>

$Jh^{-1}(h(a)) = (Jh(a))^{-1}$

b) ¿Coinciden el tamaño de la matriz Hessiana $Hh(a)$ y el de la matriz jacobiana $Jh(a)$?

<u>**Solución:**</u>

En este caso sí. El tamaño de ambas es 2006×2006.

c) ¿Puedes asegurar que alguna de las dos matrices anteriores es simétrica?

<u>**Solución:**</u>

Sí, la matriz hessiana es simétrica por ser la aplicación de clase C^2. En cuanto a la matriz jacobiana, aunque sea cuadrada, no podemos asegurar que sea simétrica.

Ejercicio 6 (Topología-Continuidad. 2,5 puntos). 1. Da una razón que justifique que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \operatorname{sen}(y+x)$, no es una norma *(0,5 puntos)*.

<u>**Solución:**</u>

La aplicación no es una norma porque $f(0, \pi) = 0$ y $(0, \pi) \neq (0, 0)$.

2. ¿Existe algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea a la vez abierto y cerrado? Pon un ejemplo en caso de responder afirmativamente. *(0,25 puntos)*.

   <u>**Solución:**</u>

   Sí, por ejemplo todo $\mathbb{R}^2$ o el conjunto vacío.

3. Pon un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ y justifica por qué no es compacto *(0,25 puntos)*.

   <u>**Solución:**</u>

   $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 5\}$ no es compacto porque no está acotado.

4. Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 5$ *(1,5 puntos)*.

   <u>**Solución:**</u>

   Estudiamos el límite utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{3r^6 \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta}{r^3} + 5 = \lim_{r\to 0} 3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta + 5 = 5$$

   Ahora, si $f(x, y) = \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, intentamos acotar $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0|$ con una función $F(r)$ que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 5| = |3r^3 \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta| \leq 3r^3 = F(r)$$

   Como $F(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0$.

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
3 de febrero de 2007, 9h00mn-12h00mn

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

Observaciones

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Distribución de la puntuación

Apartado / **Ejercicio**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Todos**
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	2.5
2	0.4	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	3
3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4		2
4							2.5
Todos							10

Ejercicio 1 (Cuestiones, 2.5 puntos).

(1.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,1),(2,1,2)\} \subset \mathbb{Z}_3^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

Solución:

Para ver si son linealmente independientes nos planteamos la ecuación vectorial:

$$\alpha(1,2,1) + \beta(2,1,2) = (0,0,0),$$

en la que tanto α como β son escalares de $\mathbb{Z}_3$. Si existe alguna solución diferente de $\alpha = \beta = 0$ entonces el conjunto S es linealmente dependiente. Es fácil ver que $\alpha = 1 = \beta$ es solución, así que S es linealmente dependiente.

(1.2). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$.

Solución:

$f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ por ser $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores del núcleo, así que $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ y por lo tanto $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} f$.

(1.3). Dadas matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, demuestra o pon un contraejemplo a la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Solución:

La igualdad es falsa, basta con tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.4). Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\square}(g) = M_{\beta_8\square} M_{\square\beta_6}(g) M_{\beta_1\square}$;

b) $M_{\beta_3\beta_5}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_1\beta_8}(g) M_{\square\square}$.

Solución:

$$M_{\beta_1\beta_8}(g) = M_{\beta_8\beta_6} M_{\beta_1\beta_6}(g) M_{\beta_1\beta_1}$$

$$M_{\beta_3\beta_5}(g) = M_{\beta_5\beta_8} M_{\beta_1\beta_8}(g) M_{\beta_1\beta_3}$$

(1.5). De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2 + 25)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Solución:

Como $\sigma_A = \{5i, -5i\}$ la matriz tiene valores propios complejos y por lo tanto no es diagonalizable.

(1.6). De una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2+25)$. Da los valores de n y de m.

Solución:

El tamaño de la matriz será 2×2, es decir, $n = m = 2$.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 3 puntos).

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ y que $f(0, 0, 1) = (-2, -1, 0)$. Se pide:

(2.1). Encuentra los valores de a, de b y de c.

Solución:

Como $f(0, 0, 1)$ es el vector que está en la tercera columna de la matriz dada, se ve que $a = -2, b = -1, c = 0$.

(2.2). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcula $f(x, y, z)$.

Solución:

$f(x, y, z) = [M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)(x, y, z)^t]^t = (x + y - 2z, x - z, 0)$.

(2.3). Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base canónica de Ker f.

Solución:

Un vector $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si $f(x, y, z) = 0$, es decir, (x, y, z) satisface las ecuaciones $x + y - 2z = x - z = 0$, que claramente son linealmente independientes. Así que $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ y una base de Ker f es $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1, 1, 1)\}$.

(2.4). Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

Solución:

β es una base ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Para obtener la matriz solicitada usamos la relación:

$$M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta}.$$

Es fácil calcular

$$M_{\beta_c^3\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y ahora

$$M_{\beta\beta_c^3} = M_{\beta_c^3\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} M_{\beta\beta}(f) &= M_{\beta\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2.5). Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base β de Ker f.

Solución:

Un vector $(x, y, z)_\beta \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si $f((x, y, z)_\beta) = [M_{\beta\beta}(f)(x, y, z)^t]^t = (-y-2z, z, y+z)_\beta = \mathbf{0}$, así que las ecuaciones del núcleo en la base β son $-y - 2z = z = y + z = 0$. Como sólo se necesitaban dos linealmente independientes, nos quedamos con $z = y + z = 0$, que se pueden simplificar y queda $z = y = 0$. Ya sabíamos que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ y ahora $\beta'_{\operatorname{Ker} f} = \{(1, 0, 0)_\beta\}$.

(2.6). Calcula el vector $f((x, y, z)_\beta)$ expresando sus coordenadas en la base canónica. **Solución:**

$$\begin{aligned} f((x, y, z)_\beta) &= [M_{\beta\beta}(f)(x, y, z)^t]^t = (-y - 2z, z, y + z)_\beta \\ = (-y - 2z)(1, 1, 1) + z(0, 1, 1) + (y + z)(0, 0, 1) &= (-y - 2z, -y - z, 0). \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (Diagonalización, 2 puntos). De una matriz $C \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{1, 2\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(2) = m(1) = 2$. El espacio invariante V_1 tiene como base a $\beta_{V_1} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ y el espacio invariante V_2 tiene como base a $\beta_{V_2} = \{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$. Se pide:

(3.1). Justificar por qué C es diagonalizable.

Solución:

C es diagonalizable porque todos los valores propios son reales y además $m(2) = \dim V_2 = 2$ y $m(1) = \dim V_1 = 2$.

(3.2). Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.

__Solución:__

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.3). Calcular el vector $C(1,1,1,1)^t$.

__Solución:__

Obsérvese que $(1,1,1,1) \in V_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = 1x\}$, así que $C(1,1,1,1)^t = 1(1,1,1,1)^t = (1,1,1,1)^t$

(3.4). Calcular el vector $C(0,0,1,1)^t$.

__Solución:__

Como $(0,0,1,1) \in V_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = 2x\}$, entonces $C(0,0,1,1)^t = 2(0,0,1,1)^t = (0,0,2,2)^t$.

(3.5). Dar el valor de $|C|$.

__Solución:__

$|C| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |P||D|\frac{1}{|P|} = |D| = 4.$

Ejercicio 4 (Desarrollos de Taylor, 2.5 puntos). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3\log(1+3x^3)}$$

__Solución:__

Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 6:

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$,
- $\operatorname{sen}(2x^4) = 2x^4 + o(x^6)$,
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$.
- $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$.
- $\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4) = 2x^6 + o(x^6)$.
- $\log(1+3x^3) = 3x^3 - \frac{9x^4}{2} + o(x^6)$.
- $x^3\log(1+3x^3) = 3x^6 + o(x^6)$.

Así que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3\log(1+3x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^6 + o(x^6)}{3x^6 + o(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{o(x^6)}{x^6}}{3 + \frac{o(x^6)}{x^6}} = \frac{2}{3}$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
3 de febrero de 2007, 9h00mn-12h00mn

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

Observaciones

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Distribución de la puntuación

Ejercicio \ **Apartado**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Todos**
5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4			2
6	0.3	0.3	0.5	0.5	0.4			2
7								2
8								2
9								2

Ejercicio 5 (Cuestiones, 2 puntos).

(5.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,1),(2,1,2)\} \subset \mathbb{Z}_3^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

(5.2). Dadas matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, demuestra o pon un contraejemplo a la igualdad $|A+B| = |A| + |B| - |A||B|$.

(5.3). Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de la siguiente fórmula con matrices: $M_{\beta_1\beta_5}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_2\beta_8}(g) M_{\square\square}$.

(5.4). Justifica si el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0\}$ es compacto o no lo es.

(5.5). Si la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable ¿Puedes asegurar que es continua? ¿Y que admite derivadas direccionales en cualquier dirección? ¿Y que es de clase C^1? ¿Y de clase C^4? *(para puntuar este apartado se exige que todas las respuestas sean correctas).*

Ejercicio 6 (Aplicaciones lineales, 2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ y que $f(0,0,1) = (-2,-1,0)$. Se pide:

(6.1). Encuentra los valores de a, de b y de c.

(6.2). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcula $f(x,y,z)$.

(6.3). Dada la base $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, se pide $M_{\beta\beta}(f)$.

(6.4). Calcula una base, la dimensión y las ecuaciones respecto a la base β de Ker f.

(6.5). Calcula el vector $f((x,y,z)_\beta)$ expresando sus coordenadas en la base β.

Ejercicio 7 (Integración múltiple, 2 puntos). Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x,y,z) : 25 \leq x^2 + y^2 \leq 36, x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z \leq 2(x^2+y^2)\}$.

Ejercicio 8 (Desarrollos de Taylor, 2 puntos). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3 \log(1+3x^3)}$$

Ejercicio 9 (Extremos condicionados, 2 puntos). Usando el método explicado para encontrar extremos condicionados, calcula los extremos condicionados de la función $f(x,y) = 2(x^2+y^2)$ con ligadura $y = 4x^2$. Di si son máximos o mínimos condicionados.

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
5 de febrero de 2007, 9h30mn-12h30mn

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Apartado / **Ejercicio**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Todos**
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	2.5
2	0.4	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	3
3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4		2
4							2.5

Ejercicio 1 (Cuestiones, 1.5 puntos).

(1.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,3),(3,1,4)\} \subset \mathbb{Z}_5^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

Solución:

El conjunto es linealmente dependiente porque $(1,2,3)+3(3,1,4) = \mathbf{0}$ y $1 \neq 0$.

(1.2). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$.

Solución:

$f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, así que $\alpha\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$.

(1.3). Pon la fórmula del binomio de Newton, es decir, $(a+b)^n = \ldots\ldots$

Solución:

$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

(1.4). Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\square\beta_6} M_{\square\square}(g) M_{\beta_3\square}$;

b) $M_{\beta_2\beta_8}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_1\beta_5}(g) M_{\square\square}$.

Solución:

a) $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\beta_7\beta_6} M_{\beta_3\beta_6}(g) M_{\beta_3\beta_1}$;

b) $M_{\beta_2\beta_8}(g) = M_{\beta_8\beta_5} M_{\beta_1\beta_5}(g) M_{\beta_1\beta_2}$.

(1.5). De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2+25)(x-5)^2(x+5)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Solución:

$\sigma_A = \{5, -5, 5i, -5i\}$. Así que la matriz A no es diagonalizable porque su polinomio característico tiene raíces complejas.

(1.6). ¿Cuál es el tamaño de la matriz del apartado anterior?

Solución:

El tamaño es 5×5 porque le grado del polinomio característico es 5.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 3 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ y que $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f$. Se pide:

(2.1). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcular $f(x,y,z)$.

Solución:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} (x,y,z)^t = [\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} (x,y,z)^t]^t = (x+y-2z, x+az, bz)$$

(2.2). Encuentra los valores a y de b.

Solución:

Utilizaremos que $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f$:

$$f(1,1,1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

así que $a = -1$,$b = 0$.

(2.3). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base canónica del subespacio $\operatorname{Ker} f$.

Solución:

Un vector $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ si y sólo si $f(x,y,z) = \mathbf{0}$, es decir, (x,y,z) satisface las ecuaciones $x+y-2z = x-z = 0$, que claramente son linealmente independientes. Así que $\dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1$ y una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,1)\}$.

(2.4). Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

Solución:

β es una base ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Para obtener la matriz solicitada usamos la relación:

$$M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta}.$$

Es fácil calcular

$$M_{\beta_c^3\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y ahora

$$M_{\beta\beta_c^3} = M_{\beta_c^3\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$M_{\beta\beta}(f) = M_{\beta\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.5). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base β del subespacio Ker f.

Solución:

Un vector $(x,y,z)_\beta \in \text{Ker } f$ si y sólo si $f((x,y,z)_\beta) = [M_{\beta\beta}(f)(x,y,z)^t]^t = (-y-2z, z, y+z)_\beta = \mathbf{0}$, así que las ecuaciones del núcleo en la base β son $-y-2z = z = y+z = 0$. Como sólo se necesitaban dos linealmente independientes, nos quedamos con $z = y+z = 0$, que se pueden simplificar y queda $z = y = 0$. Ya sabíamos que $\dim \text{Ker } f = 1$ y ahora $\beta'_{\text{Ker } f} = \{(1,0,0)_\beta\}$.

(2.6). Calcula $f((x,y,z)_\beta)$, expresando sus coordenadas en la base β.

Solución:

$$f((x,y,z)_\beta) = [M_{\beta\beta}(f)(x,y,z)^t]^t = (-y-2z, z, y+z)_\beta$$

Ejercicio 3 (Diagonalización, 2 puntos). De una matriz $C \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{\pi, e\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(\pi) = m(e) = 2$. El espacio invariante V_π tiene como base a $\beta_{V_\pi} = \{(\pi,\pi,\pi,\pi), (0,\pi,\pi,\pi)\}$ y el espacio invariante V_e tiene como base a $\beta_{V_e} = \{(0,0,e,e), (0,0,0,e)\}$. Se pide:

(3.1). Justificar por qué C es diagonalizable.

Solución:

C es diagonalizable porque todos los valores propios son reales y además $m(\pi) = \dim V_\pi = 2$ y $m(e) = \dim V_e = 2$.

(3.2). Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.

Solución:

$$D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & 0 & 0 \\ \pi & \pi & e & 0 \\ \pi & \pi & e & e \end{pmatrix}$$

(3.3). Calcular el vector $C(\pi,\pi,\pi,\pi)^t$.

Solución:

Como $(\pi,\pi,\pi,\pi) \in V_\pi = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = \pi x\}$, entonces $C(\pi,\pi,\pi,\pi)^t = \pi(\pi,\pi,\pi,\pi)^t = (\pi^2,\pi^2,\pi^2,\pi^2)^t$.

(3.4). Calcular el vector $C(0,0,e,e)^t$.

Solución:

Como $(0,0,e,e) \in V_e = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = ex\}$, entonces $C(0,0,e,e)^t = e(0,0,e,e)^t = (0,0,e^2,e^2)^t$.

(3.5). Dar el valor de $|C|$.

Solución:

$|C| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |P||D|\frac{1}{|P|} = |D| = \pi^2 e^2$.

Ejercicio 4 (Cálculo de límites, 2.5 puntos). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\operatorname{sen}(2x^6)}{x^5\log(1+3x^3)}$$

Solución:

Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 8:

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$,
- $\operatorname{sen}(2x^6) = 2x^6 + o(x^8)$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^8)$,
- $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)$
- $e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)$
- $(e^{x^2}-1)\operatorname{sen}(2x^6) = 2x^8 + o(x^8)$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + o(x^8)$.
- $\log(1+3x^3) = 3x^3 - \frac{9x^6}{2} + o(x^8)$.
- $x^5\log(1+3x^3) = 3x^8 + o(x^8)$.

Así que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\operatorname{sen}(2x^6)}{x^5\log(1+3x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^8 + o(x^8)}{3x^8 + o(x^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{o(x^8)}{x^8}}{3 + \frac{o(x^8)}{x^8}} = \frac{2}{3}$$

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
5 de febrero de 2007, 9h30mn-12h30mn

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Puntuación						

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Ejercicio \ **Apartado**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Todos**
5	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3		1.5
6	0.3	0.3	0.6	0.3			1.5
7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1	2
8							2.5
9	1.5	0.5	0.5				2.5

Ejercicio 5 (Cuestiones, 1.5 puntos).

(5.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,3),(3,1,4)\} \subset \mathbb{Z}_5^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

(5.2). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$.

(5.3). Pon la fórmula del binomio de Newton, es decir, $(a+b)^n = \ldots\ldots$

(5.4). Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\square\beta_6} M_{\square\square}(g) M_{\beta_3\square}$;

b) $M_{\beta_2\beta_8}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_1\beta_5}(g) M_{\square\square}$.

(5.5). De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2+25)(x-5)^2(x+5)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Ejercicio 6 (1,5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ y que $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f$. Se pide:

(6.1). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcular $f(x,y,z)$.

(6.2). Encuentra los valores a y de b.

(6.3). Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

(6.4). Calcula $f((x,y,z)_\beta)$.

Ejercicio 7 (2 puntos). De una matriz $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{\pi, e\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(\pi) = m(e) = 2$. El espacio invariante V_π tiene como base a $\beta_{V_\pi} = \{(\pi,\pi,\pi,\pi), (0,\pi,\pi,\pi)\}$ y el espacio invariante V_e tiene como base a $\beta_{V_e} = \{(0,0,e,e), (0,0,0,e)\}$. Se pide:

(7.1). Justificar por qué C es diagonalizable.

(7.2). Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.

(7.3). Calcular el vector $C(\pi,\pi,\pi,\pi)^t$.

(7.4). Calcular el vector $C(0,0,e,e)^t$.

(7.5). Dar el valor de $|C|$.

(7.6). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\operatorname{sen}(2x^6)}{x^5\log(1+3x^3)}$$

Ejercicio 8 (2,5 puntos). Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Define razonadamente el concepto de integral de Riemann justificando las definiciones y resultados auxiliares que se necesiten. (1,5 puntos)

Como aplicación calcula la siguiente integral definida:

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}.$$

Ejercicio 9 (2,5 puntos). Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se pide:

(9.1) Estudiar la diferenciabilidad en $(0,a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

(9.2) Estudiar si se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

(9.3) ¿Es $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

EUITC – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del segundo cuatrimestre
5 de junio de 2007, 16h30mn-19h30mn

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	
Ejercicios elegidos:	
Calificación:	

Firma del alumno:

OBSERVACIONES

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Parte I: elige ejercicios por valor de 5 puntos.

Ejercicio 1 (1 punto). Plantea la descomposición en fracciones simples (sin necesidad de calcular las constantes) de $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde: $p(x) = x^5 + 2x + 7$ y $q(x) = (x^2 + x + 1)^3(x - 4)^2(x^2 + 2x + 1)^2$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{G}{x - 4} + \frac{H}{(x - 4)^2} \\ + \frac{I}{x + 1} + \frac{J}{(x + 1)^2} + \frac{K}{(x + 1)^3} + \frac{L}{(x + 1)^4}\end{aligned}$$

Ejercicio 2 (1 punto). Plantea la descomposición en fracciones simples (sin necesidad de calcular las constantes) de $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde: $p(x) = x^5 + 2x + 7$ y $q(x) = (x^2 + x + 1)^2(x - 5)^2(x^2 + 4)^3$.

Solución.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{E}{x-5} + \frac{F}{(x-5)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+4} + \frac{Ix+J}{(x^2+4)^2} + \frac{Kx+L}{(x^2+4)^3}$$

Ejercicio 3 (1 punto). Calcula la primitiva $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \int \frac{1}{4[(\frac{x+1}{2})^2+1]}dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx = 2\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)}\end{aligned}$$

Ejercicio 4 (1 punto). Expresa en coordenadas esféricas el conjunto

$$\Omega = \{(x,y,z) : 2 < x^2+y^2+z^2 < 3, z<0, y<0\}$$

Solución.

$$\Omega_e = \{(r,\theta,\phi) : \sqrt{2} < r < \sqrt{3}, \frac{\pi}{2} < \phi < \pi, \pi < \theta < 2\pi\}$$

Ejercicio 5 (2 puntos). Calcula la integral $\iiint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, donde

$$\Omega = \{(x,y,z) : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4, z>0\}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}dxdydz &= \iiint_{\Omega_e} \frac{\log(r^2)}{r^2}r^2\operatorname{sen}\phi drd\theta d\phi \\ = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} 2\log(r)\operatorname{sen}\phi d\theta d\phi dr &= 2\pi\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\log(r)\operatorname{sen}\phi d\phi dr \\ = 4\pi\int_1^2 \log(r)[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{2}}dr = 4\pi\int_1^2\log(r)dr &= 4\pi[r\log r - r]_1^2 \\ &= 4\pi(2\log 2 - 2 - 1\log 1 + 1) = 4\pi(2\log 2 - 1)\end{aligned}$$

Ejercicio 6 (3 puntos). Calcula $\int_0^{1/2}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Solución.

Para entender correctamente este ejercicio conviene estudiar la figura 1. En ella hemos marcado los ángulos $\pi/6$ y $5\pi/6$ porque son los arco senos (entre 0 y 2π) de $\frac{1}{2}$. Para describir el conjunto de integración (sombreado) distinguiremos tres zonas:

1. Si $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ entonces $r \in (0,1)$.
2. Si $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ entonces r varía entre 0 y la longitud r_0 marcada en la figura, que verifica $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2r_0}$, es decir, $r_0 = \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}$.
3. Si $\theta \in (\frac{5\pi}{6}, \pi)$ entonces $r \in (0,1)$.

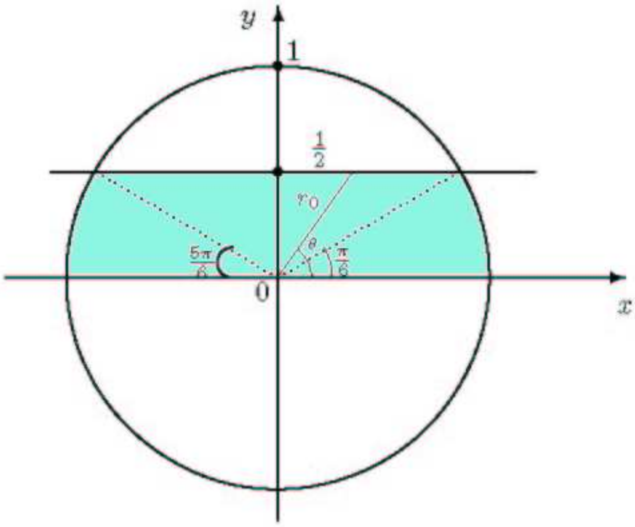

Figura 1: Región del ejercicio 6

Así que el recinto de integración en coordenadas polares es:

$$\Omega_p = \{(r,\theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, 0 < r < 1\} \cup \{(r,\theta) : \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}, 0 < r < \frac{1}{2\mathrm{sen}\,\theta}\}$$
$$\cup \{(r,\theta) : \frac{5\pi}{6} < \theta < \pi, 0 < r < 1\}$$

Finalmente:

$$\int_0^{1/2} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\Omega_p} r^4 \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta drd\theta$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^4 \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta drd\theta + \int_0^1 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} r^4 \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta drd\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_0^{\frac{1}{2\mathrm{sen}\,\theta}} r^4 \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta drd\theta$$
$$= \frac{1}{5}\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{5}\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2^5 5\mathrm{sen}^5\theta} \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta d\theta$$
$$= \frac{-\cos\frac{2\pi}{6} + \cos 0}{20} + \frac{-\cos 2\pi + \cos\frac{10\pi}{6}}{20} + \frac{1}{160}\frac{-1}{3}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}^3\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{160}\frac{-1}{3}[8-8] = 0$$

Ejercicio 7 (3 puntos). Calcula la integral $\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, donde

$$\Omega = \{(x,y) : \frac{1}{2} < x < 1, y > 0, x^2+y^2 < 1\}$$

Solución.

Describimos el conjunto Ω en coordenadas polares, observa que el ángulo θ varía entre 0 y el ángulo que forma la línea discontinua con el eje de abscisas. Claramente ese ángulo tine coseno igual a $\frac{1}{2}$, así que la variación de θ es $0 < \theta < \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Ahora para un ángulo fijo θ, que esté en el rango anterior tenemos que r varía entre un valor r_0 y 1. Si miramos en el dibujo $\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{r_0}$, así que $r_0 = \frac{1}{2\cos\theta}$.

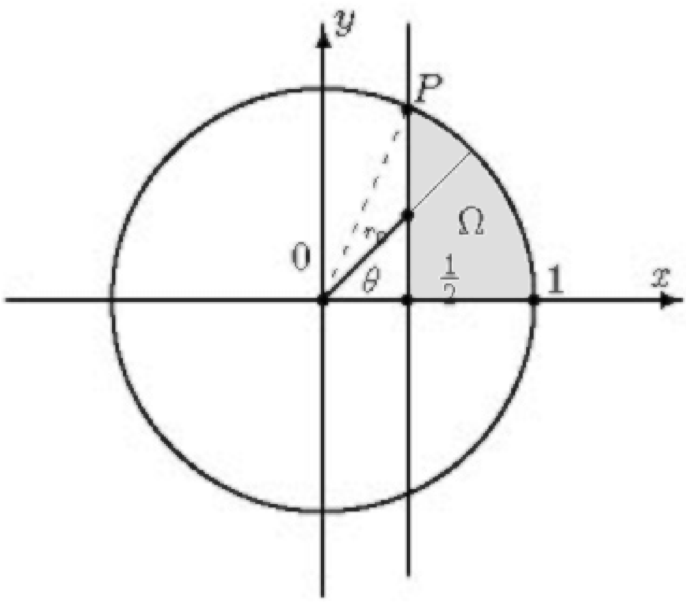

Figura 2: Región del ejercicio 7

$$\Omega_p = \{(r,\theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2\cos\theta} < r < 1\}$$

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\Omega_p} \frac{r\cos\theta}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \left(1 - \frac{1}{2\cos\theta}\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta - \frac{1}{2} d\theta$$
$$= \left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Ejercicio 8 (3 puntos). Las superficies $x^2+y^2+z^2 = 9$ y $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitan dos sólidos, calcula el que tiene únicamente puntos (x,y,z) con $z \geq 0$.

Indicación: haz un cambio a coordenadas cilíndricas.

Solución. La intersección de ambas superficies es el círculo $x^2+y^2 = \frac{9}{2}$. El sólido que limitan (en coordenadas cilíndricas) es:

$$\Omega_c = \{(r,\theta,z) : 0 < r < \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, 0 < \theta < 2\pi, r < z < \sqrt{9-r^2}\}$$

Así que:

$$V = \iiint_{\Omega_c} 1 r dr d\theta dz = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{9-r^2}} r dz d\theta dr$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} (9-2r^2) d\theta dr = \pi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} (9-2r^2) dr$$
$$= \pi \left[9r - \frac{2}{3}r^3\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \pi \left[\frac{27}{\sqrt{2}} - 2\frac{9}{\sqrt{8}}\right] = \pi \left[\frac{27}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}}\right]$$
$$\frac{18\pi}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 9 (4 puntos). Calcula la primitiva $\int \frac{1}{(x^2+x+3)^2} dx$

Ejercicio 10 (5 puntos). Calcula el volumen del sólido encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y por el cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Indicación: el resultado no es $\frac{2}{3}\pi 4^3$.

Parte II: elige ejercicios por valor de un punto.

Ejercicio 11 (0.25 puntos). Da un ejemplo de un conjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea abierto y cerrado

Solución. El propio $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 12 (0.5 puntos). ¿Existe algún conjunto abierto y compacto en $\mathbb{R}^2$? ¿Por qué/Cuál y por qué?

Solución. El conjunto vacío es abierto, cerrado y está acotado, luego es compacto.

Ejercicio 13 (0.5 puntos). ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ una norma?

Solución. No porque $f(2(x, y)) = 4x^2 + 4y^2 \neq 2f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$

Ejercicio 14 (0.25 puntos). ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ una norma?

Solución. No porque toma valores negativos. En efecto $f(0, \sqrt{3\pi/2}) = \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$

Ejercicio 15 (1 punto). Calcula y justifica, si existe, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Solución. El límite existe y vale 0. Lo calculamos usando coordenadas polares:

- $$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos\theta + r^3 \operatorname{sen}\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta = 0.$$

- $$|r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta - 0| = |r||cos\theta + \operatorname{sen}\theta| \leq |r|(|\cos\theta| + |\operatorname{sen}\theta|) \leq r = F(r).$$

  Además $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$.

Así que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Parte III: elige ejercicios por valor de cuatro puntos.

Ejercicio 16 (0,5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^{2007} \to \mathbb{R}^{2008}$ una aplicación de clase C^2 y $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^{2007}$ ¿Es $Jf(\mathbf{a})$ una matriz simétrica? ¿Qué tamaño tiene?

Solución. $Jf(\mathbf{a})$ no es simétrica puesto que no es cuadrada, tiene tamaño 2007×2008.

Ejercicio 17 (0,5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^{2007} \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^2 y $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^{2007}$ ¿Es $Hf(\mathbf{a})$ una matriz simétrica? ¿Qué tamaño tiene?

Solución. Al ser de clase C^2 es simétrica por no intervenir el orden de derivación en las parciales de orden 2. El tamaño de $Hf(\mathbf{a})$ es 2007×2007.

Ejercicio 18 (1 punto). Calcula el plano tangente a la superficie $z = xy\operatorname{sen}(x + y)$ en el punto $(0, 2\pi, 0)$.

Solución. La ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= y\text{sen}\,(x + y) + xy\cos\,(x + y) \\
\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= x\text{sen}\,(x + y) + xy\cos\,(x + y) \\
\frac{\partial z}{\partial x}(0, 2\pi) &= 2\pi\text{sen}\,(2\pi) = 0 \\
\frac{\partial z}{\partial y}(0, 2\pi) &= 0
\end{aligned}$$

Así que el plano tangente es $\boxed{z = z_0 = 0}$.

Ejercicio 19 (1 punto). Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^3 \partial x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$ si

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + 3x^3 - x^2y - y^3 + 2x^4 - 12x^2y^2 + 3y^4.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= -1 + 2x + 2y - x^2 - 3y^2 - 24x^2y + 12y^3 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2 - 6y - 24x^2 + 36y^2 \\
\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &= -6 + 72y \\
&\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 72} \\
&\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = -48x} \\
&\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial y^3 \partial x} = 0}
\end{aligned}$$

Ejercicio 20 (1 punto). Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ una función. Responde justificadamente a las cuestiones:

1. ¿Como mucho, cuántas derivadas parciales de f de orden dos diferentes existen si f es de clase C^2? *(0.75 puntos)*
2. ¿Cuántas derivadas parciales de f de orden dos existen? *(0.25 puntos)*

Ejercicio 21 (2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ una función. Responde justificadamente a las cuestiones:

1. ¿Como mucho, cuántas derivadas parciales de f de orden tres diferentes existen si f es de clase C^3? *(0.75 puntos)*
2. ¿Cuántas derivadas parciales de f de orden tres existen? *(0.75 puntos)*

Ejercicio 22 (2 puntos). Calcula los extremos relativos, si existen, de la función $f(x, y) = (x^2+x+1)(y^2+1)$.

Solución. Imponemos las condiciones necesarias para la existencia de extremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+1)(y^2+1) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+x+1)2y = 0$$

La única solución de este sistema es $P = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Estudiamos el hessiano en dicho punto.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(y^2+1)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2x+1)2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+x+1)2$$
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y^2+1) & (2x+1)2y \\ (2x+1)2y & (x^2+x+1)2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el hessiano en el punto P:

$$\boxed{P_1 = (-\frac{1}{2}, 0)}$$

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Así que la sucesión asociada a este punto es:

$$1, 2, 3$$

y en consecuencia el punto P es un mínimo condicionado de la función f.

Ejercicio 23 (2 puntos). Calcula la matriz jacobiana $JF(2,0)$, donde $F = g \circ f$, $f(x,y) = (x^2+y^2, 2xy, y)$ y $g(x,y,z) = (xyz, e^z(x+z), \log(z+1))$.

Indicación: utiliza la fórmula del jacobiano de una composición de funciones

Ejercicio 24 (2 puntos). Calcula (utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange) los extremos condicionados de la función $f : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, sujeta a las condiciones $x+y=1$.

Solución. La lagrangiana asociada a este problema es:

$$L(x,y) = x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$$

Imponemos las condiciones para la búsqueda de puntos candidatos a extremos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x+\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 2y+\lambda = 0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Así que los candidatos a extremos son $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Calculamos la matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = 2$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = 2$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$
$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos

$$(h_1,h_2)HL(P_i)(h_1,h_2)^t = (h_1,h_2)(2h_1,2h_2)^t = 2(h_1^2+h_2^2) > 0,$$

así que P es un mínimo condicionado.

Ejercicio 25 (3 puntos). Calcula (utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange) los extremos condicionados de la función $f:(0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, sujeta a las condiciones $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

Solución. La lagrangiana asociada a este problema es:

$$L(x,y) = x^2+y^2+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1)$$

Imponemos las condiciones para la búsqueda de puntos candidatos a extremos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{1}{x^2}\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 2y - \frac{1}{y^2}\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x^3 = \lambda \\ 2y^3 = \lambda \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^3 = y^3 \Rightarrow x = y \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \left. 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Así que los candidatos a extremos son $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Para ambos puntos $\lambda = \frac{1}{\sqrt{8}}$ Calculamos la matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = 2+\frac{2}{x^3}\lambda = 2+4 = 6$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = 2+\frac{2}{y^3}\lambda = 2+4 = 6$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$
$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos

$$(h_1,h_2)HL(P_i)(h_1,h_2)^t = (h_1,h_2)(6h_1,6h_2)^t = 6(h_1^2+h_2^2) > 0,$$

así que ambos puntos son mínimos condicionados.

Ejercicio 26 (4 puntos). Comprueba si el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y^2 - z^2 - t^2 = -12 \\ x^2 - y^2 - z - t = -6 \end{array} \right.$$

define a (z,t) como funciones implícitas de (x,y) en un abierto del punto $(x,y) = (0,1)$ con los valores $(z,t) = (2,3)$ *(2 puntos)*.

Calcula $\frac{\partial t}{\partial x}(0,1)$ *(1 punto)*.

Calcula $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$ *(1 punto)*.

Solución. Definimos las funciones $f_1(x,y,z,t) = x + y^2 - z^2 - t^2 + 12$, $f_2(x,y,z,t) = x^2 - y^2 - z - t + 6$. Puesto que:

1. $f_1(0,1,2,3) = f_2(0,1,2,3) = 0$ y
2. $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,1,2,3) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(0,1,2,3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,1,2,3) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(0,1,2,3) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -4 & -6 \\ -1 & -1 \end{array} \right| = -2 \neq 0$

deducimos que z y t son funciones de x e y localmente en torno a los puntos dados.

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
25 de junio de 2007, 9h-12h

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	
Elección de preguntas:	

Pregunta								**Total**
Puntuación								

Bloques de Problemas

Bloque	Ejercicios del bloque	Puntuación
I	1, 5	1 punto
II	3, 4	1.5 puntos
III	8,9	0.75 puntos
IV	10, 11, 12, 13	1.5-2.5 puntos

Modalidades de examen

- **Examen final:** responde a los ejercicios 2, 6 y 7. Además debes elegir y responder un problema de cada uno de los bloques I, II, III, IV.
- **Primer parcial:** responde a los ejercicios 1, 2, 3, 4 y 5. En este caso la puntuación de cada problema se multiplica por $\frac{4}{3}$, es decir, es necesario sacar 3.75 puntos para aprobar.
- **Segundo parcial:** responde a los ejercicios 6, 7, 11, 14 y elige y responde a un problema de cada uno de los bloques III y IV (que no sean ni el 11 ni el 14). En este caso la puntuación de cada problema se multiplica por $\frac{5}{4}$, es decir, es necesario sacar 4 puntos para aprobar.

Ejercicio 1 (1 punto). Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_7)$, calcula A^{-1} si es posible.

Solución. Usaremos la fórmula $A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{Adj}(A)^t$. Así que:

$$A^{-1} = 6\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ y que $f(0,1,0) = (1,0)$. Se pide:

(2.1). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcula $f(x, y, z)$ *(0.2 puntos).*

Solución.

$$f(x, y, z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} (x, y, z)^t\right]^t = (x + y - 2z, x + ay)$$

(2.2). Encuentra el valor de a *(0.3 puntos).*

Solución. Usando que $f(0, 1, 0) = (1, 0)$ se tiene $a = 0$.

(2.3). Sea $\beta = \{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 1)\}$ y $\beta' = \{w_1 = (1, 1), w_2 = (0, 1)\}$. Calcula $M_{\beta\beta'}(f)$ *(0.5 puntos).*

Solución.

$$\begin{aligned} f(v_1) = f(0, 0, 1) = (-2, 0) = -2w_1 + 2w_2 = (-2, 2)_{\beta'} \\ f(v_2) = f(0, 1, 1) = (-1, 0) = -w_1 + w_2 = (-1, 1)_{\beta'} \\ f(v_3) = f(1, 1, 1) = (0, 1) = w_2 = (0, 1)_{\beta'} \end{aligned}$$

Así que:

$$M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.4). Encuentra una base y las ecuaciones respecto a la base β del subespacio $\mathrm{Ker} f$ *(0.5 puntos).*

Solución.

Un vector $(x, y, z)_\beta \in \mathrm{Ker} f$ si y sólo si $f((x, y, z)_\beta) = [M_{\beta\beta'}(f)(x, y, z)^t]^t = (-2x - y, 2x + y + z)_{\beta'} = \mathbf{0}$, así que las ecuaciones del núcleo en la base β son $-2x - y = 2x + y + z = 0$. Una base de este subespacio es $\beta'_{\mathrm{Ker} f} = \{(1, -2, 0)_\beta\}$.

(2.5). Sea $S =< (0, 0, 1)_\beta >$. Calcula las ecuaciones respecto a la base β del subespacio $\mathrm{Ker} f + S$ ¿Es la suma anterior directa? ¿Por qué? *(0.5 puntos)*

Solución. Un conjunto generador del espacio $H = \mathrm{Ker} f + S$ es $\{(1, -2, 0)_\beta, (0, 0, 1)_\beta\}$ y como ambos vectores son linealmente independientes entonces también son una base. Así que si $(x, y, z)_\beta \in H$ entonces

$$(x, y, z)_\beta = \lambda(0, 0, 1)_\beta + \mu(1, -2, 0) \Rightarrow x = \mu,\ y = -2\mu,\ z = \lambda$$

Hacemos notar que necesitamos sólo una ecuación (dimensión de $\mathbb{R}^3$-dimensión de H), que será $2x + y = 0$.

La suma es directa porque $S \cap \mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

(2.6). Calcula $f((x, y, z)_\beta)$, expresando sus coordenadas en la base β' *(0.5 puntos).*

Solución.

$$f((x, y, z)_\beta) = [M_{\beta\beta'}(f)(x, y, z)^t]^t = (-2x - y, 2x + y + z)_{\beta'}$$

Ejercicio 3 (Diagonalización, 1.5 puntos). De una matriz $C \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{3, 4\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(3) = 3$ y $= m(4) = 1$. El espacio invariante V_3 tiene como base a $\beta_{V_3} = \{(0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1)\}$ y el espacio invariante V_4 tiene como base a $\beta_{V_4} = \{(4, 1, 1, 1)\}$. Sin calcular la matriz C, se pide:

(3.1). Justificar por qué C es diagonalizable.

Solución. C es diagonalizable porque todos los valores propios son reales y además $m(3) = \dim V_3 = 3$ y $m(4) = \dim V_4 = 1$.

(3.2). Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.

Solución.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.3). Calcular el vector $C(20,5,5,5)^t$.

Solución. Como $(20,5,5,5) \in V_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = 4x\}$, entonces $C(20,5,5,5)^t = 4(20,5,5,5)^t = (80,20,20,20)^t$.

(3.4). Justificar si C^{2007} es diagonalizable.

Solución. Sabemos que $C = PDP^{-1}$, así que $C^{2007} = PD^{2007}P^{-1}$ y como cualquier potencia de D es diagonal entonces C^{2007} es diagonalizable.

Ejercicio 4 (Polinomio de Taylor, 1.5 puntos). Calcula un valor aproximado de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\right)$ cometiendo un error menor que 10^{-3}.

Solución. Usamos el teorema de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, centrando el desarrollo en 0:

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

donde $R_n(x)$ es el resto de Lagrange de orden n y vale $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$, siendo θ un valor entre 0 y x.

Así que tenemos que conseguir que $E = |R_n(\frac{1}{4})| = |\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(\frac{1}{4})^{n+1}| \leq \frac{2}{(n+1)!}(\frac{1}{4})^{n+1} < 10^{-3}$ o equivalentemente $2 < \frac{4^{n+1}(n+1)!}{1000}$

Calculamos el valor de n para el que satisface la desigualdad anterior:

n	$\frac{4^{n+1}(n+1)!}{1000}$
1	0.032
2	0.384
3	6.144

Así que necesitamos un desarrollo de Taylor de orden 3 para cometer un error menor que 10^{-3} al aproximar $f(\frac{1}{4})$ por el valor del desarrollo en $\frac{1}{4}$. Como el desarrollo de Taylor de orden 3 es: $P_3(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ entonces:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{1}{4} + \cos\frac{1}{4} \simeq 1{,}21615}$$

Ejercicio 5 (1 punto).

Sea $g : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{2000}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

1. $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\square\beta_5} M_{\square\square}(g) M_{\beta_4\square}$;

2. $M_{\beta_1\beta_8}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_3\beta_7}(g) M_{\square\square}$.

Solución.

1. $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\beta_7\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(g) M_{\beta_4\beta_1}$;
2. $M_{\beta_1\beta_8}(g) = M_{\beta_8\beta_7} M_{\beta_3\beta_7}(g) M_{\beta_3\beta_1}$.

Ejercicio 6 (2 puntos). Calcula la integral $\iiint_\Omega \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$, donde

$$\Omega = \{(x,y,z) : 1 < x^2+y^2+z^2 < 49, z > 0, x < 0\}$$

Solución.

$$\iiint_\Omega \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} dxdydz = \iiint_{\Omega_e} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr d\theta d\phi$$
$$= \int_1^7 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(r) \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta dr = \pi \int_1^7 \operatorname{sen} r \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi dr$$
$$= \pi \int_1^7 \operatorname{sen} r \, dr = \pi(-\cos 7 + \cos 1).$$

Ejercicio 7 (0.75 puntos). ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log((2x)^2 + (2y)^2)$ una norma?

Solución. No porque toma valores negativos. En efecto $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \log(\frac{1}{2}) < 0$

Ejercicio 8 (0,75 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^7$ una aplicación de clase C^2, $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^m$ y $A \in M_{n\times 10}(\mathbb{R})$ ¿Para qué valores de m y n se puede calcular la suma $A + Jf(\mathbf{a})$? ¿Se podría calcular el determinante de $Jf(\mathbf{a})$ para estos valores?

Solución. Para que se puedan sumar ambas matrices tienen que tener el mismo tamaño. Como $A \in M_{n\times 10}(\mathbb{R})$ y $Jf(\mathbf{a}) \in M_{7\times m}(\mathbb{R})$ entonces $n = 7$ y $m = 10$.
El determinante no se puede calcular porque no es una matriz cuadrada.

Ejercicio 9 (0.75 punto). Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Responde justificadamente a las cuestiones:

1. ¿Como mucho, cuántas derivadas parciales de f de orden tres diferentes existen si f es de clase C^3? *(0.5 puntos)*
2. ¿Cuántas derivadas parciales de f de orden tres existen? *(0.25 puntos)*

Solución. Como mucho las parciales diferentes de orden 3 que existen son las cuatro siguientes:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}.$$

Además podemos decir que existen $2^3 = 8$ parciales de orden 3 aunque puedan coincidir algunas. Las ocho parciales son:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}.$$

Ejercicio 10 (2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}$ una función. Responde justificadamente a las cuestiones:

1. ¿Como mucho, cuántas derivadas parciales de f de orden tres diferentes existen si f es de clase C^3? *(2 puntos)*

2. ¿Cuántas derivadas parciales de f de orden tres existen? *(0.5 puntos)*

Solución.
Como la función es de clase C^3 el orden de derivación no importa. Así que como mucho tendremos:

- $\binom{12}{3}$ parciales respecto a 3 variables diferentes (de la forma $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ con i, j, k distintos dos a dos).

- $2\binom{12}{2}$ parciales respecto a 2 variable diferentes, donde una se repite dos veces (de la forma $\frac{\partial f}{\partial x_i^2 \partial x_k}$ con i, j distintos).

- 12 parciales respecto a una única variable que se repite 3 veces.

Así que como mucho existen $\binom{12}{3} + 2\binom{12}{2} + 12 = 364$ parciales diferentes.
Parciales de orden 3 existen $12^3 = 1728$.

Ejercicio 11 (1.5 puntos). Calcula los extremos condicionados de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, sujeta a las condiciones $z = x^2 + 12$, $y^2 = 25$.

Solución. La lagrangiana asociada a este problema es: $L(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2 + \lambda(z - x^2 - 12) + \mu(y^2 - 25)$
Calculamos las parciales de L e imponemos las ligaduras:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 6x - 2\lambda x = 2x(3-\lambda)0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 6z + \lambda = 0, \\ y^2 = 25, \\ z = x^2 + 12 \end{array}\right\}$$

Es fácil comprobar que las únicas soluciones de este sistema son:

- $P = (0, 5, 12)$ con $\mu = 0$ y $\lambda = -72$

- $Q = (0, -5, 12)$ con $\mu = 0$ y $\lambda = -72$

Para decidir la condición de máximo o mínimo calculamos las segundas parciales de L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 6 - 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\mu, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 6$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0$$

Además

$$\begin{aligned} (h_1, h_2, h_3)HL(Q)(h_1, h_2, h_3) &= (h_1, h_2, h_3)HL(P)(h_1, h_2, h_3) \\ = (h_1, h_2, h_3) &\begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} (h_1, h_2, h_3) = 150h_1^2 + 6h_2^2 > 0 \end{aligned}$$

para todo vector $(h_1, h_2, h_3) \neq 0$ (en principio esta condición sólo es necesario que se satisfaga para los vectores no nulos que anulan el jacobiano de las funciones condicionantes, aquí no se ha necesitado calcular esos vectores explícitamente porque hemos demostrado que la relación es positiva para cualquier vector no nulo).

Así que tanto P como Q son mínimos condicionados

Ejercicio 12 (2.5 puntos). ¿Se puede utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos condicionados de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos^2(\operatorname{sen}(x^2 + y^2))$, sujeta a las condiciones $x^2 + y^2 = 1$ e $y = x$? ¿Cuáles son los extremos condicionados de este problema?

Solución. No se puede utilizar el método de los multiplicadores porque tenemos 2 condiciones para una función definida en $\mathbb{R}^2$.

No obstante se puede resolver el problema ya que los dos únicos punto candidatos a extremos son las soluciones del sistema formado por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ e $y = x$. Estos puntos son $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Al haber dos candidatos a extremos quiere decir que cerca de esos puntos no hay otros puntos que satisfagan las condiciones y por lo tanto P y Q son tanto máximos como un mínimos condicionados.

Ejercicio 13 (1.5 puntos). Estudiar si la aplicación $f(x, y) = (x\cos y, x\operatorname{sen} y)$ es localmente invertible para valores de (x, y) próximos a $(1, 0)$ y de $f(x, y)$ próximos a $(1, 0)$. Calcula además $\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(1, 0)$ y $\frac{\partial f^{-1}}{\partial y}(1, 0)$.

Solución. Para saber si es localmente invertible comprobamos que $|Jf(1, 0)| \neq 0$. Calculamos primero el jacobiano en un punto (x, y):

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} y & x\cos y \end{pmatrix}$$

Así que:

$$|Jf(1, 0)| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \neq 0,$$

por lo tanto existe la función inversa para los valores enunciados en el ejercicio.

Como $Jf^{-1}(f(1, 0)) = Jf^{-1}(1, 0) = (Jf(1, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(1, 0) = (1, 0), \qquad \frac{\partial f^{-1}}{\partial y}(1, 0) = (0, 1).}$$

Ejercicio 14 (1.5 puntos). Comprueba si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^5 + y^2 - z^2 - t^2 = -12 \\ x^2 - y^2 - z - t = -6 \end{cases}$$

define a (z, t) como funciones implícitas de (x, y) en un abierto del punto $(x, y) = (0, 1)$ con los valores $(z, t) = (2, 3)$ *(0.5 puntos)*.

Calcula $\frac{\partial t}{\partial x}(0, 1)$ *(0.5 puntos)*.

Calcula $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$ *(0.5 puntos)*.

Solución. Definimos las funciones $f_1(x, y, z, t) = x^5 + y^2 - z^2 - t^2 + 12$, $f_2(x, y, z, t) = x^2 - y^2 - z - t + 6$. Puesto que:

1. $f_1(0, 1, 2, 3) = f_2(0, 1, 2, 3) = 0$ y

2. $\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,1,2,3) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(0,1,2,3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,1,2,3) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(0,1,2,3) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} -4 & -6 \\ -1 & -1 \end{array}\right| = -2 \neq 0$

deducimos que z y t son funciones de x e y localmente en torno a los puntos dados.

Calculamos ahora las parciales, derivamos respecto a x las expresiones que definen a z y a t como función de x e y:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x^4 - 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2t\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ 2x - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Particularizamos ahora estas expresiones en $(x, y, z, t) = (0, 1, 2, 3)$ para obtener:

$$\left. \begin{array}{l} -4\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) - 6\frac{\partial t}{\partial x}(0,1) = 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) - \frac{\partial t}{\partial x}(0,1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial t}{\partial x}(0,1) = 0.}$$

Para calcular las segunda parcial solicitada tenemos que derivar las expresiones de (1) respecto a y:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial x} - 2t\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0 \\ -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Estas expresiones particularizadas en $(x, y, z, t) = (0, 1, 2, 3)$ nos dan:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) - 6\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1) = 0 \\ -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) - \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1) = 0}$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
22 de junio de 2007, 9h-12h

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	
Elección de preguntas:	

Pregunta								**Total**
Puntuación								

Observaciones

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Bloques de Problemas

Bloque	**Ejercicios del bloque**	**Puntuación**
I	1, 5, 6, 7	1 punto
II	3, 4	1.5 puntos
III	9, 10	0.75 puntos
IV	11, 12, 13	0.75 puntos
V	14, 15, 16, 17, 18	1.5-2.5 puntos

Modalidades de examen

- **Examen final:** responde a los ejercicios 2 y 8. Además debes elegir y responder un problema de cada uno de los bloques I, II, III, IV, V.
- **Primer parcial:** responde a los ejercicios 2, 3, 4 y a dos del bloque I. En este caso la puntuación de cada problema se multiplica por $\frac{4}{3}$, es decir, es necesario sacar 3.75 puntos para aprobar.
- **Segundo parcial:** responde a los ejercicios 8, 15, 18 y elige y responde a un problema de cada uno de los bloques III, IV y V (que no sean ni el 15 ni el 18). En este caso la puntuación de cada problema se multiplica por $\frac{5}{4}$, es decir, es necesario sacar 4 puntos para aprobar.

Ejercicio 1 (1 punto). Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$, calcula A^{-1} si es posible.

Solución. Usaremos la fórmula $A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{Adj}(A)^t$. Así que:

$$A^{-1} = 4\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y que $f(0,0,1) = (-2,0)$. Se pide:

(2.1). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcula $f(x,y,z)$ *(0.2 puntos).*

Solución.

$$f(x,y,z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}(x,y,z)^t\right]^t = (x+y-2z, x+az)$$

(2.2). Encuentra el valor de a *(0.3 puntos).*

Solución. Usando que $f(0,0,1) = (-2,0)$ se tiene $a = 0$.

(2.3). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base canónica del subespacio $\mathrm{Ker} f$ *(0.5 puntos).*

Solución.

Un vector $(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f$ si y sólo si $f(x,y,z) = \mathbf{0}$, es decir, (x,y,z) satisface las ecuaciones $x+y-2z=0$ y $x=0$, que claramente son linealmente independientes. Así que $\dim\mathrm{Ker} f = 3-2 = 1$ y una base de $\mathrm{Ker} f$ es $\beta_{\mathrm{Ker} f} = \{(0,2,1)\}$.

(2.4). Sea $\beta = \{v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,1)\}$ y $\beta' = \{w_1 = (1,1), w_2 = (0,1)\}$. Calcula $M_{\beta\beta'}(f)$ *(0.5 puntos).*

Solución.

$$
\begin{aligned}
f(v_1) = f(0,0,1) = (-2,0) = -2w_1 + 2w_2 = (-2,2)_{\beta'} \\
f(v_2) = f(0,1,1) = (-1,0) = -w_1 + w_2 = (-1,1)_{\beta'} \\
f(v_3) = f(1,1,1) = (0,1) = w_2 = (0,1)_{\beta'}
\end{aligned}
$$

Así que:

$$
M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

(2.5). Encuentra una base y las ecuaciones respecto a la base β del subespacio Ker$f$ *(0.5 puntos).*

Solución.

Un vector $(x,y,z)_\beta \in \text{Ker}f$ si y sólo si $f((x,y,z)_\beta) = [M_{\beta\beta'}(f)(x,y,z)^t]^t = (-2x-y, 2x+y+z)_{\beta'} = \mathbf{0}$, así que las ecuaciones del núcleo en la base β son $-2x - y = 2x + y + z = 0$. Ya sabíamos que dimKer$f = 1$ y ahora $\beta'_{\text{Ker}f} = \{(1,-2,0)_\beta\}$.

(2.6). Calcula $f((x,y,z)_\beta)$, expresando sus coordenadas en la base β' *(0.5 puntos).*

Solución.

$$
f((x,y,z)_\beta) = [M_{\beta\beta'}(f)(x,y,z)^t]^t = (-2x-y, 2x+y+z)_{\beta'}
$$

Ejercicio 3 (Diagonalización, 1.5 puntos). De una matriz $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sabemos que su espectro es $\sigma_C = \{5,7\}$ y que las multiplicidades de esos valores son $m(5) = 3$ y $= m(7) = 1$. El espacio invariante V_5 tiene como base a $\beta_{V_5} = \{(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,1,1)\}$ y el espacio invariante V_7 tiene como base a $\beta_{V_7} = \{(1,1,1,1)\}$. Sin calcular la matriz C, se pide:

(3.1). Justificar por qué C es diagonalizable.

Solución. C es diagonalizable porque todos los valores propios son reales y además $m(5) = \text{dim}V_5 = 3$ y $m(7) = \text{dim}V_7 = 1$.

(3.2). Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $P^{-1}CP = D$.

Solución.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.3). Calcular el vector $C(0,2,2,2)^t$.

Solución. Como $(0,2,2,2) \in V_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Cx = 5x\}$, entonces $C(0,2,2,2)^t = 5(0,2,2,2)^t = (0,10,10,10)^t$.

(3.4). Dar el valor de $|C|$.

Solución. $|C| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |P||D|\frac{1}{|P|} = |D| = 5^3 \cdot 7 = 875$.

Ejercicio 4 (Polinomio de Taylor, 1.5 puntos). Calcula un valor aproximado de $\cos\left(\frac{1}{4}\right)$ cometiendo un error menor que 10^{-3}.

Solución. Usamos el teorema de Taylor para $f(x) = \cos x$, centrando el desarrollo en 0:

$$f(x) = \cos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

donde $R_n(x)$ es el resto de Lagrange de orden n y vale $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$, siendo θ un valor entre 0 y x.

Así que tenemos que conseguir que $E = |R_n(\frac{1}{4})| = |\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(\frac{1}{4})^{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{4})^{n+1} < 10^{-3}$ o equivalentemente $1 < \frac{4^{n+1}(n+1)!}{1000}$

Calculamos el valor de n para el que satisface la desigualdad anterior:

n	$\frac{4^{n+1}(n+1)!}{1000}$
1	0.032
2	0.384
3	6.144

Así que necesitamos un desarrollo de Taylor de orden 3 para cometer un error menor que 10^{-3} al aproximar $\cos\frac{1}{4}$ por el valor del desarrollo en $\frac{1}{4}$. Como el desarrollo de Taylor de orden 3 es: $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ entonces:

$$\boxed{\cos\frac{1}{4} \simeq 1 - \frac{1}{32} = 0{,}96875}$$

Ejercicio 5 (1 punto). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker} f$ y $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker} f$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathrm{Ker} f$.

Solución. $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathrm{Ker} f$ porque $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ejercicio 6 (1 punto).

Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

1. $M_{\beta_2\beta_6}(g) = M_{\square\beta_5} M_{\square\square}(g) M_{\beta_4\square}$;
2. $M_{\beta_1\beta_8}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_2\beta_7}(g) M_{\square\square}$.

Solución.

1. $M_{\beta_2\beta_6}(g) = M_{\beta_6\beta_5} M_{\beta_4\beta_5}(g) M_{\beta_4\beta_2}$;
2. $M_{\beta_1\beta_8}(g) = M_{\beta_8\beta_7} M_{\beta_2\beta_7}(g) M_{\beta_2\beta_1}$.

Ejercicio 7 (1 punto). De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = x^3 + x^2 + x$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Solución. $\sigma_A = \{0, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$. Así que la matriz A no es diagonalizable porque su polinomio característico tiene raíces complejas no reales.

Ejercicio 8 (2 puntos). Calcula la integral $\iiint_\Omega \frac{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$, donde

$$\Omega = \{(x, y, z) : 36 < x^2 + y^2 + z^2 < 49, z < 0, y < 0, x < 0\}$$

Solución.

$$\iiint_\Omega \frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} dxdydz = \iiint_{\Omega_e} \frac{\cos(r)}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr d\theta d\phi$$
$$= \int_6^7 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos(r) \operatorname{sen}\phi \, d\theta d\phi dr = \frac{\pi}{2} \int_6^7 \cos r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi dr$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_6^7 \cos r dr = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sen} 7 - \operatorname{sen} 6).$$

Ejercicio 9 (0.75 puntos). ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \operatorname{sen}((2x)^2 + (2y)^2)$ una norma?

Solución. No porque toma valores negativos. En efecto $f(0, \frac{1}{2}\sqrt{3\pi/2}) = \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$

Ejercicio 10 (0.75 puntos). ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^4 + y^4$ una norma?

Solución. No porque $f(2x,2y) = 16(x^4+y^4) \neq 2(x^4+y^4) = |2|f(x,y)$.

Ejercicio 11 (0,75 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^{2007} \to \mathbb{R}^{2008}$ una aplicación de clase C^2 y $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^{2007}$ ¿Se puede calcular el cuadrado de la matriz $Jf(\mathbf{a})$? ¿Qué tamaño tendría?

Solución. No porque no es una matriz cuadrada, ya que $Jf(\mathbf{a})$ tiene tamaño 2008×2007.

Ejercicio 12 (0,75 punto). Sea $f : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^{1989} y $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^{1989}$ ¿Es $Hf(\mathbf{a})$ una matriz simétrica? ¿Qué tamaño tiene? ¿Como mucho, cuántas parciales diferentes hay en el citado hessiano?

Solución. La matriz $Hf(\mathbf{a})$ es simétrica porque es de clase C^2 al ser de clase C^{1989}.

El tamaño de esta matriz es 1989×1989.

Como mucho hay $1+2+\cdots+1988+1989 = \frac{1989 \cdot 1990}{2} = 1979055$. La razón de este número es que en la primera fila hay (como mucho)1989 parciales diferentes, en la segunda aparecen (como mucho) 1988 nuevas parciales, en la tercera (como mucho) 1987 y así sucesivamente hasta la última fila que aparece como mucho una nueva parcial.

Ejercicio 13 (0.75 punto). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función. Responde justificadamente a las cuestiones:

1. ¿Como mucho, cuántas derivadas parciales de f de orden tres diferentes existen si f es de clase C^3? *(0.5 puntos)*
2. ¿Cuántas derivadas parciales de f de orden tres existen? *(0.25 puntos)*

Solución. Como mucho las parciales diferentes de orden 3 que existen son las diez siguientes:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_3},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_3^2 \partial x_1}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}.$$

Además podemos decir que existen $3^3 = 27$ parciales de orden 3 aunque puedan coincidir algunas.

Ejercicio 14 (2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}$ una función. Responde justificadamente a las cuestiones:

1. ¿Como mucho, cuántas derivadas parciales de f de orden tres diferentes existen si f es de clase C^3? *(2 puntos)*

2. ¿Cuántas derivadas parciales de f de orden tres existen? *(0.5 puntos)*

Solución.
Como la función es de clase C^3 el orden de derivación no importa. Así que como mucho tendremos:

- $\binom{12}{3}$ parciales respecto a 3 variables diferentes (de la forma $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ con i, j, k distintos dos a dos).
- $2\binom{12}{2}$ parciales respecto a 2 variable diferentes, donde una se repite dos veces (de la forma $\frac{\partial f}{\partial x_i^2 \partial x_k}$ con i, j distintos).
- 12 parciales respecto a una única variable que se repite 3 veces.

Así que como mucho existen $\binom{12}{3} + 2\binom{12}{2} + 12 = 364$ parciales diferentes.
Parciales de orden 3 existen 12^3.

Ejercicio 15 (1.5 puntos). Calcula los extremos condicionados de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + z^2$, sujeta a las condiciones $z = x^2$, $y^2 = 25$.

Solución. La lagrangiana asociada a este problema es: $L(x, y, z) = x^2 + z^2 + \lambda(z - x^2) + \mu(y^2 - 25)$
Calculamos las parciales de L e imponemos las ligaduras:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 2x(1-\lambda)0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda = 0, \\ y^2 = 25, \\ z = x^2 \end{array}\right\}$$

Es fácil comprobar que las únicas soluciones de este sistema son:

- $P = (0, 5, 0)$ con $\mu = 0$ y $\lambda = 0$
- $Q = (0, -5, 0)$ con $\mu = 0$ y $\lambda = 0$

Para decidir la condición de máximo o mínimo calculamos las segundas parciales de L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 - 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\mu, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0$$

Además

$$\begin{aligned}(h_1,h_2,h_3)HL(Q)(h_1,h_2,h_3) &= (h_1,h_2,h_3)HL(P)(h_1,h_2,h_3)\\ &= (h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}(h_1,h_2,h_3) = 2(h_1^2+h_2^2) > 0\end{aligned}$$

para todo vector $(h_1,h_2,h_3)\neq 0$ (en principio esta condición sólo es necesario que se satisfaga para los vectores no nulos que anulan el jacobiano de las funciones condicionantes, aquí no se ha necesitado calcular esos vectores explícitamente porque hemos demostrado que la relación es positiva para cualquier vector no nulo).

Así que tanto P como Q son mínimos condicionados

Ejercicio 16 (2.5 puntos). ¿Se puede utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos condicionados de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\cos(\operatorname{sen}(x^2+y^2))$, sujeta a las condiciones $x+y=1$ e $y=1+x$? ¿Cuáles son los extremos condicionados de este problema?

Solución. No se puede utilizar el método de los multiplicadores porque tenemos 2 condiciones para una función definida en $\mathbb{R}^2$.

No obstante se puede resolver el problema ya que el único punto candidato a extremo es la solución del sistema formado por las ecuaciones $x+y=1$ e $y=1+x$. Este punto es $(0,1)$.

Al haber un único candidato a extremo quiere decir que alrededor de ese punto no hay otro punto que satisfaga las condiciones y por lo tanto $(0,1)$ es tanto un máximo como un mínimo condicionado.

Ejercicio 17 (1.5 puntos). Estudiar si la aplicación $f(x,y)=(e^y\cos x,\, e^y\operatorname{sen} x)$ es localmente invertible para valores de (x,y) próximos a $(0,0)$ y de $f(x,y)$ próximos a $(1,0)$. Calcula además $\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(1,0)$ y $\frac{\partial f^{-1}}{\partial y}(1,0)$.

Solución. Para saber si es localmente invertible comprobamos que $|Jf(0,0)|\neq 0$. Calculamos primero el jacobiano en un punto (x,y):

$$Jf(x,y)=\begin{pmatrix}-e^y\operatorname{sen} x & e^y\cos x\\ e^y\cos x & e^y\operatorname{sen} x\end{pmatrix}$$

Así que:

$$|Jf(0,0)| = \left|\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right| = -1\neq 0,$$

por lo tanto existe la función inversa para los valores enunciados en el ejercicio.

Como $Jf^{-1}(1,0)=(Jf(0,0))^{-1}=-\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(1,0)=(0,1),\qquad \frac{\partial f^{-1}}{\partial y}(1,0)=(1,0).}$$

Ejercicio 18 (1.5 puntos). Comprueba si el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x^3+y^2-z^2-t^2=-12 \\ x^4-y^2-z-t=-6 \end{array}\right.$$

define a (z,t) como funciones implícitas de (x,y) en un abierto del punto $(x,y)=(0,1)$ con los valores $(z,t)=(2,3)$ *(0.5 puntos).*

Calcula $\frac{\partial t}{\partial x}(0,1)$ *(0.5 puntos).*

Calcula $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$ *(0.5 puntos).*

Solución. Definimos las funciones $f_1(x,y,z,t)=x^3+y^2-z^2-t^2+12$, $f_2(x,y,z,t)=x^4-y^2-z-t+6$. Puesto que:

1. $f_1(0,1,2,3)=f_2(0,1,2,3)=0$ y
2. $\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,1,2,3) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(0,1,2,3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,1,2,3) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(0,1,2,3) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} -4 & -6 \\ -1 & -1 \end{array}\right| = -2 \neq 0$

deducimos que z y t son funciones de x e y localmente en torno a los puntos dados.

Calculamos ahora las parciales, derivamos respecto a x las expresiones que definen a z y a t como función de x e y:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2-2z\frac{\partial z}{\partial x}-2t\frac{\partial t}{\partial x}=0 \\ 4x^3-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial t}{\partial x}=0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Particularizamos ahora estas expresiones en $(x,y,z,t)=(0,1,2,3)$ para obtener:

$$\left.\begin{array}{l} -4\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)-6\frac{\partial t}{\partial x}(0,1)=0 \\ -\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)-\frac{\partial t}{\partial x}(0,1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)=\frac{\partial t}{\partial x}(0,1)=0.}$$

Para calcular las segunda parcial solicitada tenemos que derivar las expresiones de respecto a y:

$$\left\{\begin{array}{l} -2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial x}-2t\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}=0 \\ -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}=0 \end{array}\right.$$

Estas expresiones particularizadas en $(x,y,z,t)=(0,1,2,3)$ nos dan:

$$\left\{\begin{array}{l} -4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)-6\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1)=0 \\ -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)-\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)=\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1)=0}$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
3 de septiembre de 2007, 9h-12h

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Total**
Puntuación								

OBSERVACIONES

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).

Ejercicio 1 (1 punto). Justifica si el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{Z}_7^3$ es linealmente independiente o linealmente dependiente:

$$S = \{(1,5,3),(6,2,4)\}$$

Solución. Los vectores son linealmente dependientes porque:

$$(1,5,3) + (6,2,4) = (0,0,0).$$

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y considérense las bases siguientes de $\mathbb{R}^3$:

$$\beta_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\},\ \beta_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}.$$

Se pide:

(2.1). Calcula $M_{\beta_1\beta_2}(f)$ *(1.5 puntos).*

Solución.

$$\begin{aligned} M_{\beta_1\beta_2}(f) &= M_{\beta_2\beta_c^3} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) M_{\beta_c^3\beta_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.2). Calcula las ecuaciones de Ker$f$ respecto de la base β_1 *(1 punto).*

Solución.

Un vector $(x,y,z)_{\beta_1} \in \mathrm{Ker} f$ si y sólo si $f((x,y,z)_{\beta_1}) = \mathbf{0}$, es decir, $(x,y,z)_{\beta_1}$ satisface las ecuaciones $2x+2y+z=0$, $-4x-3y-2z=0$ y $6x+4y+3z=0$. De éstas sólo se necesitan dos porque las tres son linealmente dependientes, así que podríamos coger como ecuaciones $-4x-3y-2z=0$ y $6x+4y+3z=0$.

Ejercicio 3 (Diagonalización, 1.5 puntos). Justifica si

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es o no diagonalizable.

Ejercicio 4 (2 puntos). Calcula la integral $\iiint_\Omega \frac{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$, donde

$$\Omega = \{(x,y,z) : 25 < x^2+y^2 < 100, -5 < z < 2, x > 0\}$$

Solución.

$$\iiint_\Omega \frac{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2} dxdydz = \iiint_{\Omega_e} \frac{\cos(r)}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\phi dr d\theta d\phi$$
$$= \int_6^7 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos(r) \operatorname{sen}\phi d\theta d\phi dr = \frac{\pi}{2} \int_6^7 \cos r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi dr$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_6^7 \cos r dr = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sen} 7 - \operatorname{sen} 6).$$

Ejercicio 5 (0.75 puntos). ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}^2((2x)^2 + (2y)^2) + \cos^2((2x)^2 + (2y)^2)$ una norma?

Solución. No porque toma valores negativos. En efecto $f(0, \frac{1}{2}\sqrt{3\pi/2}) = \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$

Ejercicio 6 (0,75 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una aplicación de clase C^1 y $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^n$ ¿Para qué valores de n y de k se puede calcular el cuadrado de $Jf(\mathbf{a})$? ¿Qué tamaño tendría?

Solución. No porque no es una matriz cuadrada, ya que $Jf(\mathbf{a})$ tiene tamaño 2008×2007.

Ejercicio 7 (1.5 puntos). Estudiar si la aplicación $f(x,y) = (e^{y-1}\cos x, e^{y-1}\operatorname{sen} x)$ es localmente invertible para valores de (x,y) próximos a $(0,1)$ y de $f(x,y)$ próximos a $(1,0)$. Calcula además $\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(1,0)$ y $\frac{\partial f^{-1}}{\partial y}(1,0)$.

Solución. Para saber si es localmente invertible comprobamos que $|Jf(0,0)| \neq 0$. Calculamos primero el jacobiano en un punto (x,y):

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} -e^y \operatorname{sen} x & e^y \cos x \\ e^y \cos x & e^y \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

Así que:

$$|Jf(0,0)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1 \neq 0,$$

por lo tanto existe la función inversa para los valores enunciados en el ejercicio.

Como $Jf^{-1}(1,0) = (Jf(0,0))^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(1,0) = (0,1), \qquad \frac{\partial f^{-1}}{\partial y}(1,0) = (1,0).}$$

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
14 de septiembre de 2007, 9h-12h

Nombre y apellidos:	
DNI:	
Fila:	
Columna:	
E-mail:	
Teléfono:	

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Total**
Puntuación								

OBSERVACIONES

- Tienes que **entregar** la hoja de examen.
- Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en un **folio nuevo** y pon en él tu nombre y apellidos. En el folio del examen debes poner además tu D.N.I.
- **No** entregues folios escritos a **lápiz.**
- Pon la **fila y columna** de la clase en la que te has sentado según las indicaciones que te den.
- Los cálculos que conducen a las soluciones del problema son tan importantes como las soluciones, no los ocultes.
- El **resultado final** de cada uno de los apartados debe estar dentro de un **recuadro** fácil de identificar, en el que debéis poner el número del apartado.
- Las notas se publicarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Campus Alfonso XIII).
- La revisión de exámenes tendrá lugar el lunes 17 de 11 a 12 y el miércoles 19 de 10.15 a 11.15.

Ejercicio 1 (1 punto). Justifica si la matriz de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ que sigue es invertible o no.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. No es invertible porque su determinante es $3 \cdot 3 - 4 = 0$ en $\mathbb{Z}_5$.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_1\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ siendo β_1 y β_2 las bases siguientes de $\mathbb{R}^3$:

$$\beta_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\},\ \beta_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}.$$

Se pide:

(2.1). Calcula $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$, donde β_c^3 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ *(1.5 puntos).*

Solución. Usaremos la fórmula

$$\begin{aligned} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) &= M_{\beta_c^3\beta_2} M_{\beta_1\beta_2}(f) M_{\beta_1\beta_c^3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.2). Calcula $f((2,1,3)_{\beta_1})$ expresando las coordenadas de este vector respecto a β_2 *(0.5 puntos).*

Solución.

$$f((2,1,3)_{\beta_1}) = M_{\beta_1\beta_2}(2,1,3)^t_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} (2,1,3)^t_{\beta_1} = (4,5,19)^t_{\beta_2}$$

(2.3). Calcula $f(2,1,3)$ expresando las coordenadas de este vector respecto a β_c^3 *(0.5 puntos).*

Solución.

$$f((2,1,3)) = M_{\beta_c^3\beta_c^3}(2,1,3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} (2,1,3)^t = (-1,3,14)^t$$

Ejercicio 3 (Diagonalización, 1.5 puntos). Justifica si las matrices que siguen son diagonalizables o no lo son:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solución. Empezamos calculando los polinomios característicos:

$$p_B(x) = \left|\begin{pmatrix} 6-x & 2 \\ -2 & 2-x \end{pmatrix}\right| = (6-x)(2-x)+4 = x^2-8x+16 = (x-4)^2$$
$$p_C(x) = \left|\begin{pmatrix} 6-x & 2 \\ 2 & 6-x \end{pmatrix}\right| = (6-x)^2-4 = x^2-12x+32 = (x-4)(x-8).$$

Así que los espectros son:

$$\sigma_B = \{4\} \text{ con } m(4)=2 \text{ y } \sigma_C = \{4,8\} \text{ con } m(4)=m(8)=1.$$

Ya podemos decir que la matriz C es diagonalizable porque tiene dos valores propios reales distintos con multiplicidad 1.

Con la matriz B hay que llevar más cuidado y comprobar si se verifica o no $\dim V_4 = m(4) = 2$. Como $\dim V_4 = 2 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 2-1 = 1 \neq m(4) = 2$ entonces la matriz B mo es diagonalizable.

Ejercicio 4 (2 puntos). Calcula la integral $\iiint_\Omega z^2 \frac{\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$, donde

$$\Omega = \{(x,y,z) : 36 < x^2+y^2 < 49, -15 < z < 2, x > 0\}$$

Solución.

$$\iiint_\Omega z^2 \frac{\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz = \iiint_{\Omega_c} z^2 \frac{\log r}{r} r dr d\theta dz$$
$$= \int_6^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-15}^2 z^2 \log r dz d\theta dr + \int_6^7 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_{-15}^2 z^2 \log r dz d\theta dr$$
$$= \pi(2^3+15^3)[r\log r - r]_6^7 = 3383\pi(7\log 7 - 7 - 6\log 6 + 6)$$
$$= 3383(7\log 7 - 6\log 6 - 1)\pi$$

Ejercicio 5 (0.75 puntos). Pon un ejemplo de una aplicación que sea una norma (distinta de la euclídea).

Solución. Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ la norma $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.

Ejercicio 6 (0,75 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una aplicación para la que se puede calcular su hessiano (de orden n, $Hf(\mathbf{a})$) y $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbb{R}^n$ ¿Cuál es el valor de k? ¿Se puede calcular el cuadrado de $Hf(\mathbf{a})$? ¿Qué tamaño tendría?

Solución. Definimos el hessiano cuando $k=1$, además la matriz $Hf(\mathbf{a})$ tiene tamaño $n \times n$ así que se le puede calcular su cuadrado y dicho cuadrado también tiene tamaño $n \times n$.

Ejercicio 7 (1.5 puntos). Sean $f(x,y) = (xe^y, x+y, \mathrm{sen}\,(xy))$ y $g(x,y,z) = (ze^x, xyz)$. Responde a las siguientes preguntas:

1. Calcula $Jg \circ f(1,0)$;
2. ¿Es $g \circ f$ localmente invertible en $(1,0)$? Caso de ser invertible calcula $\frac{\partial (g\circ f)^{-1}}{\partial x}(0,0)$.

Solución. Para responder a la primera pregunta calculamos

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 1 & 1 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}, \quad Jg(x,y,x) = \begin{pmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Particularizamos estos jacobianos en los puntos que nos interesan:

$$Jf(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Jg(f(1,0)) = Jg(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Jg \circ f(1,0) = Jg(f(1,0))Jf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que la matriz anterior no es invertible la aplicación $g \circ f$ no es localmente invertible en el punto $(1,0)$.

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
19 de enero de 2008, 9h-12h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):
Preguntas seleccionadas tanto obligatorias como opcionales (no rellenes la puntuación):

P. seleccionadas											
Puntuación											

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
4. Rellena la tabla con la modalidad de examen que has elegido y las preguntas seleccionadas. Comprueba que suman 10 puntos. En caso contrario no se te corregirán las que hagan sobrepasar el valor de 10.

<table>
<tr><th>Tipo de examen</th><th colspan="2">Preguntas que tienes que responder</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Primer parcial</td><td>Obligatorias</td><td>6,9,10,12</td></tr>
<tr><td>Opcionales</td><td>elige preguntas entre la 1,2,3,4,5,7 y 8
de forma que sumen 2 puntos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Final</td><td>Obligatorias</td><td>9,11,13,14</td></tr>
<tr><td>Opcionales</td><td>elige entre responder a la 12 o a la 1, la 6 y la 4</td></tr>
</table>

1. Considera el conjunto de vectores $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (5, 3, 1)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(0.5 punto).*

2. Calcula $(2 + 2i)^8$ *(1 punto).*

3. Demuestra, usando inducción, que $f^{(n)}(x) = \frac{8^n(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+8x)^n}$ para alguna función $f(x)$ que debes determinar. Para calcular la función candidata escribe quien es $f'(x)$ de acuerdo a la fórmula anterior y calcula la primitiva *(1.5 puntos).*

4. Dada una matriz $A \in M_{7\times7}(\mathbb{R})$ ¿Ocurre que $|7A| = 7|A|$? *(0.5 puntos)*

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k)}(c) = 0$. Entonces rellena correctamente los siguientes enunciados:

a) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = -7$ entonces c es un $\boxed{\qquad\qquad}$ *(0.25 puntos).*

b) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = -16$ entonces c es un $\boxed{\qquad\qquad}$ *(0.25 puntos).*

c) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = 15$ entonces c es un $\boxed{\qquad\qquad}$ *(0.25 puntos).*

d) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = 8$ entonces c es un $\boxed{\qquad\qquad}$ *(0.25 puntos).*

6. Calcula $\int \frac{1}{1+81x^2}dx$ *(1 punto).*

7. Plantea la descomposición en fracciones simples (sin calcular las constantes) de la fracción racional $F(x) = \frac{13x^3+81x+1}{(x^2+13)^3(x^2+81)^2(x+2)^3}$ *(1 punto).*

1.2.3.4.5.7.8

8. ¿Qué grado tiene el polinomio del denominador de la anterior fracción? *(0,5 puntos).*

9. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(1,4),(1,0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(2,0,1,0),(3,4,0,1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^{8l} \to \mathbb{R}^{5k}$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a los siguientes apartados:

a) Dar los valores de l y de k *(0.5 puntos).*

b) Estudia si el conjunto de vectores $\{(1,4)_{\beta_2},(5,4)\}$ es linealmente dependiente o independiente *(0.5 puntos).*

c) Calcula la matriz $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$ *(0.5 puntos).*

d) Calcula las ecuaciones y una base de Ker f respecto de la base β_2 *(0.5 puntos).*

e) Calcula las ecuaciones y una base de Im f respecto de la base β_c^2 *(0.5 puntos).*

10. Estudia si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sea se pide calcular la matriz diagonal y la matriz de paso P *(2.5 puntos).*

11. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2+x+8$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? *(0.5 puntos).*

12. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(1x)^2 - 1x^4}{\log(1+2x^4) - 2x^4} \qquad \textit{(2 puntos).}$$

13. Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y) = (xe^{x+y}, x+y, e^y)$ y $g(x,y,z) = (x\cos(y+z),(x+y)\cos z)$, se pide:

a) Calcula $J(g\circ f)(0,0)$ si es posible. Si no lo fuera di por qué *(0.75 puntos).*

b) Calcula $J(f\circ f)(0,0)$ si es posible. Si no lo fuera di por qué *(0.75 puntos).*

c) ¿Es localmente invertible la función $g\circ f$ localmente en torno al punto $(0,0)$? En caso de que lo sea calcula $J(g\circ f)^{-1}(g\circ f(0,0))$ *(1 punto).*

14. Calcula el volumen del sólido

$$\Omega = \{(x,y,z) : 25 < x^2+y^2+z^2 < 49, z < 0, x < 0\} \qquad \textit{(2.5 puntos)}$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
13 de febrero de 2008, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):
Preguntas seleccionadas tanto obligatorias como opcionales (no rellenes la puntuación):

P. seleccionadas											
Puntuación											

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
4. Rellena la tabla con la modalidad de examen que has elegido y las preguntas seleccionadas. Comprueba que suman 10 puntos. En caso contrario no se te corregirán las que hagan sobrepasar el valor de 10.

Tipo de examen	**Preguntas que tienes que responder**	
Primer parcial	Obligatorias	6,9,10,12
	Opcionales	elige preguntas entre la 1,2,3,4,5,7 y 8 de forma que sumen 2 puntos
Final	Obligatorias	9,11,13,14
	Opcionales	elige entre responder a la 12 o a la 1, la 6 y la 4

1. Considera el conjunto de vectores $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (5,3,1)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(0.5 punto)*.

2. Calcula $(2+2i)^8$ *(1 punto)*.

3. Demuestra, usando inducción, que $f^{(n)}(x) = \frac{8^n(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+8x)^n}$ para alguna función $f(x)$ que debes determinar. Para calcular la función candidata escribe quien es $f'(x)$ de acuerdo a la fórmula anterior y calcula la primitiva *(1.5 puntos)*.

4. Dada una matriz $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$ ¿Ocurre que $|7A| = 7^h|A|$ para algún valor de h? *(0.5 puntos)*

5. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k)}(c) = 0$. Entonces rellena correctamente los siguientes enunciados:

a) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = -7$ entonces c es un ______ *(0.25 puntos)*.

b) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = -16$ entonces c es un ______ *(0.25 puntos)*.

c) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = 15$ entonces c es un ______ *(0.25 puntos)*.

d) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = 8$ entonces c es un ______ *(0.25 puntos)*.

6. Calcula $\int \frac{1}{1+81x^2}\,dx$ *(1 punto)*.

7. Plantea la descomposición en fracciones simples (sin calcular las constantes) de la fracción racional $F(x) = \frac{13x^3+81x+3}{(x^2+13)^3(x^2+81)^2(x+2)^3}$ *(1 punto)*.

3.2.3.4.5.7.8

8. ¿Qué grado tiene el polinomio del denominador de la anterior fracción? *(0,5 puntos).*

9. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3,4),(1,0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1,0,0,0),(3,1,0,0),(2,0,1,0),(3,4,0,1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^{8l} \to \mathbb{R}^{5k}$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a los siguientes apartados:

a) Dar los valores de l y de k *(0.5 puntos).*

b) Estudia si el conjunto de vectores $\{(3,4)_{\beta_1},(13,12)\}$ es linealmente dependiente o independiente *(0.5 puntos).*

c) Calcula la matriz $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$ *(0.5 puntos).*

d) Calcula las ecuaciones y una base de Ker f respecto de la base β_2 *(0.5 puntos).*

e) Calcula las ecuaciones y una base de Im f respecto de la base β_c^2 *(0.5 puntos).*

10. Estudia si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sea se pide calcular la matriz diagonal y la matriz de paso P *(2.5 puntos).*

11. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2+x+8$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? *(0.5 puntos).*

12. Calcula, usando desarrollos de Taylor, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(3x)^2 - (3x)^4}{\log(1+2x^4) - 2x^4} \qquad \textit{(2 puntos).}$$

13. Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y) = (xe^{x+y}, x+y, e^y)$ y $g(x,y,z) = (x\cos(y+z),(x+y)\cos z)$, se pide:

a) Calcula $J(g\circ f)(0,0)$ si es posible. Si no lo fuera di por qué *(0.75 puntos).*

b) Calcula $J(f\circ f)(0,0)$ si es posible. Si no lo fuera di por qué *(0.75 puntos).*

c) ¿Es localmente invertible la función $g\circ f$ localmente en torno al punto $(0,0)$? En caso de que lo sea calcula $J(g\circ f)^{-1}(g\circ f(0,0))$ *(1 punto).*

14. Calcula el volumen del sólido

$$\Omega = \{(x,y,z) : 25 < x^2+y^2+z^2 < 49, z < 0, x < 0\} \qquad \textit{(2.5 puntos)}$$

Ingeniería Técnica Agrícola – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
15 de febrero de 2008, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o parcial del parcial):
Preguntas que te corresponden (no rellenes la puntuación):

Preguntas											
Puntuación											

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
4. Rellena la tabla con la modalidad de examen que has elegido y las preguntas que te corresponden. Comprueba que suman 10 puntos. En caso contrario no se te corregirán las que hagan sobrepasar el valor de 10.

Tipo de examen	**Preguntas que tienes que responder**
Primer parcial	1,2,3,5,6,8,9
Parcial del parcial	4,5,7,8,9,10

1. Estudia si el conjunto de vectores $\{(3,4)_{\beta_1}, (5,3)\}$ es linealmente dependiente o independiente siendo β_1 la base $\{(3,4),(1,0)\}$ *(0.5 puntos).*

2. Calcula $(2+2i)^8$ *(1 punto).*

3. Dada una matriz $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$ ¿Ocurre que $|7A| = 7^h|A|$ para algún valor de h? *(0.5 puntos)*

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k)}(c) = 0$. Entonces rellena correctamente los siguientes enunciados:

a) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = -7$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

b) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = -16$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

c) Si $k = 15$ y $f^{(15+1)}(c) = 15$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

d) Si $k = 16$ y $f^{(16+1)}(c) = 8$ entonces c es un $\boxed{}$ *(0.25 puntos).*

5. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β^4_c, y de $\mathbb{R}^2$, β^2_c. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3,4),(1,0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1,0,0,0),(3,1,0,0),(2,0,1,0),(3,4,0,1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^{8l} \to \mathbb{R}^{5k}$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a los siguientes apartados:

a) Dar los valores de l y de k *(0.5 puntos).*

3.2.3.4.5.7.8

b) Calcula la matriz $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f)$ *(1 punto).*

c) Calcula las ecuaciones y una base de Ker f respecto de la base β_2 *(0.5 puntos).*

d) Calcula las ecuaciones y una base de Im f respecto de la base β_c^2 *(0.5 puntos).*

6. Estudia si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sea se pide calcular la matriz diagonal y la matriz de paso P *(2.5 puntos).*

7. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2+x+8$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? *(1 punto).*

8. Calcula, usando desarrollos de Taylor, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2(3x)^2 - (3x)^4}{\log(1+2x^4) - 2x^4} \qquad \textit{(2 puntos).}$$

9. Calcula el área de la figura plana limitada por las gráficas de $f(x) = x^2+2x$ y de $g(x) = -x^2+x+1$ *(1 punto).*

10. Calcula el volumen de un cono de altura $h = 3$ y radio de la base $r = 7$ *(2.5 puntos).*

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Depto. de Matemática Aplicada y Estadística

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
I.T. Agrícola
Examen final
(04-07-2008)

Parte del primer parcial

Observaciones

1. El ejercicio 2 es obligatorio.
2. Tienes que optar por elegir entre el 1 y el 4 o el 3.

Ejercicio 1 (Cuestiones, 1 punto).

(1.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,3),(3,1,4)\} \subset \mathbb{Z}_5^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

(1.2). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\ f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\ f$.

(1.3). Pon la fórmula del binomio de Newton, es decir, $(a+b)^n = \ldots\ldots$

(1.4). Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\square\beta_6} M_{\square\square}(g) M_{\beta_3\square}$;
b) $M_{\beta_2\beta_8}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_1\beta_5}(g) M_{\square\square}$.

(1.5). De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2+16)(x-5)^2(x+5)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ y que $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}\ f$. Se pide:

(2.1). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcular $f(x,y,z)$.

(2.2). Encuentra los valores a y de b.

(2.3). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base canónica del subespacio $\mathrm{Ker}\ f$.

(2.4). Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

(2.5). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base β del subespacio $\mathrm{Ker}\ f$.

(2.6). Calcula $f((x,y,z)_\beta)$, expresando sus coordenadas en la base β.

Ejercicio 3 (Cálculo de límites, 3 puntos). Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\mathrm{sen}(2x^6)}{x^5\log(1+3x^3)}$$

Ejercicio 4 (Integración de una variable, 2 puntos). Calcula el área acotada por las curvas

Parte del segundo parcial

Ejercicio 5. Halla el punto de la curva intersección del plano $x + 2y + z = 10$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está más próximo al origen.

Ejercicio 6. Demuestra que el valor de la integral de la función $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ sobre el recinto plano $D \subset \mathbb{R}^2$ dado en coordenadas polares como

$$D = \{(r, \theta) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq a \operatorname{sen} \theta\},$$

es exactamente

$$a^3 \left(\frac{3\pi - 4}{9} \right).$$

Ejercicio 7. Supón que la temperatura en un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, en donde T se mide en ^{o}C y x, y, z en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura en el punto $(1, 1, -2)$ ¿Cuál es el valor de la máxima razón de aumento?

Ejercicio 8. Resuelve la ecuación diferencial

$$2xy + 2y^2 + (x^2 + 2 + 4xy)y' = 0.$$

.

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
8 de julio de 2008, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k)}(c) = 0$. Si $k = 3$ y $f^{(3+1)}(c) = -5$ entonces c es un $\boxed{}$ *(1 punto)*.

Solución:

c es un máximo relativo.

2. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

Solución:

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \operatorname{Im} f = 4 - 2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2+x+8$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto)*.

Solución:

La matriz tiene tamaño 2×2 y no puede ser diagonalizable porque el polinomio característico tiene raíces complejas, en concreto $\frac{-1\pm\sqrt{-31}}{2}$.

4. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(1, 4), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, 4, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

1.2.3.4.5.7.8

a) Calcula $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f)$. *(1 punto).*
Solución:
Usando la relación $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2 \beta_1} M_{\beta_2 \beta_1}(f) M_{\beta_2 \beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_2 *(1 punto).*
Solución:
Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2 \beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(1 punto).*
Solución:
Sabemos que $\dim \text{Im } f = 4 - \dim \text{Ker } f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \text{Ker } f = 2$), así que $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

5. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-1)(x-8)^1$, además $\dim V_8 = 1$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto).*

Solución:

El tamaño de la matriz es 2×2.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 1 y 8 (con multiplicidades respectivas 1 y 1) y además:

- $\dim V_1 = m(1) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_8 = m(8) = 1$.

6. Considera el conjunto de vectores $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (5, 3, 1)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(1 punto).*

Solución:

Son linealmente dependientes porque $\quad 5v_1 + 6v_2 = (0, 0, 0)$.

7. Calcula $(2 + 2i)^8$ *(1 punto).*

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{8}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(2 + 2i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 4096(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 4096$.

8. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto).*

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
8 de julio de 2008, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

---

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k)}(c) = 0$. Si $k = 7$ y $f^{(7+1)}(c) = -9$ entonces c es un $\boxed{}$ *(1 punto)*.

Solución:

c es un máximo relativo.

2. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

Solución:

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \operatorname{Im} f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\operatorname{Im} f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2+x+7$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto)*.

Solución:

La matriz tiene tamaño 2×2 y no puede ser diagonalizable porque el polinomio característico tiene raíces complejas, en concreto $\frac{-1\pm\sqrt{-27}}{2}$.

4. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(2, 5), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (4, 5, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

2.3.4.5.1.11.7

a) Calcula $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f)$. *(1 punto).*

Solución:

Usando la relación $M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2 \beta_1} M_{\beta_2 \beta_1}(f) M_{\beta_2 \beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 11 \\ 5 & -10 & -10 & 35 \end{pmatrix}$$

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_2 *(1 punto).*

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2 \beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(1 punto).*

Solución:

Sabemos que $\dim \operatorname{Im} f = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$), así que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

5. Una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-2)(x-9)^2$, además $\dim V_9 = 2$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto).*

Solución:

El tamaño de la matriz es 3×3.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 2 y 9 (con multiplicidades respectivas 1 y 2) y además:

- $\dim V_2 = m(2) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_9 = m(9) = 2$.

6. Considera el conjunto de vectores $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (9, 7, 5)\} \subset \mathbb{Z}_{11}^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(1 punto).*

Solución:

Son linealmente dependientes porque $\quad 9v_1 + 10v_2 = (0, 0, 0)$.

7. Calcula $(3 + 3i)^8$ *(1 punto).*

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{18}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(3 + 3i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 104976(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 104976$.

8. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto).*

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

EXAMEN PARCIAL

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

PRIMER CURSO DE INGENIERÍA TÉCNICA DE OBRAS PÚBLICAS

Apellidos y Nombre:

1. Calcula el área del sólido de revolución que resulta de girar la gráfica de $f(x) = x^{1/5}$ con $0 < x < 2$ alrededor del eje x.

2. Dada la función $f(x, y, z) = x^2y^2 + e^{ax^2z} + ay^3z$ siendo a un número real arbitrario, ¿para qué valores de a el gradiente de f en $(1, -2, 0)$ es perpendicular a $(1, -1, 1)$? ¿Para qué valores de a $\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}(0, 1, 1)$ es cero?

3. Halla $\int\int_A \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3,\ x > 0,\ y < 0\}$.

4. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ en el conjunto
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}.$$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen parcial del primer cuatrimestre
9 de julio de 2008, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntuación									

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir.
2. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.
3. Los que se presenten sólo al primer parcial tienen que responder todas las preguntas.
4. Los que se presenten al final sólo tienen que responder a las preguntas 2,4a,4b,5,8.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k)}(c) = 0$. Si $k = 3$ y $f^{(3+1)}(c) = -5$ entonces c es un $\boxed{}$ *(1 punto)*.

Solución:

c es un máximo relativo.

2. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x, y, z, t) : x+y+z+t = 0, x-y = 0\}$ *(1 punto)*.

Solución:

Las ecuaciones asociadas al subespacio vectorial son:

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Es rutinario comprobar que este sistema tiene rango 2. Así que $\dim \mathrm{Im}\, f = 4-2 = 2$ y bastará con dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, que satisfagan las ecuaciones para que constituyan una base:

$$\beta_{\mathrm{Im}\ f} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}.$$

3. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = x^2+x+8$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto)*.

Solución:

La matriz tiene tamaño 2×2 y no puede ser diagonalizable porque el polinomio característico tiene raíces complejas, en concreto $\frac{-1\pm\sqrt{-31}}{2}$.

4. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3, 4), (1, 0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, 4, 0, 1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto)*.

Solución:

Usando la relación $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = M_{\beta_c^2\beta_1}M_{\beta_2\beta_1}(f)M_{\beta_2\beta_c^4}$ se obtiene:

$$M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -2 & 28 \\ 4 & -12 & -4 & 40 \end{pmatrix}$$

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_2 *(1 punto)*.

Solución:

Un vector $(x, y, z, t)_{\beta_2}$ pertenece Ker f si $M_{\beta_2\beta_1}(f)(x, y, z, t)^t = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Así que por ejemplo $v = (0, 1, 1, -1)_{\beta_2}$ está en Ker f.

c) Escribe un vector, w, que esté en Im f expresando sus coordenadas en β_c^2 *(1 punto)*.

Solución:

Sabemos que $\dim \operatorname{Im} f = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$ (fíjate por las ecuaciones del apartado anterior que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$), así que Im $f = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ está en Im f. Como respuesta damos $w = (0, 1)$.

5. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-3)(x-10)^3$, además $\dim V_{10} = 3$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto)*.

Solución:

El tamaño de la matriz es 4×4.

La matriz es diagonalizable porque en su espectro sólo están los números reales 3 y 10 (con multiplicidades respectivas 1 y 3) y además:

- $\dim V_3 = m(3) = 1$ (la dimensión y la multiplicidad siempre coinciden cuando la última es 1).
- $\dim V_{10} = m(10) = 3$.

6. Considera el conjunto de vectores $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (5, 3, 1)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(1 punto)*.

Solución:

Son linealmente dependientes porque $\quad 5v_1 + 6v_2 = (0, 0, 0)$.

7. Calcula $(2 + 2i)^8$ *(1 punto)*.

Solución:

El número complejo tiene módulo al cuadrado $r = \sqrt{8}$ y argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que $(2 + 2i)^8 = r^8(\cos 8\theta + i \operatorname{sen} 8\theta) = 4096(\cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)) = 4096$.

8. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = \cos(x^2)$ *(1 punto)*.

Solución:

Como nos dicen que usemos la definición aplicaremos la igualdad:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

para la función $f(x) = \cos(x^2)$ y $a = 0$.

Calculamos las derivadas (hay que hacerlo explícitamente) y obtenemos $f'(0) = f''(0) = 0$. Como además $f(0) = 1$ se tiene finalmente:

$$P_2(x) = 1.$$

EXAMEN FINAL (Segundo cuatrimestre)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

PRIMER CURSO DE INGENIERÍA TÉCNICA DE MINAS

Apellidos y Nombre:

1. Halla la integral
$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3(x)dx$$

2. Considera la función $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. Calcula el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,-1)$. Calcula también $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,0)$.

3. Halla $\int\int_A e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ x < 0\}$.

4. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2 + x$ en el conjunto
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}.$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Depto. de Matemática Aplicada y Estadística

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
I.T. Agrícola
Examen final
(04-07-2008)

Parte del primer parcial

Ejercicio 1 (Cuestiones, 1 punto).

(1.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,3),(3,1,4)\} \subset \mathbb{Z}_5^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

(1.2). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$.

(1.3). Pon la fórmula del binomio de Newton, es decir, $(a+b)^n = \ldots\ldots.$

(1.4). Sea $g : \mathbb{R}^{1989} \to \mathbb{R}^{2007}$ una aplicación lineal y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ bases de $\mathbb{R}^{1989}$ y $\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ bases de $\mathbb{R}^{2007}$. Se pide que completes los cuadrados vacíos de las siguientes fórmulas con matrices apropiadas:

a) $M_{\beta_1\beta_7}(g) = M_{\square\beta_6} M_{\square\square}(g) M_{\beta_3\square}$;

b) $M_{\beta_2\beta_8}(g) = M_{\square\square} M_{\beta_1\beta_5}(g) M_{\square\square}$.

(1.5). De una matriz A sabemos que tiene como polinomio característico a $p(x) = (x^2+16)(x-5)^2(x+5)$. Calcula σ_A y justifica si la matriz A es diagonalizable o no lo es.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ y que $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f$. Se pide:

(2.1). Calcula la expresión analítica de f, es decir, calcular $f(x,y,z)$.

(2.2). Encuentra los valores a y de b.

(2.3). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base canónica del subespacio $\operatorname{Ker} f$.

(2.4). Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

(2.5). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base β del subespacio $\operatorname{Ker} f$.

(2.6). Calcula $f((x,y,z)_\beta)$, expresando sus coordenadas en la base β.

Ejercicio 3 (Integración de una variable, 2 puntos). Calcula el área acotada por las curvas $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

Parte del segundo parcial

1. [1.25P] Calcula el valor de la integral
$$\int_D (xseny)dxdy$$
donde D es el cuadrante de corona circular limitado por los semiejes OX^+ y OY^+ y las circunferencias de centro el origen y radios R y r.

2. [0.5P] Plantea el calculo de la siguiente integral:
$$\int_D (x+2y)dA$$
donde D es la región limitada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

3. [1P] Supón que la temperatura en un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por $T(x, y, z) = 80z^2/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, en donde T se mide en ^oC y x, y, z en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura en el punto $(1, 1, -2)$ ¿Cuál es el valor de la máxima razón de aumento?

4. [1.25P] De entre todos los puntos pertenecientes a la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y del plano $x + 2y + z = 10$, se pide determinar cuáles se encuentran a menor o mayor distancia del origen, así como dichas distancias.

5. [1P] Resuelve la ecuación diferencial
$$2xy + 2y^2 + (x^2 + 2 + 4xy)y' = 0.$$

Ingeniería Técnica de Obras Públicas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
17 de septiembre de 2008, 9.30h-12.30h

Parte del primer parcial

Ejercicio 1 (Cuestiones, 2 puntos).

(1.1). Considera el conjunto de vectores $S = \{(1,2,3),(3,1,4)\} \subset \mathbb{Z}_5^3$. Justifica, usando la definición, si S es linealmente dependiente o independiente.

(1.2). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con n y m números naturales. Demuestra que si $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$.

Ejercicio 2 (Aplicaciones lineales, 2 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

(2.1). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base canónica del subespacio $\operatorname{Ker} f$.

(2.2). Demuestra que $\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula $M_{\beta\beta}(f)$.

(2.3). Encuentra la dimensión, una base y las ecuaciones respecto a la base β del subespacio $\operatorname{Ker} f$.

(2.4). Calcula $f((x,y,z)_\beta)$, expresando sus coordenadas en la base β.

Ejercicio 3 (Espacios vectoriales, 1 punto). Calcula una base del espacio vectorial $H = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 : x - y = 0\}$

Ingeniería Técnica de Minas – Fundamentos Matemáticos
Examen final
10 de septiembre de 2008, 9.30h-12.30h

Nombre y apellidos:
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntuación								

1. En este ejercicio consideraremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$, β_c^4, y de $\mathbb{R}^2$, β_c^2. Se utilizarán las bases:

$$\beta_1 = \{(3,4),(1,0)\}, \qquad \beta_2 = \{(1,0,0,0),(3,1,0,0),(2,0,1,0),(3,4,0,1)\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$M_{\beta_2\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $M_{\beta_c^4\beta_c^2}(f)$. *(1 punto).*

b) Escribe un vector, v, que esté en Ker f expresando sus coordenadas en β_2 *(1 punto).*

2. Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene como polinomio característico a $p_A(x) = (x-3)(x-10)^3$, además $\dim V_{10} = 3$ ¿Qué tamaño tiene la matriz A? ¿Es diagonalizable? ¿Por qué? *(1 punto).*

3. Calcula una base del subespacio vectorial $H = \{(x,y,z,t) : x-y+z-t = 0, x-z = 0\}$ *(1 punto).*

4. Calcula, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 2, centrado en $a = 0$ de la función $f(x) = e^{x^2}$ *(1 punto).*

ITM– Fundamentos Matemáticos
17 de enero de 2009, 9.30h-12.30h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **primer parcial** entero: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan **una parte del primer parcial**: de la 6 a la 10, ambas inclusive. En este caso la puntuación de las preguntas es doble.
3. Preguntas que responden los que realizan el **examen final**: 4, 5, 7, 8 y 10.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial entero, parte del primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación											

En esta tanda de ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (0,0,1),\ v_4 = (1,1,1),\ v_5 = (1,2,1),$$

$$w_1 = (1,1),\ w_2 = (1,0),\ w_3 = (0,1).$$

Y definiremos los conjuntos

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\},\ \beta_2 = \{v_3, v_4, v_5\},\ \beta_3 = \{w_1, w_2\},$$

$$\beta_4 = \{w_1, w_3\},\ \beta_5 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta_6 = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}.$$

1. Calcula $\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$ *(1 punto)*.

Solución:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+3-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1} dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Calcula las matrices de cambio de base $M_{\beta_6\beta_5}$ y $M_{\beta_5\beta_6}$ *(1 punto)*.

Solución:

- Como

$$\begin{aligned} u_3 &= (0,0,1,0)_{\beta_5} \\ u_4 &= (0,0,0,1)_{\beta_5} \\ u_1 &= (1,0,0,0)_{\beta_5} \\ u_2 + 2u_3 &= (0,1,2,0)_{\beta_5} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Como

$$\begin{aligned} u_1 &= (0,0,1,0)_{\beta_6} \\ u_2 &= (-2,0,0,1)_{\beta_6} \\ u_3 &= (1,0,0,0)_{\beta_6} \\ u_4 &= (0,1,0,0)_{\beta_6} \end{aligned}$$

  tenemos que:

$$M_{\beta_6\beta_5} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Considera el conjunto de vectores $S = \{(2,1,2),(5,6,5)\} \subset \mathbb{Z}_7^3$. Justifica si S es linealmente dependiente o independiente *(1 punto)*.

Solución:

Son linealmente dependientes porque $(2,1,2)+(5,6,5) = (0,0,0)$.

4. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta_6} : 2x+y+z = 0, z+2y = 0\}$ respecto de la base β_5 *(1 punto)*.

Solución:

Sea $(x,y,z,t)_{\beta_5} \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β_6. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas

$$(x,y,z,t)_{\beta_5} = [M_{\beta_6\beta_5}(x,y,z,t)^t_{\beta_5}]^t = (-2y+z,t,x,y)_{\beta_6} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:

$$W = \{(x,y,z,t)_{\beta_5} : -4y+x+2z+t = 0, x+2t = 0\}.$$

5. Sea $T = \{(x,y,z,t) : y+z = 0, 2z = 0\}$, calcula una base y la dimensión de T *(1 punto)*.

Solución:

Calculamos primero la dimensión de T: $\dim T = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg} A_T = 4-2 = 2$. Ahora una base de T es $\beta_T = \{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$.

6. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ ¿puede ser un epimorfismo? ¿Por qué? En caso afirmativo pon un ejemplo *(1 punto)*.

Solución:

Usamos la relación $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Si f fuera un epimorfismo entonces $\dim \operatorname{Im} f = 5$ y entonces $2 = \dim \operatorname{Ker} f + 5$, pero esto no es cierto porque $\dim \operatorname{Ker} f$ no puede ser negativa. Así que f no puede ser un epimorfismo.

7. ¿Para qué valores de la constante h la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es inyectiva? *(0.5 puntos)*.

Solución:

Para que la aplicación sea inyectiva se tiene que verificar que $0 = \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - \mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$, es decir $\mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = 3$.

El determinante de la matriz $A = M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$ es $-1+h$, así que $\mathrm{rg} A = 3$, y por lo tanto f es inyectiva, si y sólo si $h \neq 1$.

8. Toma $h = 2$ en el ejercicio anterior y calcula una base de $\operatorname{Ker} f$ y otra de $\operatorname{Im} f$ *(1 punto)*.

Solución:

Usando la resolución del apartado anterior tenemos que $\mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = 3$ con lo cual $\dim \operatorname{Im} f = 3$ y $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. Por lo tanto la base de $\operatorname{Ker} f$ es $\beta_{\operatorname{Ker} f} = \emptyset$. Como base de $\operatorname{Im} f$ damos la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

9. Calcula una aproximación de $\log(1,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1 punto)*.

Solución:

Usamos la función $f(x) = \log x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ usando que $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2$:

$$p_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Así que la aproximación solicitada es

$$\log(1,0001) = f(1+10^{-3}) = 10^{-3} + \frac{10^{-6}}{2} + \frac{10^{-9}}{3} = 0{,}001000500333.$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (1, 1+10^{-3})$ y
$E = |R_4(1+10^{-3})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-3})^4\right| = |\frac{-6}{\xi^4}|\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{6}{\xi^4}\frac{10^{-12}}{4!} \leq \frac{6}{1}\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{10^{-12}}{4}$

10. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(1.5 puntos)*.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-2)^2(x-1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(2) = 2 = \dim V_2$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_2} = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(0,0,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ITA– Fundamentos Matemáticos
21 de enero de 2009, 9.30h-12.30h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **primer parcial** entero: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan **una parte del primer parcial**: de la 6 a la 10, ambas inclusive. En este caso la puntuación de las preguntas es doble.
3. Preguntas que responden los que realizan el **examen final**: 4, 5, 7, 8 y 10.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial entero, parte del primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación											

En esta tanda de ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

y definiremos los conjuntos

$$\beta_5 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta_6 = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}, \beta_7 = \{u_3 + 7u_2, u_4, u_2, u_1\}.$$

1. Demuestra, usando inducción, que $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^n = \frac{1-7^{n+1}}{1-7}$ para cualquier número natural n *(3 puntos)*.

Solución:

Para $n = 1$ la fórmula nos dice que $1 + 7 = \frac{(1+7)(1-7)}{1-7} = \frac{1-7^2}{1-7}$, luego es cierta.

Ahora suponemos que la fórmula es cierta para un número natural n (hipótesis de inducción) y la probamos para el número $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^n + 7^{n+1} &= \frac{1 - 7^{n+1}}{1-7} + 7^{n+1} \\ &= \frac{1 - 7^{n+1}}{1-7} + \frac{7^{n+1} - 7^{n+2}}{1-7} = \frac{1 - 7^{n+2}}{1-7} \end{aligned}$$

Así que la fórmula se satisface para el número $n + 1$ y por lo tanto por el principio de inducción para cualquier número natural.

2. Calcula $\int \frac{\log^4 x}{x} dx$ *(1 puntos)*.

Solución:

Haciendo el cambio de variable $t = \log x$ tenemos que $dt = \frac{dx}{x}$ y

$$\int \frac{\log^4 x}{x} dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + K = \frac{\log^5 x}{5} + K$$

3. Calcula las matrices de cambio de base $M_{\beta_6\beta_5}$ y $M_{\beta_5\beta_6}$ *(1 punto)*.

Solución:

- Como

$$\begin{aligned} u_3 &= (0,0,1,0)_{\beta_5} \\ u_4 &= (0,0,0,1)_{\beta_5} \\ u_1 &= (1,0,0,0)_{\beta_5} \\ u_2 + 2u_3 &= (0,1,2,0)_{\beta_5} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_5\beta_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Como

$$\begin{aligned} u_1 &= (0,0,1,0)_{\beta_6} \\ u_2 &= (-2,0,0,1)_{\beta_6} \\ u_3 &= (1,0,0,0)_{\beta_6} \\ u_4 &= (0,1,0,0)_{\beta_6} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$M_{\beta_6\beta_5} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta_6} : 2x + y + z = 0, z + 2y = 0\}$ respecto de la base β_5 *(1 punto)*.

Solución:

Sea $(x,y,z,t)_{\beta_5} \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β_6. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas

$$(x,y,z,t)_{\beta_5} = [M_{\beta_6\beta_5}(x,y,z,t)^t_{\beta_5}]^t = (-2y+z,t,x,y)_{\beta_6} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:

$$W = \{(x,y,z,t)_{\beta_5} : -4y + x + t + 2z = 0, x + 2t = 0\}.$$

5. Calcula las ecuaciones respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ del subespacio $S =< u_1, 2u_1 + 3u_2 >$. Da una base de S expresando sus vectores en coordenadas respecto a la base β_7. *(1 punto)*.

Solución:

Sea $(x,y,z,t) \in S$, entonces

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) = \alpha u_1 + \beta(2u_1 + 3u_2) = (\alpha + 2\beta)u_1 + 3\beta u_2 &= (\alpha + 5\beta, \alpha + 5\beta, \alpha + 5\beta, \alpha + 3\beta) \\ &\Rightarrow x = y = z = \alpha + 3\beta; t = \alpha + 3\beta \end{aligned}$$

Como sólo necesitamos $\dim \mathbb{R}^4 - \dim S = 2$ ecuaciones, basta con eliminar los parámetros y obtener:

$$S = \{(x,y,z,t) : x - y = 0, x - z = 0\}.$$

Ahora damos la base de S:

$$\beta_S = \{u_1, 2u_1 + 3u_2\} = \{(0,0,0,1)_{\beta_7}, (0,0,3,2)_{\beta_7}\}.$$

6. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es monomorfismo ¿Puede ocurrir que no sea un isomorfismo? ¿Por qué? En caso afirmativo pon un ejemplo *(1 punto)*.

Solución:

Usamos la relación $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Como f es un monomorfismo entonces $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ y entonces $2 = 0 + \dim \operatorname{Im} f$, por lo tanto $\dim \operatorname{Im} f = 2$ y f es suprayectiva. Así que f es biyectiva y por lo tanto un isomorfismo.

7. ¿Para qué valores de la constante h la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es suprayectiva? *(0.5 puntos).*

Solución:

Para que la aplicación sea suprayectiva se tiene que verificar que $3 = \dim Imf = \mathrm{rg} M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$.

El determinante de la matriz $A = M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$ es $-1+h$, así que $\mathrm{rg}A = 3$, y por lo tanto f es suprayectiva, si y sólo si $h \neq 1$.

8. Calcula el área de la superficie de una esfera de radio $R = 2$.

Solución:

Usaremos la fórmula $A = 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$, donde $f(x)$ es función cuya gráfica es una semicircunferencia de radio R, es decir $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Así que:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}dx = 2\pi \int_{-R}^{R} Rdx = \int_{-R}^{R} Rdx = 4\pi R^2 = 16\pi \end{aligned}$$

9. Calcula una aproximación de $\log(1,001)$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1 punto).*

Solución:

Usamos la función $f(x) = \log x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ usando que $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2$:

$$p_3(x) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3}.$$

Así que la aproximación solicitada es

$$\log(1,0001) = f(1 + 10^{-3}) = 10^{-3} + \frac{10^{-6}}{2} + \frac{10^{-9}}{3} = 0{,}001000500333.$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (1, 1 + 10^{-3})$ y

$E = |R_4(1 + 10^{-3})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-3})^4\right| = |\frac{-6}{\xi^4}|\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{6}{\xi^4}\frac{10^{-12}}{4!} \leq \frac{6}{1}\frac{10^{-12}}{4!} = \frac{10^{-12}}{4}$

10. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(1.5 puntos).*

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x - 2)^2(x - 1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(2) = 2 = \dim V_2$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_2} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(0, 0, 1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ITOP– Fundamentos Matemáticos
23 de enero de 2009, 10h-13h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **primer parcial** entero: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan el **examen final**: 2, 4, 6 y 8.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Total**
Puntuación										

En esta tanda de ejercicios consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (1,0,0,0),$$

y definiremos los conjuntos

$$\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta' = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}, \beta^* = \{u_3 + 7u_2, u_4, u_2, u_1\}.$$

1. Calcula $\int \frac{\log^4 x}{x} dx$ *(1 puntos).*

Solución:

Haciendo el cambio de variable $t = \log x$ tenemos que $dt = \frac{dx}{x}$ y

$$\int \frac{\log^4 x}{x} dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + K = \frac{\log^5 x}{5} + K$$

2. De una base de $\mathbb{R}^4$, $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, conocemos que $M_{\beta'\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da las coordenadas de los vectores de β_1 respecto de la base canónica β_c^4.

Solución:

Usando la información que nos da la matriz asociada tenemos:

$$\begin{aligned} v_1 = (1+2)u_3 + u_4 + u_1 + u_2 &= (6,5,2,1) \\ v_2 = u_3 + u_4 + u_1 &= (3,2,1,1) \\ v_3 = u_3 + u_4 &= (2,1,0,0) \\ v_4 = u_3 &= (1,1,0,0) \end{aligned}$$

3. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta'} : 2x + y + z = 0, z + 2y = 0\}$ respecto de la base β *(1 punto).*

Solución:

Tedremos que utilizar la matriz $M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sea $(x,y,z,t)_\beta \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β'. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas

$$(x,y,z,t)_\beta = [M_{\beta'\beta}(x,y,z,t)^t_\beta]^t = (-2y+z,t,x,y)_{\beta'} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:

$$W = \{(x,y,z,t)_\beta : -4y+x+2z+t=0, x+2t=0\}.$$

4. Calcula las ecuaciones respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ del subespacio $S =< u_1, 2u_1+3u_2 >$. Da una base de S expresando sus vectores en coordenadas respecto a la base β^*. *(1 punto).*

Solución:

Sea $(x,y,z,t) \in S$, entonces tenemos en cuenta que $u_1 = (1,1,1,1)$ y $2u_1+3u_2 = (5,5,5,2)$ y:

$$(x,y,z,t) = \alpha u_1 + \beta(2u_1+3u_2) = (\alpha+2\beta)u_1 + 3\beta u_2 = (\alpha+5\beta, \alpha+5\beta, \alpha+5\beta, 1\alpha+2\beta)$$
$$\Rightarrow x=y=z=\alpha+5\beta; t = 1\alpha+2\beta$$

Como sólo necesitamos $\dim \mathbb{R}^4 - \dim S = 2$ ecuaciones, basta con eliminar los parámetros y obtener:

$$S = \{(x,y,z,t) : 1y - 1z + 0t = 0, 1x - 1y + 0t = 0\}.$$

Ahora damos la base de S:

$$\beta_S = \{u_1, 2u_1+3u_2\} = \{(0,0,0,1)_{\beta^*}, (0,0,3,2)_{\beta^*}\}.$$

5. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es monomorfismo ¿Puede ocurrir que no sea un isomorfismo? ¿Por qué? En caso afirmativo pon un ejemplo *(1 punto).*

Solución:

Usamos la relación $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Como f es un monomorfismo entonces $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ y entonces $2 = 0 + \dim \operatorname{Im} f$, por lo tanto $\dim \operatorname{Im} f = 2$ y f es suprayectiva. Así que f es biyectiva y por lo tanto un isomorfismo.

6. ¿Para qué valores de la constante h la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $M_{\beta^3_c\beta^3_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es suprayectiva? *(1 punto).*

Solución:

Para que la aplicación sea suprayectiva se tiene que verificar que $3 = \dim Imf = \mathrm{rg} M_{\beta^3_c\beta^3_c}(f)$.

El determinante de la matriz $A = M_{\beta^3_c\beta^3_c}(f)$ es $-1+h$, así que $\mathrm{rg} A = 3$, y por lo tanto f es suprayectiva, si y sólo si $h \neq 1$.

7. Calcula una aproximación de $\mathrm{sen}(0,0001) + \cos 0,0001$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1 punto).*

Solución:

Usamos la función $f(x) = \mathrm{sen} x + \cos x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ sabiendo que el desarrollo de $g(x) = \mathrm{sen} x$ es $x - x^3/6$ y el de $h(x) = \cos x$ es $1 - x^2/2$. Así que el polinomio de Taylor de $f(x)$ centrado en $a = 0$ es:

$$p_3(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

La aproximación solicitada es

$$\mathrm{sen}(0,0001) + \cos(0,0001) = f(10^{-4}) = 1 + 10^{-4} - \frac{10^{-8}}{2} - \frac{10^{-12}}{6} +$$
$$= 1,0000999949998333$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (0, 10^{-4})$ y

$E = |R_4(10^{-4})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-4})^4\right| = |f^4(\xi)|\frac{10^{-16}}{4!} = |g^4(\xi) + h^4(\xi)|\frac{10^{-16}}{4!} \leq (|g^4(\xi)| + |h^4(\xi)|)\frac{10^{-16}}{4!} \leq (1+1)\frac{10^{-16}}{4!} = \frac{10^{-16}}{12}$

8. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(2 puntos)*.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-2)^2(x-1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(2) = 2 = \dim V_2$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_2} = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(1,1,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Plantea la descomposición en fracciones simples (sin calcular las constantes) de la fracción racional $F(x) = \frac{3x^7+6x^5+2x}{(x^2+x+3)^3(x^2+x+1)^1(x-2)^2}$ *(1 punto)*.

Solución:

$$F(x) = \frac{3x^7+6x^5+2x}{(x^2+x+3)^3(x^2+x+1)^1(x-2)^2}$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{A_j + B_j x}{(x^2+x+3)^j} + \sum_{j=1}^{1} \frac{C_j + D_j x}{(x^2+x+1)^j} + \sum_{j=1}^{2} \frac{E_j}{(x-2)^2}$$

ITOP– Fundamentos Matemáticos
23 de enero de 2009, 10h-13h

Modalidades de examen

1. Preguntas que responden los que realizan el **primer parcial** entero: todas.
2. Preguntas que responden los que realizan el **examen final**: 3, 6, 7 y 8.

Nombre y apellidos del alumno:
Fila y columna en la que se encuentra sentado: F_____, C_____.
Modalidad de examen elegido (primer parcial o final):

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Total**
Puntuación										

---

1. Calcula $\int \frac{\arctan^3(x)}{1+x^2}dx$ *(1 punto)*.

Solución:

Haciendo el cambio de variable $t = \arctan x$ tenemos que $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ y

$$\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + K = \frac{\arctan^4(x)}{4} + K$$

2. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ ¿puede ser un isomorfismo? ¿Por qué? En caso afirmativo pon un ejemplo *(1 punto)*.

Solución:

Usamos la relación $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Si f fuera un epimorfismo entonces $\dim \operatorname{Im} f = 5$ y entonces $2 = \dim \operatorname{Ker} f + 5$, pero esto no es cierto porque $\dim \operatorname{Ker} f$ no puede ser negativa. Así que f no puede ser un epimorfismo.

3. ¿Para qué valores de la constante h la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es inyectiva? *(1 punto)*.

Solución:

Para que la aplicación sea inyectiva se tiene que verificar que $0 = \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - \operatorname{rg} M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f)$, es decir $\operatorname{rg} M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f) = 3$.

El determinante de la matriz $A = M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f)$ es $-1 + h$, así que $\operatorname{rg} A = 3$, y por lo tanto f es inyectiva, si y sólo si $h \neq 1$.

4. Plantea la descomposición en fracciones simples (sin calcular las constantes) de la fracción racional $F(x) = \frac{2x^7+6x^5+2x}{(x^2+x+2)^3(x^2+x+1)^1(x-2)^5}$ *(1 punto)*.

Solución:

$$F(x) = \frac{2x^7 + 6x^5 + 2x}{(x^2 + x + 2)^3(x^2 + x + 1)^1(x - 2)^5}$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{A_j + B_j x}{(x^2 + x + 2)^j} + \sum_{j=1}^{1} \frac{C_j + D_j x}{(x^2 + x + 1)^j} + \sum_{j=1}^{5} \frac{E_j}{(x - 2)^5}$$

5. Calcula una aproximación de $\operatorname{sen}(0,0001) + e^{0,0001}$ usando un desarrollo de orden 3. Estima el error cometido *(1 punto)*.

Solución:

Usamos la función $f(x) = \operatorname{sen}x + e^x$ y hacemos un desarrollo de orden 3 centrado en el punto $a = 1$ sabiendo que el desarrollo de $g(x) = \operatorname{sen}x$ es $x - x^3/6$ y el de $h(x) = e^x$ es $1 + x + x^2/2 + x^3/6$. Así que el polinomio de Taylor de $f(x)$ centrado en $a = 0$ es:

$$p_3(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2}.$$

La aproximación solicitada es

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(0,0001) + e^{0,0001} &= f(10^{-4}) = 1 + 2 \cdot 10^{-4} + \frac{10^{-8}}{2} \\ &= 1,0002000050000000 \end{aligned}$$

Estimamos ahora el error cometido, como siempre $\xi \in (0, 10^{-4})$ y

$E = |R_4(10^{-4})| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(10^{-4})^4\right| = |f^4(\xi)|\frac{10^{-16}}{4!} = |g^4(\xi) + h^4(\xi)|\frac{10^{-16}}{4!} \leq (|g^4(\xi)| + |h^4(\xi)|)\frac{10^{-16}}{4!} \leq (1+3)\frac{10^{-16}}{4!} = \frac{10^{-16}}{6}$

6. Justifica si es o no diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo encuentra una matriz diagonal y la matriz de paso P *(2 puntos)*.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es $p_A(x) = (x-2)^2(x-1)$. Como $m(1) = 1 = \dim V_1$ y se puede comprobar fácilmente que $m(2) = 2 = \dim V_2$ tenemos que la matriz A es diagonalizable.

Se puede calcular con facilidad las bases $\beta_{V_2} = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y $\beta_{V_1} = \{(1,1,1)\}$, así que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ahora consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,1,1,0),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (2,0,0,0),$$

y definiremos los conjuntos

$$\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ \beta' = \{u_3, u_4, u_1, u_2 + 2u_3\}, \beta^* = \{u_3 + 7u_2, u_4, u_2, u_1\}.$$

7. De una base de $\mathbb{R}^4$, $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, conocemos que $M_{\beta'\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da las coordenadas de los vectores de β_1 respecto de la base canónica β_c^4.

Solución:

Usando la información que nos da la matriz asociada tenemos:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1+2)u_3 + u_4 + u_1 + u_2 = (7,5,2,1) \\ v_2 &= u_3 + u_4 + u_1 = (4,2,1,1) \\ v_3 &= u_3 + u_4 = (3,1,0,0) \\ v_4 &= u_3 = (1,1,0,0) \end{aligned}$$

8. Calcula las ecuaciones del subespacio $W = \{(x,y,z,t)_{\beta'} : 2x+y+z=0, z+2y=0\}$ respecto de la base β *(1 punto)*.

Solución:

Tedremos que utilizar la matriz $M_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sea $(x,y,z,t)_\beta \in W$, primero pasamos las coordenadas de este vector a la base β'. De los siguientes cálculos resultan el cálculo de las citadas coordenadas

$$(x,y,z,t)_\beta = [M_{\beta'\beta}(x,y,z,t)^t_\beta]^t = (-2y+z,t,x,y)_{\beta'} \in W.$$

Así que las ecuaciones de W solicitadas son:

$$W = \{(x,y,z,t)_\beta : -4y+x+2z+t=0, x+2t=0\}.$$

9. Sea $T = \{(x,y,z,t) : 3y+z=0, 2z=0\}$, calcula una base y la dimensión de T *(1 punto)*.

Solución:

Calculamos primero la dimensión de T: $\dim T = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg} A_T = 4-2 = 2$. Ahora una base de T es $\beta_T = \{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$.