SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE INGENIERÍA CIVIL

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. Las preguntas 1-6 son eliminatorias. Sólo se corregirá el examen completo a los alumnos que obtengan una puntuación igual o superior a 0.8 en las seis primeras preguntas.
2. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
3. Los resultados de las seis primeras preguntas los tienes que escribir en la hoja de examen en los recuadros habilitados. Los cálculos auxiliares los haces en folios que también debes de entregar.
4. No se puede salir al aseo.
5. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
6. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
7. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
8. Tienes que firmar el examen.
9. Duración: 3 horas.

---

1. Calcula el jacobiano de $f(x,y) = (4x^2 + 6y^3 + 3, 5x^2y^3 + 2)$ (0.3 puntos).
   Solución:
   $$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 8x^1 & 18y^2 \\ 10x^1y^3 & 15x^2y^2 \end{pmatrix}$$
2. Calcula el jacobiano de $g(x,y) = (5\text{sen}(2x+3y) + x, 4\text{cos}(6xy) + y)$ (0.3 puntos).
   Solución:
   $$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + 10\text{cos}(2x+3y) & 15\text{cos}(2x+3y) \\ -24y\text{sen}(6xy) & 1 - 24x\text{sen}(6xy) \end{pmatrix}$$
3. Calcula $J(f \circ g)(0,0)$ (0.5 puntos).
   Solución:
   $$Jf \circ g(0,0) = Jf(g(0,0))Jg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 288 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. Describe en coordenadas esféricas el recinto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 20^2, x < 0, y > 0, z > 0\}$ (0.3 puntos).
   Solución:
   $$\Omega_e = \{(r,\theta,\varphi) : r \leq 20, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$$

2,3.4,6.5–$\boxed{\text{examen 1}}$–ABELLÁN VEGARA, ALICIA

5. Describe en coordenadas cilíndricas el recinto $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16^2, x < 0, y < 0, z > 0\}$ (0.3 puntos).

   Solución:

$$\Omega_c = \{(r, \theta, z) : r \leq 16, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}, 0 < z < \sqrt{16^2 - r^2}\}$$

6. ¿Qué tamaño tiene la matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^{2021}$? ¿Y la matriz hessiana de $\|f\| : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$? (0.3 puntos).

   Solución:

   El tamaño de la matriz jacobiana es 2021×9 y el de la matriz hessiana es 9×9

7. Estudia la continuidad de

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y^4 + x^6 \operatorname{sen}\left(\frac{10}{(x^2+y^2)^9}\right)}{4(x^2+y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (2 puntos).

   Solución:

   Es fácil ver mediante un paso a coordenadas polares que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ y por lo tanto la función f es continua.

8. Calcula el plano tangente a la superficie gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(0, 0, f(0, 0))$, donde la función f es la del ejercicio anterior (2 puntos).

   Solución:

   Sacando las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, se tiene que $z = 0$ es el plano tangente. Basta con aplicar la fórmula que me da el plano tangente mediante el uso de las derivadas parciales.

9. Calcula el volumen de un cono de altura 5 y de radio de la base 10 (2 puntos).

   Solución:

   $V = \frac{1}{3}\pi 500$

10. Calcula el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x, y) = 3e^{4(x^4+y^4)+2} + 6$ en el recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 8^2, x \leq 0\}$ (2 puntos).

    Solución:

    El máximo se encuentra en $(0, 8)$ y el mínimo en $(-\frac{8}{\sqrt{2}}, -\frac{8}{\sqrt{2}}))$

Firma del alumno:

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE RECURSOS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.
6. Duración: 3 horas.

---

1. Calcula el jacobiano de $f(x, y) = (5x^3 + 6y^4 + 3, 7x^3y^4 + 2)$ <u>(0.3 puntos)</u>.

   <u>Solución:</u>

   $$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 15x^2 & 24y^3 \\ 21x^2y^4 & 28x^3y^3 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el jacobiano de $g(x, y) = (7\text{sen}(3x + 4y) + x, 5\cos(6xy) + y)$ <u>(0.3 puntos)</u>.

   <u>Solución:</u>

   $$Jg(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 21\cos(3x + 4y) & 28\cos(3x + 4y) \\ -30y\text{sen}(6xy) & 1 - 30x\text{sen}(6xy) \end{pmatrix}$$

3. Calcula $J(f \circ g)(0, 0)$ <u>(0.5 puntos)</u>.

   <u>Solución:</u>

   $$Jf \circ g(0, 0) = Jf(g(0, 0))Jg(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Describe en coordenadas esféricas el recinto $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25^2, x < 0, y > 0, z > 0\}$ <u>(0.3 puntos)</u>.

   <u>Solución:</u>

   $$\Omega_e = \{(r, \theta, \varphi) : r \leq 25, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$$

5. Describe en coordenadas cilíndricas el recinto $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 20^2, x < 0, y < 0, z > 0\}$ <u>(0.3 puntos)</u>.

   <u>Solución:</u>

   $$\Omega_c = \{(r, \theta, z) : r \leq 20, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}, 0 < z < \sqrt{20^2 - r^2}\}$$

3,4.5,6.7– $\boxed{\text{examen 2}}$

6. ¿Qué tamaño tiene la matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{2021}$? ¿Y la matriz hessiana de $\|f\| : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}$? (0.3 puntos).

   Solución:

   El tamaño de la matriz jacobiana es 2021×12 y el de la matriz hessiana es 12×12

7. Calcula el plano tangente a la superficie gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(0, 0, f(0, 0))$, donde la función f es

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{y^5 + x^7 \text{sen}\left(\frac{11}{(x^2+y^2)^{11}}\right)}{5(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (2 puntos).

   Solución:

   Sacando las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, se tiene que $z = 0$ es el plano tangente. Basta con aplicar la fórmula que me da el plano tangente mediante el uso de las derivadas parciales.

8. Calcula el volumen de un cono de altura 7 y de radio de la base 11 (2 puntos).

   Solución:

   $V = \frac{1}{3}\pi 847$

9. Calcula el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x, y) = 4e^{5(x^4+y^4)+3} + 6$ en el recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 8^2, x \leq 0\}$ (2 puntos).

   Solución:

   El máximo se encuentra en $(0, 8)$ y el mínimo en $(-\frac{8}{\sqrt{2}}, -\frac{8}{\sqrt{2}}))$

10. Calcula, usando un cambio de coordenadas adecuado, la integral doble $\iint_\Omega (2x + y)\text{sen}(x - y)dxdy$ donde Ω es el recinto limitado por $2x + y = 1$ y los ejes de coordenadas (2 puntos).

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE CIVIL (PARTE II)

12 de septiembre de 2011

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. No se puede salir al aseo.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.
6. Duración: 1,5 horas.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Calcula la integral siguiente y dibuja el recinto sobre el que se está integrando.

$$\int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dy \right) dx$$

(2,5 puntos).

Solución:

$\frac{\pi}{2}3$

2. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x + y$ en el recinto

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}.$$

Dibuja el recinto A y explica por qué está garantizada la existencia de extremos absolutos (2,5 puntos).

Solución:

El mínimo absoluto se encuentra en el punto $(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$ y el máximo en el punto $(0, 2)$.

1,2.3,4.5–$\boxed{\text{examen 3}}$

Firma del alumno:

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS.
GRADO DE RECURSOS (PARTE II)

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. No se puede salir al aseo.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.
6. Duración: 1,5 horas.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ defininidas por

$$f(x,y)=(1x^2+2y^2,3x^2+4y^2,2x^3y^3)\qquad g(x,y,z)=z^1+2zy.$$

Calcula la dirección por la que descenderíamos a máxima pendiente por la superficie $z=g\circ f(z,y)$ si estamos situados en el punto $(1,1,g\circ f(1,1))$ (2 puntos).

Solución:

La dirección es: $(114,122)$

Para calcularla es necesario obtener:

$$Jf(x,y)=\begin{pmatrix}2x & 4y\\ 6x & 8y\\ 6x^2y^3 & 6x^3y^2\end{pmatrix}, Jf(1,1)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\\ 6 & 6\end{pmatrix}, f(1,1)=(3,7,2),$$

$$Jg(x,y,z)=\begin{pmatrix}0 & 2z & 2y+1z^0\end{pmatrix}\, Jg(3,7,2)=\begin{pmatrix}0 & 4 & 15\end{pmatrix}$$

2. Calcula los extremos de la función $g(x,y)=e^{3f(x,y)}+\log\sqrt{f(x,y)}+2$ en el conjunto $A=\{(x,y):x\geq 0,y\geq 0,x^2+y^2\geq 1^2\}$, siendo la función $f(x,y)$ la suma de las distancias al cuadrado del punto (x,y) a los conjuntos $x=0$, $y=0$ y $x^2+y^2=1^2$ (2 puntos).

Solución:

Los mínimos son $(1,0)$ y $(0,1)$.

1,2.3,4.5– examen 4

3. Pon un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que sea localmente invertible en algún punto. Justifícalo con el teorema de la función inversa y di en qué punto es localmente invertible. El número $n > 1$ lo eliges tú (1 punto).

Firma del alumno:

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS
Examen Final, Primera parte
16 de septiembre de 2011

Nombre y apellidos:

Fila y columna:

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir porque los exámenes son diferentes.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

1. [1.5 puntos] Calcula $\int \sqrt{3-5x^2}dx$
2. [2 puntos] Estudia si la matriz que sigue es diagonalizable o no. Caso de ser diagonalizable da una matriz diagonal y una matriz de paso y escribe la relación entre todas ellas.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
3. [1.5 puntos] Recordamos que el conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, formado por todas las matrices de tamaño 2×2 sobre los números reales, es un espacio vectorial de dimensión 4 cuya base canónica es $\beta_c = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide justificar si el conjunto de matrices $\beta = \{I_2, A, A^2, A^3\}$ es o no linealmente independiente. ¿Es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

Firma del alumno:

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, ITOP

Exámen Final, Primera parte

12 de septiembre de 2011

Nombre y apellidos:

Fila y columna:

Instrucciones importantes

1. Tienes que devolver la hoja del examen, en caso contrario no se te podrá corregir porque los exámenes son diferentes.
2. Cada vez que empieces un ejercicio hazlo en una cara nueva.
3. Pon tu nombre en todos los folios y también en éste.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

1. [2 puntos] Calcula $\int \frac{1}{1-4x^2}dx$
2. [1 punto] Recordamos que el conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, formado por todas las matrices de tamaño 2×2 sobre los números reales, es un espacio vectorial de dimensión 4 cuya base canónica es $\beta_c = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide justificar si el conjunto de matrices $\beta = \{I_2, A, A^2, A^3\}$ es o no linealmente independiente. ¿Es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?
3. [2 puntos] Estudia si la matriz que sigue es diagonalizable o no. Caso de ser diagonalizable da una matriz diagonal y una matriz de paso y escribe la relación entre todas ellas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Firma del alumno:

134

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS. GRADO DE RECURSOS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. No se puede salir al aseo.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
4. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo, calculadora y DNI o pasaporte.
5. Tienes que firmar el examen.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Describe el siguiente conjunto en coordenadas polares

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + (y+1)^2 < 1^2\}$$

(1 punto).

2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ defininidas por

$$f(x,y) = (1x^2 + 2y^2, 2x^2 + 1y^2, 2x^3y^3) \qquad g(x,y,z) = z^1 + 2zy.$$

Calcula el plano tangente a la superficie $z = g \circ f(z,y)$ en el punto $(1, 1, g \circ f(1,1))$ (2 puntos).

Solución:

La dirección es: $(58, 50)$

Para calcularla es necesario obtener:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 4x & 2y \\ 6x^2y^3 & 6x^3y^2 \end{pmatrix}, Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, f(1,1) = (3,3,2),$$

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z & 2y + 1z^0 \end{pmatrix} \; Jg(3,3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Calcula, usando un cambio de coordenadas adecuado, la integral doble $\iint_\Omega (2x+y)\cos(x-2y)dxdy$ donde Ω es el recinto limitado por $2x + y = 1$ y los ejes de coordenadas (2 puntos).

1,2.2,1.3–$\boxed{\text{examen 5}}$

Firma del alumno:

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. AGRÍCOLAS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Puntuación obtenida											

Observaciones

1. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
2. Te puedes levantar a coger más folios en blanco cuando los necesites.
3. Tienes que firmar el examen.

A la hora de entregar los ejercicios resueltos, además de entregar la resolución de todos los ejercicios con las cuentas que hayan sido necesarias, se incluirá una primera página en la que se mostrarán las soluciones de los diversos ejercicios realizados y esta página de enunciados.

---

1. Un tanque contiene originalmente 1400 litros de agua limpia. Entonces se vierte en el tanque agua que contiene 0.05 kilogramos de sal por litro a una velocidad de 15 litros por minuto, y se deja que la mezcla salga del tanque con la misma rapidez. Determinar la sal que habrá en el tanque después de 18 minutos.

2. De los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales di cuáles representan sistemas cooperativos, competitivos o Lotka-Volterra. Justifica tu respuesta y di en en el caso que corresponda qué población representa a los preradores y cuál a las presas (1.5 puntos).

   (a) $\begin{cases} x' = 1x + 2xy - 2x^2 \\ y' = 1y - 3xy - 3y^2 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x' = 1x + 2xy - 2x^2 \\ y' = 1y + 2xy - 5y^2 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} x' = 1x - 2xy - 2x^2 \\ y' = 1y - 3xy - 1y^2 \end{cases}$

   Solución:

   El sistema (a) es de Lotka-Volterra siendo la variable x los depreradores y la y las presas.

   El sistema (b) es cooperativo.

   El sistema (c) es competitivo.

1,2.2,1.3–examen 6

3. Haz una representación del diagrama de fases del sistema (b) del ejercicio anterior (1 punto).

4. Calcula el número de subintervalos que tenemos que hacer para garantizar que la regla del trapecio compuesta nos dé un error menor que 10^{-5} al aproximar a $\int_0^5 (e^x + \cos x)dx$ (2.5 puntos).

5. Resuelve el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^{-1t} \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Solución:

Las raíces de la ecuación característica son 1 y 2.

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(t) = c_1 e^{1t} + c_2 e^{2t}$$

La solución particualar es de la forma $y_p(t) = Ke^{-1t}$ y la constante se calcula y obtenemos:

$$y_p(t) = \frac{2}{6} e^{-1t}$$

Finalmente se impodrían las condiciones de Cauchy.

Firma del alumno: