EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntuación obtenida										

DATOS DEL ALUMNO (RELLÉNALOS TODOS)

Nombre y apellidos:	Firma:
¿Parcial o final?	
D.N.I.:	
Titulación y grupo:	
Coordenadas en las que se encuentra sentado: F_____ C_____	
e-mail:	

OBSERVACIONES

1. Tienes que devolver la hoja de examen para que se pueda corregir.
2. Si tienes alguna pregunta sobre los enunciados (no sobre la resolución) puedes levantarte a preguntarle al profesor.
3. Sólo puedes tener sobre la mesa bolígrafo y D.N.I. o pasaporte.
4. Tienes que rellenar todos los datos solicitados en la tabla de arriba.
5. Duración: 3 horas.
6. Si realizas el examen parcial tienes que responder a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 y si haces al final responde a las preguntas 2, 3, 4, 6, 8, 9 y 10.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1], [1,0,1], [0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β), $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Se pide contestar a las siguientes preguntas (rellena los huecos y entrega los cálculos que te conducen a tales resultados):

1. Calcula las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base canónica:

$$\beta' = \left\{ (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}), (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}), (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}) \right\}$$ <u>(1 punto)</u>.

<u>Solución:</u>

$$\beta' = \{[1,1,1], [2,1,2], [5,2,6]\}$$

2. $M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$ <u>(1,5 puntos)</u>.

Solución:

$$M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{\beta\beta_c^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula las ecuaciones de Ker f respecto de la base canónica, una base del mismo con los vectores expresados en la base canónica y la dimensión (1 punto).

Solución:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) : x - z = z + y = 0\}$$

La dimensión de Ker f es 1 porque el rango del sistema matricial que lo define es 2 y una base del mismo es el conjunto formado por el vector *span* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4. Encontrar matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \text{ (0,5 puntos).} \qquad P = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \text{ (1,5 puntos).}$$

Solución:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. De una matriz diagonalizable A de tamaño 20×20 se sabe que su espectro (conjunto de los valores propios) es $\sigma_A = \{1, 2, 4, 11\}$ con multiplicidades $m(1) = m(2) = m(4) = 4$, $m(11) = 8$. Se pide calcular el espectro de la matriz $8A$ y las multiplicidades de los elementos del espectro (1 punto).

Solución:

Hay que justificar que la matriz $8A$ tiene por espectro a $\sigma_{8A} = \{8, 16, 32, 88\}$ y las multiplicidades son $m(8) = m(16) = m(32) = 4$, $m(88) = 8$

6. Calcula el polinomio de Taylor de la función $\operatorname{sen} x + 2\,e^x$ centrado en $a = 0$ y de orden 3 (1,5 puntos).

Solución:

El desarrollo de Taylor es $2 + 3\,x + x^2 + \frac{x^3}{6} + \cdots$

7. Calcula la primitiva $\int \frac{x+1}{(x+3)\,(x+4)}\,dx$ (2 puntos).

Solución:

El resultado es:

$$\int \frac{x+1}{(x+3)\,(x+4)}\,dx = 3\,\log(x+4) - 2\,\log(x+3)$$

8. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dos funciones definidas por $f(x,y) = \left[y^3 + x^2, \operatorname{sen}\left(y^3 + x\right), x^2\, y + x\right]$ y $g(x,y,z) = \left[e^{z+y+x}, \cos\left(z^2 + y^2 + x^2\right), x\, y^4\, z, z^3 + x\right]$, encuentra la matriz jacobiana

$$Jg \circ f(0,0) = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$ <u>(2,5 puntos)</u>.

<u>Solución:</u>

Usando la fórmula $Jg \circ f(0,0) = Jg(f(0,0)) \cdot Jf(0,0) = Jg(0,0,0) \cdot Jf(0,0)$ tenemos que:

$$Jg \circ f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Calcula, usando integrales dobles, el volumen de un cono de altura 3 y de radio de la base 9 <u>(2,5 puntos)</u>.

<u>Solución:</u>

$V = \frac{1}{3}\pi 243$

10. Una función, $f(x)$, tiene por polinomio de Taylor centrado en 0 a $x + \frac{x^2}{2}$. Calcula $f(0) + f''(0)$ <u>(0,5 puntos)</u>.

<u>Solución:</u>

$$f(0) + f''(0) = 1$$