MATEMÁTICAS. 26 de junio de 2017

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

$\boxed{\mathbf{1}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él *(Puntuación:* 1*)*.

$\boxed{\mathbf{2}}$.

Calcula el volumen del cuerpo limitado por los cilindros $y^2 + x^2 - 4 = 0$, $y^2 + x^2 - 25 = 0$ y los paraboloides $z = y^2 + x^2 + 5$ y $z = -y^2 - x^2$ *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{\mathbf{3}}$.

Calcula la integral doble $I = \iint_\Omega 5xydxdy$ siendo Ω el recinto limitado por $y = 2\,x^2$ y por $y = 10$ *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{\mathbf{4}}$.

Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = h(x,y)$ en el punto $[1, 1, h\,(1,1)]$ siendo $h(x,y) = 2\,x\,\log{(5\,x + 10)}\,y$ *(Puntuación:* 2.5*)*.

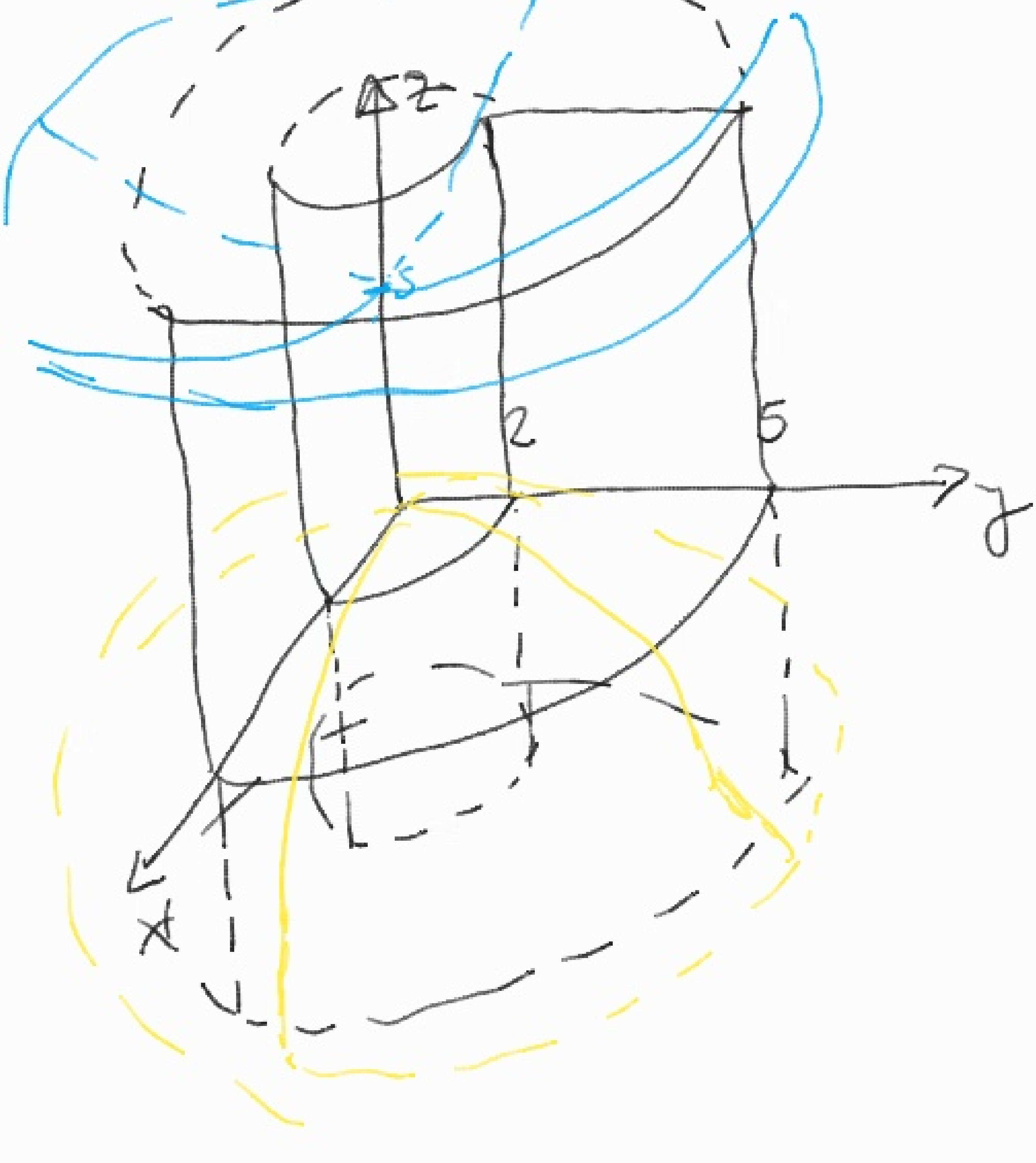
$\boxed{\mathbf{5}}$.

Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = e^{-x\,y}$ condicionados por $9\,y^2 + 2\,x^2 - 1 = 0$ y determina si son máximos o mínimos. Puedes usar que los puntos que satisfacen la condición dada están sobre una elipse, que es un conjunto compacto del plano. *(Puntuación:* 2.5*)*.

(1) Como el ejercicio nº 28 de las entre
gables

(2) Volumen limitado por $x^2+y^2=4$,

$x^2+y^2=25$ y $z=y^2+x^2+5$, $z=-x^2-y^2$



$$V = \iint_\Omega x^2+y^2+5 - (-x^2-y^2) \; dx\,dy \overset{*}{=}$$

↳ corona circular entre los círculos de radio 2 y 5

$$\overset{*}{=} \int_2^5 \int_0^{2\pi} (2r^2+5)\, r \; d\theta \; dr =$$

$$= 2\pi \cdot \int_2^5 2r^3 + 5r \; dr = 2\pi \left[2\frac{r^4}{4} + 5\frac{r^2}{2} \right]_{r=2}^{r=5}$$

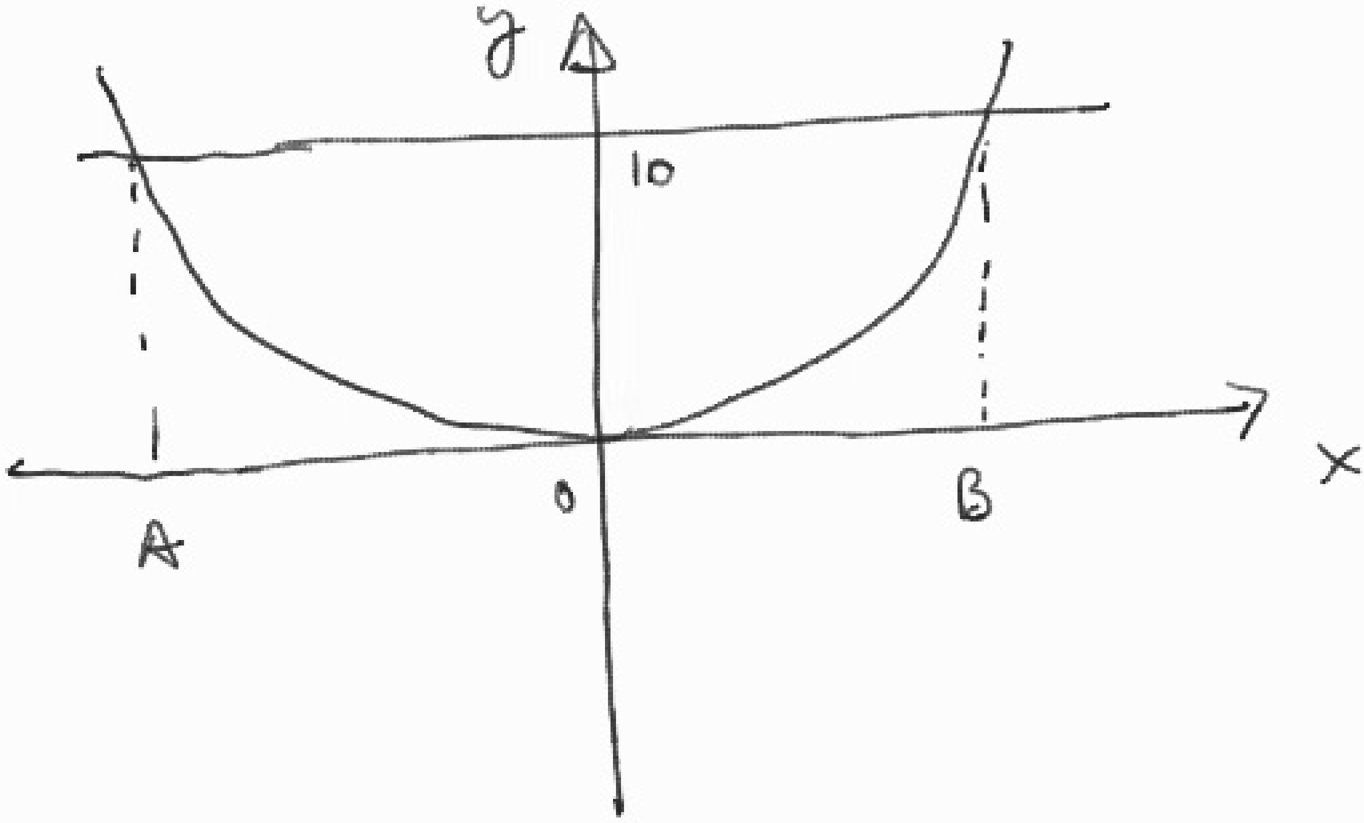
$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}5^4 + \frac{5}{2}5^2 - \frac{1}{2}2^4 - \frac{5}{2}2^2 \right) \simeq$$

$$\simeq 2243{,}0972$$

(3)

$$I = \iint_{\Omega} 5xy \, dx dy$$

Ω limitado por $y = 2x^2$, $y = 10$



(A) y (B) $\quad 2x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$A = -\sqrt{5} \quad , \quad B = +\sqrt{5}$

$$\Omega = \{ (x,y) : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \ , \ 2x^2 < y < 10 \}$$

$$I = \int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}} \int_{2x^2}^{10} 5xy \, dy \, dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}} 5x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=2x^2}^{y=10} dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}} x\,(10^2 - 4x^4)\, dx = \frac{5}{2}\left[100\frac{x^2}{2} - 4\frac{x^6}{6}\right]_{x=-\sqrt{5}}^{x=\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{2}\left(50 \cdot 5 - \frac{2}{3}5^3 - 50 \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 5^3\right) = 0$$

④ Ecuación del plano tangente a $z = h(x,y)$

en $(1,1,h(1,1))$

$$h(x,y) = 2x \log(5x+10)\, y$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2 \log(5x+10) y + 2x \frac{5}{5x+10} y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2x \log(5x+10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 2\log(15) + \frac{10}{15}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = 2\log(15)$$

$$h(1,1) = 2\log(15)$$

Ecuación del plano:

$$z - h(1,1) = \frac{\partial h}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial h}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$z - 2\log(15) = \left(2\log 15 + \frac{2}{3}\right)(x-1) + 2\log(15)(y-1)$$

(5) $f(x,y) = e^{-xy}$

$9y^2 + 2x^2 = 1 \longrightarrow$ CONDICIÓN

Simplificamos el problema calculando los extremos de $g(x,y) = -xy$ puesto que

$$f(x,y) = G(g(x,y)) \text{ con}$$

$G(z) = e^z$, que es estrictamente creciente. Luego los extremos de f y g coinciden.

El Teorema de Weierss garantiza la existencia de extremos absolutos por ser la condición compacta, luego esos extremos los buscaremos entre los candidatos por el método de los coeficientes indeterminados.

$$L(x,y) = -xy + \lambda(2x^2+9y^2-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -y + 4\lambda x = 0 \Rightarrow y = 4\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -x + 18\lambda y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -x + 18\lambda(4\lambda x) = 0 \\ \quad \parallel \\ x(-1+72\lambda^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ó} \\ 72\lambda^2 = 1 \end{array}\right.$$

$\boxed{x=0}$ $\Rightarrow$ $y=0$ y esta solución no vale porque no satisface la condición

$72\lambda^2=1$ $\quad 2x^2+9y^2=1 \oplus y=4\lambda x$

$$\Rightarrow 2x^2+9(16\lambda^2x^2) = 1 \Rightarrow$$

$$2x^2+144\lambda^2x^2=1 \Rightarrow 2x^2+144\,\frac{1}{72}\,x^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

- $2x^2+9y^2=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+9y^2=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=\frac{1}{2\cdot 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Así que los puntos candidatos son:

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \qquad P_3 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{-3\sqrt{2}}\right) \qquad P_4 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$g(P_1) = -\frac{1}{6\sqrt{2}} \qquad g(P_3) = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$g(P_2) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \qquad g(P_4) = \frac{-1}{6\sqrt{2}}$$

Luego:
- P_1 y P_4 son mínimos absolutos
- P_2 y P_3 son máximos absolutos.

MATEMÁTICAS. 26 de junio de 2017

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

$\boxed{1}$.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1], [1,0,1], [0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β). Se pide calcular las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base canónica *(Puntuación:* 1*)*.

$\boxed{2}$.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es: $M_{\beta_c^3\beta_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Considera las bases β_3 y β_4 de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ tales que

$$\beta_4 = \{[1,0,0,4], [0,1,1,0], [0,0,1,2], [0,0,0,1]\} \quad \text{y} \quad M_{\beta_c^3\beta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide calcular:

a) $M_{\beta_3\beta_4}(f)$ *(Puntuación:* 1*)*.
b) Dimensión y ecuaciones de Ker f respecto de la base β_3 *(Puntuación:* 0.5*)*.
c) Dimensión y ecuaciones de Im f respecto de la base β_4 *(Puntuación:* 0.5*)*.

$\boxed{3}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$ *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{4}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 25, x > \frac{5}{2}, y > 0\}$ en coordenadas polares y haz un dibujo de él *(Puntuación:* 2.5*)*.

$\boxed{5}$.

Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = x\,y\,z$ condicionados por los puntos que se encuentran sobre el elipsoide compacto de ecuación $\frac{z^2}{9} + y^2 + x^2 - 1 = 0$. Determina si son máximos o mínimos *(Puntuación:* 2.5*)*.

(5) $f(x,y,z) = xyz$

$x^2+y^2+\frac{z^2}{9} = 1$

La condición define un elipsoide, que es un conjunto compacto, luego la existencia de extremos absolutos está garantizada.

$$L(x,y,z) = xyz + \lambda\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{9}-1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= yz + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= xz + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= xy + 2\lambda \frac{z}{9} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\boxed{\text{Si } x=0}$

$$\left.\begin{aligned} yz&=0 \\ 2\lambda y&=0 \\ 2\frac{\lambda}{9}z&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\lambda=0,\ z=0 \quad (S1) \\ &\lambda=0,\ y=0 \quad (S2) \\ &\lambda\neq 0,\ y=0,\ z=0 \quad (S3) \end{aligned}$$

(S3) no vale como solución porque $(0,0,0)$ no está en el elipsoide.

(S1) $x=0=z \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$

$$A^{\pm}=(0,\pm 1,0)$$

(S2) $y=0=x \Rightarrow z=\pm 3$

$$B^{\pm}=(0,0,\pm 3)$$

Análogamente si $\boxed{y=0}$ obtenemos:

$$C^{\pm} = (0, 0, \pm 3)$$

$$D^{\pm} = (\pm 1, 0, 0)$$

Y si $\boxed{z=0}$

$$E^{\pm} = (\pm 1, 0, 0)$$

$$F^{\pm} = (0, \pm 1, 0)$$

Queda por ver qué pasa si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$.

Supongamos $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, entonces:

$$2\lambda = \frac{-yz}{x} = \frac{-xz}{y} = \frac{-9xy}{z}$$, de

donde:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 z = x^2 z \\ x z^2 = 9 x y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = x^2 \\ z^2 = 9 y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \pm x \\ z = \pm 3 y \end{array}\right.$$

Así que las soluciones obtenidas son puntos de la forma:

$P = (x, x, 3x)$

$Q = (x, x, -3x)$

$R = (x, -x, -3x)$

$S = (x, -x, +3x)$

Imponiendo la condición tendremos

$$x^2 + (\pm x)^2 + \frac{(\pm 3x)^2}{9} = 3x^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1/3}$ y los puntos anteriores son precisamente:

$$P^{\pm} = \left(\pm\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{1/3}, \pm 3\sqrt{1/3}\right)$$

$$Q^{\pm}_{\mp} = \left(\pm\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{1/3}, \mp 3\sqrt{1/3}\right)$$

$$R^{\pm} = \left(\pm\sqrt{1/3}\,,\ \mp\sqrt{1/3}\,,\ \mp 3\sqrt{1/3} \right)$$

$$S^{\pm} = \left(\pm\sqrt{1/3}\,,\ \mp\sqrt{1/3}\,,\ \pm 3\sqrt{1/3} \right)$$

Calculamos f en cada uno de los puntos:

- $f(A^{\pm}) = f(B^{\pm}) = f(C^{\pm}) = f(D^{\pm}) =$
  $= f(E^{\pm}) = f(F^{\pm}) = 0$
- $f(P^{\pm}) = \pm 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}$
- $f(Q^{\pm}) = \mp 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}$
- $f(R^{\pm}) = \pm 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}$, $f(S^{\pm}) = \mp 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}$

Luego, tenemos como máximos absolutos a los puntos:

$$P^+, Q^-, R^+ \text{ y } S^-$$

y como mínimos absolutos:

$$P^-, Q^+, R^- \text{ y } S^+$$

MATEMÁTICAS. 3 de julio de 2017. GIC.

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

$\boxed{\mathbf{1}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él *(Puntuación:* 1*).*

$\boxed{\mathbf{2}}$.

Calcula el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x + 5y + 5z = 50$ *(Puntuación:* 2*).*

$\boxed{\mathbf{3}}$.

Calcula el volumen limitado por el cilindro $x^2+y^2 = 9$, el plano $z = 0$ y por $z = 16-x^2$ *(Puntuación:* 2*).*

$\boxed{\mathbf{4}}$.

En este ejercicio tienes que justificar (por supuesto con los métodos que hemos visto en clase para optimizar) cuáles son los puntos más cercanos y más lejanos al origen del elipsoide compacto (si te pone nervioso el nombre obvialo) $\frac{z^2}{81} + \frac{y^2}{196} + \frac{x^2}{16} = 1$ *(Puntuación:* 2.5*).*

$\boxed{\mathbf{5}}$.

Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = e^{-x\,y}$ condicionados por $25\,y^2 + 4\,x^2 - 1 = 0$ y determina si son máximos o mínimos. Puedes usar que los puntos que satisfacen la condición dada están sobre una elipse, que es un conjunto compacto del plano. *(Puntuación:* 2.5*).*

MATEMÁTICAS. 8 de junio de 2017

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

$\boxed{1}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él *(Puntuación:* 1*)*.

$\boxed{2}$.

Calcula el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + 2z = 8$ *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{3}$.

Calcula la integral doble $I = \iint_\Omega 5xydxdy$ siendo Ω el recinto limitado por $y = 3\,x^2$ y por $y = 7$ *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{4}$.

Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ condicionados por $y^4 + x^4 - 5 = 0$ (los puntos que verifican esta condición puedes suponer que pertenecen a un conjunto que es cerrado y acotado). Da el valor de la función en los extremos absolutos que calcules *(Puntuación:* 2.5*)*.

$\boxed{5}$.

Dados dos números positivos cuyo producto es menor o igual a 16 y tales que ambos son mayores que 1. Se pide que encuentres cuánto puede valer como mucho y como poco su suma. En ambos casos debes dar la pareja de números que alcanzan tales sumas. *(Puntuación:* 2.5*)*.

④ $f(x,y) = x^2 + y^2$

$x^4 + y^4 = 5$

La existencia de extremos absolutos está garantizada porque la condición define un conjunto compacto.

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^4 + y^4 - 5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4\lambda x^3 = 2x(1 + 2\lambda x^2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda y^3 = 2y(1 + 2\lambda y^2) = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 & \text{No vale porque no satisface la condición} \\ x = 0,\ 1 + 2\lambda y^2 = 0, & y = \pm\sqrt[4]{5} \\ y = 0,\ 1 + 2\lambda x^2 = 0, & x = \pm\sqrt[4]{5} \\ 1 + 2\lambda x^2 = 0 = 1 + 2\lambda y^2 \end{cases}$

En el último caso $2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

Suponemos la condición con $x = \pm y$

y obtenemos:

$$x^4 + y^4 = 2x^4 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$$

Así que los candidatos a extremos

son:

$$P_1^{\pm} = (0, \pm\sqrt[4]{5})$$

$$P_2^{\pm} = (\pm\sqrt[4]{5}, 0)$$

$$P_3^{\pm} = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right)$$

$$P_4^{\pm} = \left(\pm\sqrt[4]{5/2}, \mp\sqrt[4]{5/2}\right)$$

Ahora tenemos:

$$f(P_1^{\pm}) = f(P_2^{\pm}) = \sqrt{5}$$

$$f(P_3^{\pm}) = f(P_4^{\pm}) = 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2}\,\sqrt{5}$$

Así que:

→ $P_1^{\pm}$ y $P_2^{\pm}$ son mínimos absolutos

→ $P_3^{\pm}$ y $P_3^{\pm}$ son máximos absolutos

MATEMÁTICAS. 3 de julio de 2017. GIC.

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 1–102346320)

1.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, en concreto

$$\beta = \{[1,0,0]\,,[1,0,2]\,,[0,1,5]\} \text{ y } \beta' = \{[1,1,1]\,,[0,1,5]\,,[0,0,1]\}.$$

Se pide que calcules la matriz $M_{\beta\beta'}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β) *(Puntuación:* 1*)*.

2.

Sean β la base de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1]\,,[1,0,1]\,,[0,0,1]\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz $M_{\beta_c^3\beta_c^3}(f)$ *(Puntuación:* 1*)*.

3.

Calcula una base de Ker (f) y otra de Im (f) para la aplicación f del ejercicio anterior expresando las coordenadas de los vectores que des respecto de la base canónica *(Puntuación:* 1*)*.

4.

Sea $A = \begin{pmatrix} 23 & -15 & 0 \\ 20 & -12 & 0 \\ 40 & -30 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$ *(Puntuación:* 2*)*.

5.

Calcula el volumen del cuerpo limitado por los cilindros $y^2 + x^2 - 9 = 0$, $y^2 + x^2 - 64 = 0$ y los paraboloides $z = y^2 + x^2 + 8$ y $z = -y^2 - x^2$ *(Puntuación:* 2.5*)*.

6.

En este ejercicio tienes que justificar (por supuesto con los métodos que hemos visto en clase para optimizar) cuáles son los puntos más cercanos y más lejanos al origen del elipsoide compacto (si te pone nervioso el nombre obvialo) $\frac{z^2}{81} + \frac{y^2}{196} + \frac{x^2}{16} = 1$ *(Puntuación:* 2.5*)*.

2. Calcula, usando coordenadas polares, la integral

$$\iint xy\,dx\,dy$$

siendo $A = \{(x, y) : y \geq x, 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2\}$ (2,5 puntos).

② $$\iint_A xy\,dx\,dy = I$$

$$A = \{(x,y) \text{ tq } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4^2\}$$

$$A_p = \{(r,\theta) \text{ tq } 1 < r < 4,\ 0 < \theta < 2\pi\}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_1^4 r^2 \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \; r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=4} d\theta$$

$$= \frac{4^4-1}{4} \; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2 \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4^4-1}{4} \; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, 2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{4^4-1}{2} \; \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$