

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. Matrices.

1.1 Definición. Sea K un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}^*$. Una matriz $n \times m$ sobre K es una aplicación:

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \longrightarrow K.$$

Si $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ denotaremos $a_{ij} = A(i, j)$ y diremos que a_{ij} es el elemento (i, j) de A .

Denotaremos por $M_{n \times m}(K)$ el conjunto de las matrices $n \times m$ sobre K .

La forma de representar la matriz anterior es ordenando las imágenes por A en una caja que consta de n filas y m columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Así, diremos que A tiene n filas y m columnas.

Para abreviar escribiremos $A = (a_{ij})$ para referirnos a la matriz anterior.

A los n vectores $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}), \dots, (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \in K^m$ se les llama vectores fila de A y a los m vectores de K^n $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm})$ se les llama vectores columna de A .

Una matriz real es una matriz con elementos en \mathbb{R} y una matriz compleja es una matriz con elementos en \mathbb{C} .

1.2 Definición. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(K)$$

se define la matriz traspuesta de A a:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$$

.

1.3 Ejemplo. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ entonces $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

Si $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ entonces $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$.

1.4 Definición. Dada $A \in M_{n \times m}(K)$, diremos que A es cuadrada si $n = m$. Denotaremos por $M_n(K)$ al conjunto $M_{n \times n}(K)$.

1.5 Definición. Dada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$, a la r -tupla $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr})$, donde $r = \min\{n, m\}$, se le llama diagonal principal de A .

1.6 Definición. Dada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ se define la matriz opuesta de A a $-A = (b_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ donde $b_{ij} = -a_{ij}$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1.7 Definición. Se define la matriz $0_{n \times m} = (c_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ donde $c_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1.8 Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$.

- i) Diremos que A es una matriz fila si $n = 1$.
- ii) Diremos que A es una matriz columna si $m = 1$.

1.9 Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

- i) Diremos que A es diagonal si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- ii) Diremos que A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- iii) Diremos que A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- iv) Diremos que A es simétrica si $A^T = A$.
- v) Diremos que A es antisimétrica si $A^T = -A$.

Notar que si una matriz cuadrada es antisimétrica entonces la diagonal principal es el vector nulo.

vii) Una matriz escalar es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales.

viii) Se define la matriz unidad de orden n y se denota I_n a la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son 1.

1.10 Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$, $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $j_1, j_2, \dots, j_s \in \{1, 2, \dots, m\}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ y $j_1 < j_2 < \dots < j_s$. Entonces la matriz que resulta de eliminar las filas distintas de i_1, i_2, \dots, i_r y las columnas distintas de j_1, j_2, \dots, j_s o sea

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \dots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}$$

se dice que es una submatriz de orden $r \times s$ de A .

1.11 Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$. Las submatrices de orden 2×2 de A son:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.12 Definición. Un bloque es una submatriz donde las filas no eliminadas son consecutivas y las columnas no eliminadas son consecutivas.

1.13 Ejemplo. Los bloques de orden 2×2 de la matriz anterior son:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.14 Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$. Sea $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$ tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ y $m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}^*$ tales que $m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$. Entonces si $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ sea A_{ij} la matriz que resulta de excluir las filas $1, 2, \dots, n_1 + \dots + n_{i-1}, n_1 + \dots + n_i + 1, \dots, n$ y las columnas $1, 2, \dots, m_1 + \dots + m_{j-1}, m_1 + \dots + m_j + 1, \dots, m$. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_{n_1, m_1} & A_{n_1, m_2} & \dots & A_{n_1, m_s} \\ A_{n_2, m_1} & A_{n_2, m_2} & \dots & A_{n_2, m_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_r, m_1} & A_{n_r, m_2} & \dots & A_{n_r, m_s} \end{pmatrix}$$

y diremos que hemos descompuesto A en bloques.

Operaciones con matrices.

Sea K un cuerpo y $n, m, r \in \mathbb{N}^*$.

1. Suma.

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ definimos $A + B = (c_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1.15 Proposición. $(M_{n \times m}(K), +)$ es un grupo abeliano.

2. Ley externa.

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ y $\alpha \in K$ definimos $\alpha A = (c_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ donde $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1.16 Proposición. $(M_{n \times m}(K), +)$ es un K -espacio vectorial.

Producto de matrices.

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in M_{m \times r}(K)$ se define $AB = (c_{ij}) \in M_{n \times r}(K)$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$.

Notar que sólo hemos definido el producto de dos matrices cuando el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda.

1.17 Ejemplos. $(-5 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (-10 \quad 17).$

$$(-1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (16).$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (-1 \quad 5 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 8 & 6 \\ 1 & -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$(2 \quad -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ no se puede calcular.}$$

1.18 Proposición. Sea $n, m, r, s \in \mathbb{N}^*$.

i) Si $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{m \times r}(K)$ y $C \in M_{r \times s}(K)$ entonces $(AB)C = A(BC)$.

ii) Si $A \in M_{n \times m}(K)$ y $B, C \in M_{m \times r}(K)$ entonces $A(B + C) = AB + AC$.

iii) Si $A \in M_{n \times m}(K)$ entonces $AI_m = A$ y $I_n A = A$.

Rango de una matriz.

1.19 Proposición. Si $A \in M_{n \times m}(K)$ entonces el rango del conjunto de los n vectores fila en K^m coincide con el rango del conjunto de los m vectores columna en K^n .

1.20 Definición. Si $A \in M_{n \times m}(K)$ se define el rango de A y se denota $\text{rg}A$ al rango del conjunto de los vectores fila (que coincide con el rango del conjunto de los vectores columna).

Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{n \times m}(K)$. Las transformaciones elementales de A son:

1. Intercambiar dos filas (columnas) de A .
2. Si $\alpha \in K \setminus \{0\}$, sustituir una fila (columna) por el producto de α por esta fila (columna).
3. Si $\alpha \in K$, sustituir una fila (columna) de A por la suma de ésta más otra fila (columna) multiplicada por α .

Como consecuencia de un resultado del Capítulo de Espacios Vectoriales se obtiene el siguiente Teorema:

1.21 Teorema. El rango de una matriz no varía al realizar una operación elemental sobre ésta.

1.22 Definición. Dadas $A, B \in M_{n \times m}(K)$ diremos que A y B son equivalentes si existen $P \in M_n(K)$ y $Q \in M_m(K)$ tales que $B = PAQ$.

1.23 Proposición. Sean $A, B \in M_{n \times m}(K)$. Entonces:

- i) A y B son equivalentes $\Leftrightarrow \text{rg}A = \text{rg}B$.
- ii) $\text{rg}A = r \Leftrightarrow A$ es equivalente a $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{pmatrix}$.

Matrices Invertibles.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y K un cuerpo.

1.24 Definición. Dada $A \in M_n(K)$ diremos que A es invertible, regular o no singular si existe $B \in M_n(K)$ tal que $AB = BA = I_n$. Entonces diremos que B es una matriz inversa de A .

1.25 Definición. Denotaremos por $\text{GL}_n(K)$ el conjunto de las matrices de $M_n(K)$ que son invertibles.

1.26 Proposición. *Se verifica que $(GL_n(K), \cdot)$ tiene estructura de grupo.*

Como consecuencia de lo anterior se obtienen los dos siguientes resultados:

1.27 Proposición. *Si $A \in M_n(K)$ es invertible entonces la matriz inversa de A es única. Denotaremos por A^{-1} la matriz inversa de A .*

1.28 Proposición. *Sean $A, B \in GL_n(K)$. Entonces:*

- i) $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ii) $AB \in GL_n(K)$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.29 Proposición. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces A es invertible $\Leftrightarrow \text{rg}A = n$.*

Método para el cálculo de la matriz inversa de una matriz invertible.

Sea $A \in M_n(K)$. Consideramos la matriz descompuesta en bloques $(A|I_n)$.

Entonces realizamos operaciones elementales a las filas de esta matriz para intentar obtener en el primer bloque la matriz I_n .

Primer Caso. Si es imposible obtenerla entonces A no es invertible.

Segundo Caso. Si se obtiene, la matriz del segundo bloque es la matriz inversa de A .

2. Determinantes.

2.1 Definición. *Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Definimos el determinante de A y se*

denota $|A|$ o $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ de la siguiente forma:

Si $n = 1$ entonces $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

Si $n = 2$ entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Supongamos que tenemos definidos los determinantes de las matrices de orden $n - 1$.

Entonces definimos $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$

$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$

Como caso particular, para el caso de $n = 3$ se tiene la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

2.2 Proposición. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

i) Si B es la matriz que se obtiene al permutar dos filas (columnas) de A entonces $|B| = -|A|$.

ii) Si una fila (columna) de A es combinación lineal de las otras o equivalentemente, si las filas (columnas) de A son linealmente dependientes, entonces $|A| = 0$.

iii) Si $\lambda \in K$ y B es una matriz con las misma filas (columnas) que A excepto una fila (columna) que es la correspondiente a la de A multiplicada por λ entonces $|B| = \lambda|A|$.

iv) Si B es la matriz que resulta de sustituir una fila (columna) de A por la suma de ésta y una combinación lineal de las demás entonces $|A| = |B|$.

v) $|A| = |A^T|$.

vi) Si $B \in M_n(K)$ entonces $|AB| = |A||B|$.

vii)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

La propiedad análoga se da también para columnas.

viii) Si $A \in M_n(K)$, A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

ix) Si $A \in GL_n(K)$ entonces $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

x) El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior coincide con el producto de los elementos de su diagonal.

2.3 Definición. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

i) Se define el menor complementario del elemento (i, j) y se denota Δ_{ij} al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A .

ii) Se define el adjunto del elemento (i, j) y se denota A_{ij} a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

2.4 Proposición. El valor de un determinante coincide con la suma de los productos de cada uno de los elementos de una fila (columna) por sus respectivos adjuntos.

Cálculo de la matriz inversa usando determinantes.

2.5 Definición. Dada $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se define la matriz adjunta de A a

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.6 Proposición. Si $A \in GL(n, K)$ entonces $A^{-1} = \text{Adj}(A)^T / |A|$.

Cálculo del rango de una matriz usando determinantes.

2.7 Definición. Sea $A \in M_{n \times m}(K)$ y $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leq \min(n, m)$. Un menor de orden r de A es el determinante de una submatriz $r \times r$ de A .

2.8 Proposición. Dada $A \in M_{n \times m}(K)$, $\text{rg}A$ coincide con el máximo de los ordenes de sus menores no nulos.

3. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Sea K un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Definición. *Un sistema de n ecuaciones y m incógnitas es un conjunto de n ecuaciones en la forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, éstos reciben el nombre de coeficientes del sistema y $b_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, éstos reciben el nombre de términos independientes del sistema. Los x_1, x_2, \dots, x_m reciben el nombre de incógnitas del sistema.

Dado $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in K^m$, diremos que c es una solución del sistema anterior si al sustituir en las ecuaciones anteriores cada x_j por c_j , $1 \leq j \leq m$, las igualdades son ciertas.

Dado el sistema anterior,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

se dice que es la matriz del sistema, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ se dice que es la matriz de los términos

independientes y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ es la matriz de las incógnitas. La matriz descompuesta por bloques $A^* = (A|b)$ recibe el nombre de matriz ampliada del sistema.

Claramente el sistema anterior se puede expresar por la siguiente igualdad matricial:

$$Ax = b.$$

Esta recibe el nombre de forma matricial del sistema.

3.2 Definición. Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si el vector de los términos independientes es el vector nulo.

3.3 Definición.

a. Diremos que un sistema es compatible (SC) si tiene soluciones.

a.1. Diremos que un sistema es compatible determinado (SCD) si es compatible y sólo tiene una solución.

a.2. Diremos que un sistema es compatible indeterminado (SCI) si es compatible y no tiene una única solución.

b. Diremos que un sistema es incompatible si no tiene solución.

Notar que un sistema homogéneo es siempre compatible.

3.4 Definición. Dados dos sistemas lineales de n ecuaciones con m incógnitas con coeficientes en K , diremos que son equivalentes si sus conjuntos de soluciones coinciden.

3.5 Proposición. Consideremos un sistema de n ecuaciones con m incógnitas con coeficientes en K .

i) Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de multiplicar dicha ecuación por un elemento de K no nulo, el sistema obtenido es equivalente al primero.

ii) Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de sumar a esta ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar, el sistema obtenido es equivalente al primero.

3.6 Teorema. (Rouché-Fröbenius). Sea $Ax = b$ un sistema de n ecuaciones con m incógnitas y sea $A^* = (A|b) \in M_{n \times (m+1)}(K)$. Entonces el sistema es compatible $\Leftrightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^*$.

- i) Si $\text{rg}A = \text{rg}A^* = m$ entonces el sistema es compatible determinado.
 - ii) Si $\text{rg}A = \text{rg}A^* < m$ entonces el sistema es compatible indeterminado.
- (Notar que m es el número de incógnitas del sistema).

3.7 Proposición. Supongamos que $Ax = b$ es un sistema compatible y sea z una solución de este sistema. Entonces el conjunto de las soluciones del sistema es

$$\{z + t \mid At = 0\}.$$

3.8 Teorema. (Regla de Cramer). Consideremos el sistema de n ecuaciones con n incógnitas $Ax = b$, supongamos que $A = (a_{ij})$ y $|A| \neq 0$. Entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}{|A|}.$$