**Universidad Politécnica de Cartagena**

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial**

**Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería**

**Electrónica Industrial, Grupo Mañana**

**1 de julio de 2009**

**Primer cuatrimestre**

**1.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ donde $e_1 = (1, -2, 3)$, $e_2 = (2, -1, 2)$ y $e_3 = (-2, -1, 1)$. Supongamos que:

$$\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & b \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $f(e_2 + e_3) = (2, 3, -1)$.

**i)** Demuestra que $a = 0$, $b = -1$ y $c = 1$. **(1.5 punto)**

**ii)** Calcula la matriz de $f$ respecto de la base B y la expresión analítica de $f$. **(2 puntos)**

**iii)** Estudia la inyectividad y suprayectividad de $f$. Calcula bases del núcleo y de la imagen de $f$. **(1 puntos)**

**2.** Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada. **(3.5 puntos)**

**3.** Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = y(x' + z') + x'z$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z$ y obtén a partir de ésta, usando el método de Quine-McCluskey, una expresión booleana simplificada.
**(2 puntos)**

## Segundo cuatrimestre

**4. (Anticipativo)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

en función de unas nuevas coordenadas $u$ y $v$ donde $u = -2x + y$ y $v = x + 2y$. **(0.75 puntos)**

**5.** Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{3}{(x-5)^6(x^2+1)^3(x+1)} dx.$$

**(0.75 puntos)**

**6.** Dada la función $f(x) = \cos(-2x)$, calcula su polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$, aproxima $\cos(-0.2)$ utilizando el polinomio calculado y obtén la menor posible de las cotas superiores del error cometido. **(0.75 puntos)**

**7.** Calcula:

**i)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^4 + 4^4 + 6^4 + \ldots + (2n)^4}{n^5 + 1}.$$

**(0.75 puntos)**

**ii)** Calcula $\int_{5/2}^{5\sqrt{3}/2} \sqrt{25 - x^2} dx$. **(1 punto)**

**iii)** $\int\int_\Omega xydxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge y\}$. **(1 punto)**

**8. i)** Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$ **(1.5 puntos)**

**ii)** Comprueba que la ecuación $x\cos y + \mathrm{e}^x \mathrm{sen} y = 1$ define a $y$ como función implícita de $x$ en un abierto de $x = 1$ donde toma el valor $y = 0$. Calcula la derivada de dicha función en $x = 1$. **(1 punto)**

**9.** Resuelve:

**i)** $\left\{\begin{array}{r} y' + y^2 \mathrm{sen} x = 0 \\ y(0) = -1/2 \end{array}\right.$. **(1 punto)**.

**ii)** $\left\{\begin{array}{r} y'' + y' - 2y = -2x^2 + 6x - 6 \\ y(0) = 6, y'(0) = -2 \end{array}\right.$. **(1.5 puntos)**