FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Definición. *Se define función real de variable real a una aplicación* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *donde* $D \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo. Si consideramos $f(x) = \sqrt{x}$ entonces el dominio máximo de f es $D = [0, \infty[$.

Definición. *Si* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *se define la gráfica de* f *como el subconjunto de* $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Definición. *Si* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se define:*

i) $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

ii) $\alpha f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

iii) $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

iv) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, $f/g : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid (f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Definición. *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Entonces:*

i) *Diremos que* f *está acotada superiormente si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \leq k$ $\forall x \in D$. *Entonces diremos que* k *es una cota superior de* f.

ii) *Diremos que* f *está acotada inferiormente si existe* $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \geq m$ $\forall x \in D$. *Entonces diremos que* m *es una cota inferior de* f.

iii) *Diremos que* f *está acotada si está acotada superiormente e inferiormente.*

Definición. *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces:*

i) *Diremos que f es creciente si $f(x) \leq f(y)$ cuando $x < y$.*

ii) *Diremos que f es decreciente si $f(x) \geq f(y)$ cuando $x < y$.*

iii) *Diremos que f es estrictamente creciente si $f(x) < f(y)$ cuando $x < y$.*

iv) *Diremos que f es estrictamente decreciente si $f(x) > f(y)$ cuando $x < y$.*

v) *Diremos que f es monótona si es creciente o decreciente.*

Ejemplos. 1. Si $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \ \mid f(x) = x^2$ entonces f es estrictamente creciente y no está acotada superiormente pero si inferiormente por 0.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid f(x) = -2x + 1$ es estrictamente decreciente y no está ni acotada superiormente ni inferiormente.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid f(x) = -2$ es creciente y decreciente. Además está acotada.

Definición. *Si $D \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que x_0 es un punto de acumulación de D si $\forall \delta > 0$ $(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$. Denotaremos por D' el conjunto formado por los puntos de acumulación de D.* Intuitivamente, $x_0 \in D'$ si podemos encontrar puntos de $D \setminus \{x_0\}$ tan próximos a x_0 como queramos.

Ejemplo. Si $D =]-3, 5[\cup \{6\}$ entonces $D' = [-3, 5]$.

Definición. *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ y $l \in \mathbb{R}$.*

i) *Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

ii) *Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.*

iii) *Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < M$.* **iv)** *Si D no está acotado superiormente, diremos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si $\forall \epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in D$, $x > k$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

v) *Si D no está acotado superiormente, diremos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in D$, $x > k$ entonces $f(x) > M$.*

vi) *Si D no está acotado superiormente, diremos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x > k$ *entonces* $f(x) < M$.

vii) *Si D no está acotado inferiormente, diremos que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ *si* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x < k$ *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

viii) *Si D no está acotado inferiormente, diremos que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x < k$ *entonces* $f(x) > M$.

ix) *Si D no está acotado inferiormente, diremos que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in D$, $x < k$ *entonces* $f(x) < M$.

Proposición. *Sean* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

i) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.

ii) $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x)$.

iii) $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$.

iv) *Si* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in D$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *entonces* $\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))/(\lim_{x\to x_0} g(x))$.

Si D no está acotado superiormente o D no está acotado inferiormente, se tienen las propiedades anteriores sustituyendo $\lim_{x\to x_0}$ *por* $\lim_{x\to\infty}$ *o* $\lim_{x\to-\infty}$ *respectivamente.*

Proposición. *Sean* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_= \in D'$. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 1$ *y existe* $\lim_{x\to x_0} f(x)(g(x) - 1) \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} f(x)(g(x)-1)}.$$

Si D no está acotado superiormente o D no está acotado inferiormente, se tiene que la propiedad es también cierta sustituyendo $\lim_{x\to x_0}$ *por* $\lim_{x\to\infty}$ *o* $\lim_{x\to-\infty}$ *respectivamente.*

Límites laterales

Definición. *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

i) *Si* $x_0 \in (]-\infty, x_0[\cap D)'$. *Se dice que que el límite cuando* x *tiende a* x_0 *por la izquierda de* f *es* l *y se escribe* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ *si* $\forall\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$, $0 < x_0 - x < \delta$ *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

ii) *Si* $x_0 \in (]x_0, +\infty[\cap D)'$. *Se dice que que el límite cuando* x *tiende a* x_0 *por la derecha de* f *es* l *y se escribe* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ *si* $\forall\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$, $0 < x - x_0 < \delta$ *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

Proposición. *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in (]-\infty, x_0[\cap D)' \cap (, x_0, +\infty[\cap D)'$. *Entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si y sólo si* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$.

Continuidad de funciones

Definición. *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$.

i) *Si* $x_0 \notin D'$, *diremos que* f *es continua en* x_0.

ii) *Si* $x_0 \in D'$, *diremos que* f *es continua en* x_0 *si* $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Diremos que* f *es continua en* D *si es continua en* x, *para todo* $x \in D$.

Proposición. *Sean* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* f *y* g *son continuas en* x_0. *Entonces:*

i) $f + g$, $f - g$, αf *y* $f \cdot g$ *son continuas en* x_0.

ii) *Si* $g(x_0) \neq 0$ *entonces* f/g *es continua en* x_0.

Proposición. *Si* $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\mathrm{Im} f \subseteq D_2$, f *es continua en* $x_0 \in D_1$ *y* g *es continua en* $f(x_0)$ *entonces* $g \circ f$ *es continua en* x_0.

Proposición. i) *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$ *entonces* f *es continua en* $\mathbb{R}$.

ii) *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *entonces* f *es continua en* $\mathbb{R}$.

iii) *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces* f *es continua en* $\mathbb{R}$.

iv) *Si* $f(x) = p(x)/q(x)$ *con* $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces* f *es continua en* $\mathbb{R} \setminus \{c \in \mathbb{R} \mid q(c) = 0\}$.

v) *Si* $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$ *con* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces* f *es continua en su dominio.*

vi) $f(x) = \mathrm{sen}x$*,* $g(x) = \cos x$*,* $h(x) = \mathrm{e}^x$ *y* $r(x) = a^x, a > 0$ *son funciones continuas en* $\mathbb{R}$*.*

vii) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \mathbb{R}\setminus\{n\pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \text{ impar}\}$.

viii) $g(x) = \log x$*,* $h(x) = \log_a x$ *son continuas en* $]0, \infty[$.

ix) $j(x) = \mathrm{arcsen}x$*,* $k(x) = \arccos x$ *son continuas en* $[-1, 1]$.

x) $l(x) = \mathrm{arctg}x$ *(tomar* $\mathrm{Im}f =]-\pi/2, \pi/2[$*) es continua en* $\mathbb{R}$*.*

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Supongamos que f no es continua en x_0.

1. Si existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ diremos que f presenta una discontinuidad evitable en x_0.

Si definimos $f : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f} = f(x)$ si $x \neq x_0$ y $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$, entonces $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ y $\tilde{f}$ es continua en x_0.

2. Si no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pero existen $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ entonces diremos que f presenta una disconitunuidad inevitable de primera especie o de salto finito en x_0.

3. Si no existe algún límite lateral o alguno es infinito entonces diremos que f presenta en x_0 una discontinuidad inevitable de segunda especie.

Teoremas sobre valores intermedios y valores extremos de las funciones continuas

En primer lugar se tiene:

Teorema. (Bolzano) *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(a)f(b) < 0$*. Entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

De este resultado se sigue:

Teorema. (Weierstrass de los valores intermedios) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $y \in \mathbb{R}$ es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = y$.*

Con respecto a los valores extremos se obtiene:

Teorema. (Weierstrass de los valores extremos) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

i) *f está acotada.*

ii) *Existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.*

La función $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ muestra la necesidad de que la función del resultado anterior tenga que ser continua en un intervalo cerrado.