

LA INTEGRAL DE RIEMANN

En este tema se introduce el Cálculo Integral que además de permitir calcular longitudes, áreas y volúmenes, tiene múltiples aplicaciones en la Ciencias, Ingeniería, etc...

En primer lugar, consideramos una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ y pretendemos calcular el área delimitada por la gráfica de f , las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX .

En primer lugar introducimos el concepto de partición de un intervalo.

Definición. Dado un intervalo $[a, b]$, una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

A los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ se les llama intervalos de la partición \mathcal{P} .

Se define diámetro de la partición \mathcal{P} a $\delta(\mathcal{P}) = \max\{|x_{i+1} - x_i|, i = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Dadas dos particiones $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ de $[a, b]$, diremos que \mathcal{P}' es más fina que \mathcal{P} si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.

Claramente en ese caso $\delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$.

Introducimos la suma superior y la suma inferior de Riemann de una función asociada a una partición.

Definición. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Se define la suma inferior de Riemann de f para la partición \mathcal{P} como:

$$s(\mathcal{P}, f, [a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $0 \leq i \leq n-1$ y la suma superior de Riemann de f como:

$$S(\mathcal{P}, f, [a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $0 \leq i \leq n-1$.

Claramente, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{P} y \mathcal{P}' son particiones de $[a, b]$ tales que \mathcal{P}' es más fina que \mathcal{P} entonces:

$$s(\mathcal{P}, f, [a, b]) \leq s(\mathcal{P}', f, [a, b])$$

y

$$S(\mathcal{P}', f, [a, b]) \leq S(\mathcal{P}, f, [a, b]).$$

Definición. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $(\mathcal{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ tales que \mathcal{P}_{n+1} es más fina que \mathcal{P}_n , $n = 1, 2, \dots, \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{P}_n) = 0$. Se dice que f es integrable Riemann o integrable en $[a, b]$ si existen y coinciden los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\mathcal{P}_n, f, [a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{P}_n, f, [a, b])$. A este valor se le llama integral de Riemann o integral de f en $[a, b]$ y se denota $\int_a^b f(x)dx$. A a y b se les llaman límites de integración. Diremos que $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Notar que si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, al aumentar n consideramos cada vez particiones más finas luego las sumas inferiores de Riemann se aproximan cada vez más por defecto al área comprendida entre la gráfica $f(x)$, el eje OX , la recta $x = a$ y la recta $x = b$ y con las sumas superiores nos aproximamos por exceso.

Así, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y f es integrable Riemann, $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Se obtienen los siguientes resultados:

Teorema. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y tiene como máximo un número finito de puntos de discontinuidad entonces f es integrable en $[a, b]$.

Propiedades elementales de la integral de Riemann

Proposición. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $c \in [a, b]$. Entonces $f(x)$ es integrable Riemann en $[a, c]$ y $[c, b]$ y $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Proposición. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

i) $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ii) αf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

iii) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

iv) Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

v) $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Teorema Fundamental del Cálculo integral. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces definimos $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si f es continua en $x_0 \in [a, b]$ entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Introducimos el concepto de primitiva de una función, el cual nos va a permitir calcular el valor de algunas integrales.

Definición. Si $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que $F(x)$ es un primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Denotaremos por $\int f(x)dx$ el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$.

Del Teorema fundamental del Cálculo se obtiene que toda función continua tiene primitivas:

Teorema. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces f posee primitivas y si además $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son primitivas de f , existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

Teorema. (Regla de Barrow). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f entonces $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Para el cálculo de primitivas son importantes el Teorema del cambio de variable

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t) dt$$

y la fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Damos una tabla con primitivas de las funciones elementales más importantes.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

4. $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
5. $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$.
6. $\int e^t dt = e^t + C$.
7. $\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C$.
8. $\int \cos t dt = \sin t + C$.
9. $\int \sin t dt = -\cos t dt$.
10. $\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \sec^2 t dt = \int (1 + \tan^2 t) dt = \tan t + C$.
11. $\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = \int \operatorname{cosec}^2 t dt = -\cot t + C$.
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + C$.
13. $\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + C$.
14. $\int \cosh t dt = \sinh t + C$.
15. $\int \sinh t dt = \cosh t dt$.
16. $\int \frac{1}{\cosh^2 t} dt = \tanh t + C$.
17. $\int \frac{1}{\sinh^2 t} dt = \operatorname{coth} t + C$.
18. $\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \operatorname{arcsinh} t + C$.
19. $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt = \operatorname{arccosh} t + C$.

Aplicaciones del Cálculo Integral al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

1. Cálculo de la longitud de una curva

Consideremos la curva definida por la función derivable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces la longitud de dicha curva es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

2. Cálculo del área de una superficie plana

Recordemos que por definición de la integral de Riemann, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ es integrable entonces el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x) dx$. Como consecuencia de esto, si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

integrables con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces el área delimitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, la recta $x = a$ y la recta $x = b$ es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

3. Cálculo del área de un sólido de revolución

Consideremos el sólido tridimensional que se obtiene al girar la gráfica de la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable sobre el eje OX . Entonces el área de la superficie exterior de dicho sólido es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

4. Cálculo del volumen de un sólido de revolución

Consideremos el sólido tridimensional que se obtiene al girar la gráfica de la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el eje OX . Entonces el volumen de dicho sólido es

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$