Algunos métodos de integración

1. Integrales de funciones racionales

Son integrales del la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx$ donde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Supondremos que el grado de $p(x)$ es menor que de $q(x)$.

Tenemos dos posiblidades:

i) El denominador no posee raíces complejas multiples

En ese caso $q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_r)^{n_r}q_1(x)\dots q_s(x)$ donde $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ y $q_1(x), q_2(x), \dots, q_s(x) \in \mathbb{R}[x]$ que no poseen raíces reales y $q_i(x)$ y $q_j(x)$ no poseen raíces complejas comunes a ambos si $i \neq j$.

Entonces escribiremos $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots \frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{A_{r1}}{(x-a_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots \frac{A_{rn_r}}{(x-a_r)^{n_r}} + \frac{M_1x+N_1}{q_1(x)} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{q_s(x)}$ de donde se obtiene la integral de $\frac{p(x)}{q(x)}$ como suma de integrales inmediatas.

ii) El denominador posee raíces complejas multiples. Método de Hermite

En ese caso $q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_r)^{n_r}q_1(x)^{m_1}\dots q_s(x)^{m_s}$ donde $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$, $q_1(x), q_2(x), \dots, q_s(x) \in \mathbb{R}[x]$ son polinomios de grado 2 que no poseen raíces reales, $q_i(x)$ y $q_j(x)$ no poseen raíces complejas comunes si $i \neq j$ y $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}^*$ con algún $m_i \geq 2$.

Entonces expresaremos $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx = \frac{F(x)}{G(x)} + \int \frac{A_1}{(x-a_1)}\ dx + \int \frac{A_2}{(x-a_2)}\ dx \dots + \int \frac{A_r}{(x-a_r)}\ dx + \int \frac{M_1x+N_1}{q_1(x)}\ dx + \dots + \int \frac{M_sx+N_s}{q_s(x)}\ dx$ donde $G(x) = (x-a_1)^{n_1-1}(x-a_2)^{n_2-1}\dots(x-a_r)^{n_r-1}q_1(x)^{m_1-1}\dots q_s(x)^{m_s-1}$ y el grado de $F(x)$ es menor que el de $G(x)$ (para el cálculo de $F(x)$ supondremos que el grado de éste es el grado de $G(x)$ disminuido en una unidad, pudiendo ser el grado menor).

2. Integrales de funciones irracionales algebraicas

Son integrales no inmediatas de funciones en las cuales aparecen alguna raíz o raíces con el mismo radicando de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ o sea, integrales de la forma

$$\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_1}{m_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_2}{m_2}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_r}{m_r}})\ dx.$$

Entonces hacemos el cambio $(\frac{ax+b}{cx+d}) = t^s$ donde $s = \mathrm{mcm}(m_1, m_2, \ldots, m_r)$.

3. Método de Euler

Se utiliza para calcular integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$$

que no son inmediatas. Los cambios que se pueden efectuar son:

i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ si $a > 0$.

ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ si $c > 0$.

iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ si α es una raíz real de $ax^2+bx+c = 0$.

4. Método Alemán

Se utiliza para calcular integrales de la forma

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$$

donde $A_n(x)$ es un polinomio de grado n. Entonces expresaremos

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx = \sqrt{ax^2+bx+c}\ A_{n-1}(x) + \int \frac{L}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$$

donde $A_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y $L \in \mathbb{R}$. Derivando la expresión anterior se determinan $A_{n-1}(x)$ y L.

Para el cálculo de $\int \frac{L}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$, si ésta no es inmediata, puede ser necesaria la utilización del Método de Euler.

5. Integrales binomias

Son integrales de la forma

$$\int x^m(a+bx^n)^p\ dx$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, y $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Tenemos las siguientes posibilidades:

i) Si $p \in \mathbb{Z}$ entonces la integral anterior es irracional algebraica.

ii) Si $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ y $p = \frac{r}{s}$ irreducible con $r, s \in \mathbb{Z}$ entonces efectuaremos el cambio $a+bx^n = u^s$.

iii) Si $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ efectuaremos el cambio $\frac{a}{x^n} + b = u^s$ donde s es el del apartado **ii)**.

6. Integrales de funciones transcendentes

i) Si tenemos $\int R(a^x)\ dx$ puede ser adecuado el cambio $t = a^x$.

ii) Si tenemos $\int R(\text{arcsin}x)\ dx$ puede ser adecuado el cambio $t = \text{arcsin}x$.

Si tenemos $\int R(\text{arctan}x)\ dx$ puede ser adecuado el cambio $t = \text{arctan}x$.

iii) Para el caso $\int R(\text{sin}x, \text{cos}x)\ dx$ el cambio general es $\text{tan}\frac{x}{2} = t$ de donde $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}dt$ aunque hay algunos casos especiales donde se pueden simplificar los cálculos:

a) Si R es impar en seno, o sea $R(-\text{sin}x, \text{cos}x) = -R(\text{sin}x, \text{cos}x)$ entonces haremos el cambio $t = \cos x$ de donde $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ y $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

b) Si R es impar en coseno, o sea $R(\text{sin}x, -\text{cos}x) = -R(\text{sin}x, \text{cos}x)$ entonces haremos el cambio $t = \sin x$ de donde $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ y $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

c) Si R es par, o sea $R(-\text{sin}x, -\text{cos}x) = R(\text{sin}x, \text{cos}x)$ entonces haremos el cambio $t = \tan x$ de donde $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ y $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$.

iv) Si tenemos $\int R(\text{tan}x)\ dx$ puede ser adecuado el cambio $t = \text{tan}x$.

Cambios trigonométricos

Se suelen usar cuando tenemos integrales donde aparecen raíces de los siguientes tipos:

i) $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$ donde u es una función, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Haremos el cambio $u = \frac{a}{b}\sin t$. (Recordar que $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$).

ii) $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ siendo a, b, u como en **i)** . Haremos el cambio $u = \frac{a}{b}\tan t$. (Recordar que $\sqrt{1 + \tan^2 t} = \sec t$).

iii) $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ siendo a, b, u como en **i)** . Haremos el cambio $u = \frac{a}{b}\sec t$. (Recordar que $\sqrt{\sec^2 t - 1} = \tan t$).