1.1 Ejercicios Resueltos Tema 1

Ejemplo: *Probar que*

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Solución.- Para $n=1$ es cierta, también lo comprobamos para $n=2,3,\ldots$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1\cdot(1+1)}{2} \\ 1+2 &= 3=\frac{2(2+1)}{2} \end{aligned}$$

supuesto cierta para $n=k$, que se le llama hipótesis de inducción, lo probamos para $n=k+1$.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}$$

la primera igualdad es consecuencia de la hipótesis de inducción y en la última hemos sacado factor común $(k+1)$.

Probamos ahora la segunda identidad:

Para $n=1$ es cierta, también lo comprobamos para $n=2$.

$$\begin{aligned} 1^3 &= \left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2 \\ 1^3+2^3 &= 9=\left[\frac{2\cdot(2+1)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

supuesto cierta para $n=k$, lo probamos para $n=k+1$.

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}= \\ &= \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{2^2}=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{2^2}= \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

Ejercicio: *Probar que*

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejercicio: *Probar que*

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Ejercicio: *Probar que*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n}$$

Ejercicio: *Si* $n+\frac{1}{n}$ *es un número natural, también lo es* $n^a+\frac{1}{n^a}$.

Ejercicio: *Hallar la ley general que simplifica el producto*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

y demostrarlo por inducción.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{i+j+k=3} x^i y^j z^k &= xyz+x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+\\ &\quad +xz^2+yz^2+x^3+y^3+z^3\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\sum_{i,j=1}^{2} x_i y^j = x_1y^1+x_1y^2+x_2y^1+x_2y^2$$

Ejemplo: *Expresar* $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$ *con el simbolo sumatorio, de varias formas.*

Solución.-

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} &= \sum_{i=2}^{6}\frac{1}{2^i}\\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} &= \sum_{k=0}^{4}\frac{1}{2^{k+2}}\\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} &= \sum_{n=1}^{5}\frac{1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Ejercicio: *Calcular*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Sugerencia: $2k-1=k^2-(k-1)^2$.

Ejercicio: *Calcular*

$$\sum_{k=1}^{n+r}a_k-\sum_{i=1+r}^{n+r}a_i$$

Ejercicio: *Razonar la veracidad o falsedad de las igualdades siguientes:*

1.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(a_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^2}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^2$$

2.
$$\sum_{i=0}^{n} (2+i) = \frac{5n+n^2}{2}$$

3.
$$\sum_{j=1+n}^{2n} \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

Ejemplo*: Si dispongo en mi armario de 5 camisas, 3 pares de pantalones, 6 pares de calcetines, y dos pares de zapatos. ¿De cuántas formas distintas puede vestirme?*

Solución.- Por el principio de multiplicación serán:

$$5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 180$$

formas distintas.

Ejemplo*: ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras se pueden formar con unos y ceros?*

Solución.- Para elegir el primer número sólo tenemos una posibilidad, y es el 1, para la segunda tenemos dos posibilidades, al igual que para la tercera y la cuarta, luego el número es $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ejercicio*: ¿Cuántos números de 5 cifras son pares?¿Cuántos empiezan por 5 y acaban en 8?*

Ejemplo*: Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ formar todas las variaciones ordinarias de esos cuatro elementos tomadas de tres en tres.*

Estas son

$$\begin{gathered} abc, abd, acb, acd, adb, adc \\ bac, bad, bca, bcd, bda, bdc \\ cab, cad, cba, cbd, cda, cdb \\ dab, dac, dba, dbc, dca, dcb \end{gathered}$$

la forma más comoda de obtenerlas es mediante un diagrama de árbol.

Ejemplo*: Si en la F1 participan 20 coches, y supuesto que todos acaban la carrera, ¿de cuántas formas distintas puede estar formado el podium?*

El cajón está formado por tres escalones, y evidentemente no se pueden repetir, luego serían $V_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$

Ejemplo*: ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar cinco personas en un banco?*

Sólo importa el orden, ya que se sientan todas, luego se trata de una permutación

$$P_5 = 5! = 120$$

Ejemplo: *¿Cuántas quinielas hay que rellenar para asegurar un pleno?*

Tenemos tres elementos $1, x, 2$, que se pueden repetir y 15 partidos, por lo que son variaciones con repetición de tres elementos tomados de 15 en 15.

$$RV_3^{15} = 3^{15} = 14348907$$

Ejercicio: *¿Cuántas diagonales tiene un exágono? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?*

Ejemplo: *Calcular:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

La igualdad es evidente, basta hacer $x = y = 1$, en la fórmula del binomio para obtener 2^n.

Ejercicio: *Demostrar que*

$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

es múltiplo de 17.

Ejercicio: *Demostrar que para todo $n \geq 1$, se verifica:*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} < 2$$

Ejercicio: *Calcular:*

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}$$

Ejercicio: *Sumar:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$$

Ejercicio: *Calcular*

$$\sum_{i+j=3} i^3 j^3$$

Ejercicio: *Desarrollar*

$$(a+b)^3$$
$$(a+b)^4$$

1.1 Ejercicios resueltos de combinatoria

Ejercicio 1.1 *Para abrir un candado debemos acertar una combinación de tres números (por ejemplo 722) ¿Cuántos intentos tenemos que hacer para estar seguros de abrirlo? ¿Qué probabilidad tenemos de abrirlo con tres intentos?*

Solución.

Para cada uno de los números tenemos 10 opciones, por lo que la cantidad de posibles números clave será $10^3 = 1000$ (los números desde el 000 al 999 o las variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3). Por lo tanto la probabilidad de abrirlo con tres intentos será

$$\frac{3}{1000} = 0.003$$

(si en cada intento se usa un número diferente).

Ejercicio 1.2 *Una casa dispone de cerradura electrónica abriéndose únicamente si se acierta el número secreto que consta de cuatro cifras. ¿Cuántos intentos debemos hacer para estar seguros de abrirla? Desanimados por el gran número de intentos necesarios nos fijamos en que los dígitos 2,5,7 y 8 aparecen más desgastados que los demás. ¿Cuántas opciones tendremos si el número secreto está formado por esos dígitos? ¿Y si los números desgastados fuesen sólo 2,5 y 8?*

Solución.

Para cada uno de los dígitos tenemos 10 opciones, por lo que la cantidad de posibles números clave será $10^4 = 10000$ (los números desde el 0000 al 9999). Si conocemos los 4 dígitos del número clave, las opciones se reducen a sus posibles reordenaciones (permutaciones) $P_4 = 4! = 24$. Si sólo está formado por 3 (uno se repite), tenemos tres opciones (se repite el 2 el 5 o el 8) y para cada una de ellas

$$PR^4_{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

opciones diferentes, por lo que la solución es 36.

Ejercicio 1.3 *Usualmente se utiliza la notación decimal (base 10) para representar los números, de forma que 234 significa* $2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4$*. Si usáramos base 6 se tendría* $234_6 = 2 \cdot 36 + 3 \cdot 6 + 4$*. ¿Cuántos números podemos codificar en base 6 con tres cifras? ¿Cuántos de ellos tendrán exactamente tres cifras (es decir no empiezan por cero)?*

Solución.

En base 6 se forman palabras con 6 símbolos (0...5). Si estas tiene longitud 3, el número total será $VR_{6,3} = 6^3 = 216$. Otra forma de verlo sería teniendo en cuenta tendríamos los números desde el 0 al $555_6 = 5 \cdot 36 + 5 \cdot 6 + 5 = 215$ (216 números). De ellos tendrán realmente 3 cifras desde el $100_6 = 1 \cdot 36 + 0 \cdot 6 + 0 = 36$ al $555_5 = 215$, lo que hace un total de 215-36+1=180 números. Es decir todos menos los que se pueden formar con 2 cifras, $6^3 - 6^2 = 180$.

Ejercicio 1.4 *?'Qué es más fácil acertar el "gordo" de la lotería, 6 en la lotería primitiva o 14 en las quinielas?*

Solución.

La lotería semanal consta de 100000 números (desde el 00000 al 99999) por lo que la probabilidad de acertar el "gordo" es $1/100000 = 0.00001$. En la lotería primitiva se elige un subconjunto de tamaño 6 de un conjunto con 49 elementos, por lo que hay $C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13983816$ opciones diferentes y la probabilidad de acertar es

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = 0.00000007\,1511$$

Para las quinielas la solución correcta es más dificil ya que para usar la definición clásica debemos suponer que todas las posibles opciones son igualmente probables lo cual no parece muy razonable (tendría la misma posibilidad la opción todo unos y la opción todo doses). Si que es sencillo contar el número total de opciones $VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$ (tres signos para cada casilla).

Ejercicio 1.5 *En un supermercado sólo nos dejan utilizar la caja rápida si llevamos 5 o menos de 5 artículos. Sólo estamos interesados en tres productos distintos. Suponiendo que nos llevamos 5 artículos ?'Cuántas opciones diferentes tenemos?*

Solución.

Si a,b,c representan los tres productos debemos elegir conjuntos con 5 artículos. Por ejemplo $\{a, a, b, b, c\}$ o $\{a, a, a, a, c\}$. El número total será $CR_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$.