Tema 2. Teoría de conjuntos

Problemas.

1. Consideramos las proposiciones:

$p =$"Marte es un estrella".

$q =$ "$2 + 2 = 4$.

$r =$"Una hora son 60 minutos".

$s =$"La única solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es 2".

Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

$p \wedge q$, $p \vee q$, $p \vee s$, $p \vee s$, $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow s$, $q \Rightarrow r$, $p \Leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow s$, $(p \vee q) \Rightarrow s$, $r \vee \neg s$, $q \Rightarrow \neg r$, $\neg p \Leftrightarrow \neg s$.

2. Consideramos los subconjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, $C = \{2, 5\}$, $D = \emptyset$ del conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calcula:

$\overline{A}^X,\ \overline{D}^X,\ \overline{X}^X,\ A \cap B,\ A \setminus C,\ B \cup C,\ C \cap D,\ X \cap D,\ \overline{A}^X \cup (B \cap C),\ A \cap (B \cup C),$ $\overline{C}^X \cup (\overline{A}^X \cup \overline{B}^X,\ B \times C.$

3. Analiza las propiedades de las siguientes relaciones binarias en el conjunto $A = \{1, 3, 6\}$ y di cuáles son relación binaria de orden y cuáles de equivalencia:

i) Si $a, b \in A$, $a\mathfrak{R}b$ si $a = b$.

ii) $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$

iii) $\mathfrak{R} = A \times A$.

iv) Si $a, b \in A$, $a\mathfrak{R}b$ si $b - a = 2$.

4. En el conjuntode las fracciones $F = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ consideramos la relación binaria:

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F$, $\frac{a}{b}\mathfrak{R}\frac{c}{d}$ si $a + d = b + c$.

Demuestra que es una relación binaria de equivalencia y calcula la clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$.

5. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son aplicaciones y en caso afirmativo estudia si son inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

i) $f = (A, B, F)$ donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1\}$ y $F = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.

ii) $f = (A, B, F)$ donde $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $F = \{(1, 2)\}$.

iii) $f = (A, B, F)$ donde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $F = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

iv) $f = (A, B, F)$ donde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $F = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$.

v) $f = (A, B, F)$ donde $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $F = \{(1, 3)\}$.

vi) $f = (A, B, F)$ donde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $F = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$.

6. Estudia si son inyectivas, suprayectivas y biyectivas las siguientes aplicaciones:

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 2x - 1$.

ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 - 4$.

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid f(x, y) = |x - y|$.

iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x$.

v) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid f(x) = x$.

vi) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

vii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x) = (x + 1, x^2)$.