# Ejercicios resueltos de funciones lineales y cuadráticas

1. Calcula el dominio de las funciones $f(x) = \log(x^2 - 3x + 2)$.

   *Solución.* La función $\log x$ sólo está correctamente definida si $x > 0$, por lo que hay que estudiar el signo de $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Resolvemos

   $$g(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = 2.$$

   Para $g(x)$ tenemos tres intervalos de signo constante, $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (1, 2)$ e $I_3 = (2, \infty)$.

   - Si $x \in I_1$ entonces $g(x) > 0$, ya que $g(0) = 2 > 0$.
   - Si $x \in I_2$ entonces $g(x) < 0$, ya que $g(3/2) = -1/4 < 0$.
   - Si $x \in I_3$ entonces $g(x) > 0$, ya que $g(3) = 2 > 0$.

   Entonces el dominio de la función $f(x) = \log(x^2 - 3x + 2)$ es

   $$\text{Dom } f = I_1 \cup I_3 = (-\infty, 1) \cup (2, \infty).$$

2. Considera la recta $r_1$ que pasa por los puntos $P_1 = (1, 2)$ y $P_2 = (-2, 3)$ y la recta $r_2$ que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $y = 2x$. Calcula la intersección de $r_1$ y $r_2$.

   *Solución.* Para calcular la intersección vamos a hallar las ecuaciones de $r_1$ y $r_2$. Como conocemos dos puntos de $r_1$ es inmediato que su ecuación es

   $$(3 - 2) \cdot (x - 1) - (-2 - 1) \cdot (y - 2) = 0 \Longrightarrow x + 3y - 7 = 0.$$

   Un vector director de $2x - y = 0$ es $\vec{v} = (1, 2)$, por lo tanto un vector perpendicular será $\vec{w} = (2, -1)$. Entonces la ecuación de $r_2$ se obtiene a partir del punto $P_3 = (0, 0)$ y el vector director $\vec{w} = (2, -1)$, y es

   $$-1 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 0) = 0 \Longrightarrow x + 2y = 0.$$

   Resolvemos el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas resultante

   $$\begin{array}{c} x + 3y = 7 \\ x + 2y = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = -14 \\ y = 7, \end{array}$$

   con lo que la intersección las rectas $r_1$ y $r_2$ es el punto $P = (-14, 7)$.

3. Calcula la ecuación de las rectas que cortan al eje horizontal en el punto $P = (2, 0)$ formando un ángulo de $\pi/3$ radianes.

   *Solución.* Ya conocemos un punto, sólo nos falta obtener un vector director. El vector director del eje horizontal es $\vec{v} = (1, 0)$, así que buscamos vectores $\vec{w} = (w_1, w_2)$ que cumplan la ecuación

   $$\cos(\theta) = \frac{|v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \Longrightarrow \cos(\pi/3) = \frac{|1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.$$

   Lo más lógico es elegir $\vec{w}$ unitario (es decir, $||\vec{w}|| = 1$), de forma que la ecuación anterior se transforma en $|w_1| = 1/2$. Sólo hay dos posibilidades que proporcionan rectas diferentes, que son

- $w_1 = 1/2$, $w_2 = \sqrt{3}/2$. La ecuación de esta recta es

$$(\sqrt{3}/2) \cdot (x-2) - (1/2) \cdot (y-0) = 0 \Longrightarrow \sqrt{3} \cdot x - y - 2\sqrt{3} = 0.$$

- $w_1 = 1/2$, $w_2 = -\sqrt{3}/2$. La ecuación de esta recta es

$$(-\sqrt{3}/2) \cdot (x-2) - (1/2) \cdot (y-0) = 0 \Longrightarrow \sqrt{3} \cdot x + y - 2\sqrt{3} = 0.$$

4. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos $P_1 = (2,4)$, $P_2 = (6,2)$ y $P_3 = (-1,3)$.

*Solución.* Utilizamos la ecuación $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ para obtener tres ecuaciones en las que aparecerán $x_0$, $y_0$ y $r^2$.

$$\begin{array}{rcrcl} (2-x_0)^2 & + & (4-y_0)^2 & = & r^2 \\ (6-x_0)^2 & + & (2-y_0)^2 & = & r^2 \\ (-1-x_0)^2 & + & (3-y_0)^2 & = & r^2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 4-4x_0+x_0^2+16-8y_0+y_0^2 & = & r^2 \\ 36-12x_0+x_0^2+4-4y_0+y_0^2 & = & r^2 \\ 1+2x_0+x_0^2+9-6y_0+y_0^2 & = & r^2. \end{array}$$

Podemos restar estas ecuaciones entre sí para eliminar la aparición de los cuadrados, y conseguir un sistema lineal de dos ecuaciones e incógnitas.

$$\begin{array}{rcr} -8x_0+4y_0 & = & -20 \\ 6x_0+2y_0 & = & 10 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} x_0 & = & 2 \\ y_0 & = & -1 \end{array}$$

Utilizando esta solución en cualquiera de las tres ecuaciones originales deducimos que $r^2 = 25$, con lo que la circunferencia tiene por centro el punto $P = (x_0, y_0) = (2, -1)$ y por radio $r = \sqrt{25} = 5$, con lo que su ecuación es

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

5. Se considera la parábola de ecuación $12x^2 - 120x - 3y + 297 = 0$. Encuentra los ejes en los que se obtiene su ecuación reducida.

*Solución.* Para empezar despejaremos el valor de la variable $y$, para escribir la ecuación como

$$y = 4x^2 - 40x + 99.$$

Ahora tenemos que obtener un cuadrado de las potencias en $x$, para lo que escribiremos

$$4x^2 - 40x = 4 \cdot (x^2 - 10 \cdot x) = 4 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 5) = 4 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) - 4 \cdot 5^2 = 4 \cdot (x-5)^2 - 100.$$

Concluimos que la parábola puede escribirse como

$$y = (4(x-5)^2 - 100) + 99 = 4(x-5)^2 - 1 \Longrightarrow y + 1 = 4(x-5)^2.$$

Haciendo el cambio de variables $X = x - 5$ e $Y = y + 1$ la parábola puede escribirse como

$$Y = 4 \cdot X^2,$$

cuyos ejes son, obviamente, $X = 0$ e $Y = 0$. Entonces los ejes buscados son las rectas $x = 5$ (eje vertical) e $y = -1$ (eje horizontal).

## Ejercicios propuestos de funciones lineales y cuadráticas

1. Halla el dominio de la función $\log|x^2 - 3x + 2|$.
2. Halla el dominio de la función $\sqrt{e^{x^2} - e}$.
3. Halla el dominio de la función $(1 + 2\cos x)^{-2}$.
4. Calcula las rectas que pasan por el origen formando ángulos de $\pi/3$ con el eje vertical.
5. Calcula la recta perpendicular a $y = 3x - 2$ que pasa por el punto $P = (1, -1)$.
6. Halla la intersección de las rectas $x + y = 1$ y $-x - y = -1$.
7. Halla la intersección de las rectas $x + y = 1$ y $-x - y = 1$.
8. Halla la intersección de las rectas $x + y = 1$ y $x - y = -1$.
9. Halla la recta que pasa por el origen y es paralela a $3x - 2y + 5 = 0$.
10. Halla la recta que pasa por el origen y es perpendicular a $3x - 2y + 5 = 0$.
11. Halla el ángulo que forman las rectas $x - \sqrt{3}y = \log 2$ y $x + \sqrt{3} = \pi$.
12. Halla centro y radio de la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 12 = 0$.
13. Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
14. Demuestra que la recta tangente a $x^2 + y^2 = 1$ que pasa por el punto $P$ es perpendicular a la recta que une $P$ con el origen.
15. Halla una circunferencia de radio $r = 2$ que pase por los puntos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (3, -1)$.
16. Encuentra una curva $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
17. Halla la ecuación reducida de la elipse $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$.
18. Calcula la elipse formada por los puntos cuya suma de distancias a los focos $P_1 = (-1, 0)$ y $P_2 = (1, 0)$ vale cuatro unidades.
19. Encuentra una curva $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.
20. Halla la ecuación reducida de la parábola $9x^2 + 36x + 3y + 36 = 0$.
21. Halla las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$.
22. Halla la ecuación de la parábola con foco $P = (2, -1)$ y directriz el eje $y = 0$.
23. Demuestra que las rectas de la forma $x = a$ que rebotan en la parte interna de la parábola $y = x^2$ pasan por el punto $P = (0, 1/4)$. (Idea: las rectas obtenidas tras los rebotes tienen como vector director a $\vec{v} = (4a, 4a^2 - 1)$).
24. Halla la ecuación reducida de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 18x + 8 = 0$.
25. Hay una afirmación (no completamente rigurosa) que dice que por cinco puntos distintos sólo puede pasar una cónica. Aprovechando esta afirmación, halla el número máximo de puntos en los que se pueden cortar una parábola y una hipérbola.